Материалы к лекции №12, 7 мая 2020 года

Напоминание. Часть доказательств утверждений, встречающихся в тексте, не приводится здесь и содержится в книге

[ДС] А.В.Домрин, А.Г.Сергеев. Лекции по комплексному анализу (части 1 и 2), Москва, МИАН, 2004 г.

Книга разделена на две части. Их электронные версии доступны по ссылкам:

`mi-ras.ru/books/pdf/ser1.pdf`

`mi-ras.ru/books/pdf/ser2.pdf`

Изложение материала в целом следует тексту этой книги.

1 Модулярная функция

1.1 Определение модулярной функции

Модулярная функция — это специальная голоморфная функция в единичном круге. Она понадобится нам как вспомогательное средство для доказательства так называемой малой теоремы Пикара.

Все утверждения о конструкции и свойствах модулярной функции, приведенные, но не доказанные в этом тексте, доказаны, например, в [ДС] (пункт 23.1 в лекции 23).

Пусть $U_1 := \{|z| < 1\}$ — единичный круг. Для любых двух различных точек A, B на единичной окружности ∂U_1 существует единственная обобщенная окружность, проходящая через точки A и B и ортогональная единичной окружности. Существование и единственность такой окружности легко показать, отобразив круг U_1 на верхнюю полуплоскость $\Pi_+ := \{\operatorname{Im} z > 0\}$ таким дробно-линейным отображением, что точка B переходит в бесконечность. В случае, если точки A и B диаметрально противоположны, указанная обобщенная окружность представляет собой прямую AB, а во всех других случаях — обычную окружность. Дугу рассмотренной обобщенной окружности, лежащую внутри круга U_1, мы будем называть *гиперболической дугой* AB.

Если три попарно различные точки A, B, C лежат на единичной окружности, то замыкания трех гиперболических дуг AB, BC и AC не имеют общих точек, кроме концов (соответствующие обобщенные окружности касаются), и ограничивают область в круге U_1, которую мы будем называть *гиперболическим треугольником* ABC. Это утверждение также легко проверить, отобразив круг U_1 на верхнюю полуплоскость Π_+ таким дробно-линейным отображением, что одна из точек A, B, C, например точка B, переходит в бесконечность. Все «углы» такого гиперболического треугольника нулевые.

При симметрии относительно обобщенной окружности, содержащей сторону гиперболического треугольника, его вершина, не лежащая на этой стороне, перейдет снова на единичную окружность, а сам треугольник перейдет в другой гиперболический треугольник, не пересекающийся с исходным.

Перейдем к построению модулярной функции. Зафиксируем произвольный гиперболический треугольник $ABC := \Delta_0$ в U_1 (считаем, что точка B лежит между точками A и C при движении по единичной окружности против часовой стрелки). По теореме Римана существует конформное отображение f гиперболического треугольника Δ_0 на единичный круг. По теореме Каратеодори (см. предыдущую лекцию) это отображение продолжается до гомеоморфизма замыканий $\overline{\Delta}_0 \to \overline{U}_1$. При продолжении вершины A, B и C переходят в некоторые три точки $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ единичной окружности. Дробно-линейное отображение L, переводящее $\tilde{A} \mapsto 0$, $\tilde{B} \mapsto 1$, $\tilde{C} \mapsto \infty$, переводит единичный круг на верхнюю полуплоскость Π_+. Тогда функция $\mu := L \circ f$ конформно отображает Δ_0 на Π_+ и продолжается до гомеоморфизма $\overline{\Delta}_0 \to \overline{\Pi}_+$. В частности, гиперболические дуги AB, BC и AC переходят, соответственно, в интервал $(0; 1)$, луч $(1; \infty)$ и луч $(-\infty; 0)$.

Пользуясь принципом симметрии, продолжим отображение $\mu : \overline{\Delta}_0 \to \overline{\Pi}_+$ на треугольники Δ_1^1, Δ_1^2, Δ_1^3, симметричные треугольнику Δ_0 относительно сторон AB, BC и AC. (Все продолжения исходного отображения мы также будем обозначать буквой μ.) Полученные продолжения $\mu : \overline{\Delta}_1^j \to \overline{\Pi}_-$, $j = 1, 2, 3$, конформно отображают треугольники Δ_1^j на нижнюю полуплоскость так, что их вершины снова переходят в точки 0, 1, ∞. В силу отмеченного выше свойства симметрии гиперболического треугольника относительно его стороны этот процесс можно повторить и продолжить отображение μ до конформных отображений гиперболических треугольников Δ_2^k, $k = 1, \dots, 6$, симметричных треугольникам Δ_1^j, $j = 1, 2, 3$, относительно сторон последних (и не совпадающих с Δ_0), снова на верхнюю полуплоскость, и так далее.

Полученные таким образом треугольники Δ_k^l, $k = 0, 1, 2, \dots$, $l = 1, 2, \dots, 2k$, попарно не пересекаются. Кроме того, продолжение μ на треугольники Δ_m^n обладает следующим важным свойством. Пусть два треугольника Δ_k^l и Δ_{k+1}^m имеют общую сторону. Обозначим через $\square_{k,k+1}^{l,m}$ открытый четырехугольник, полученный объединением треугольников Δ_k^l и Δ_{k+1}^m и их общей стороны. Тогда отображение μ конформно отображает четырехугольник $\square_{k,k+1}^{l,m}$ на объединение верхней полуплоскости, нижней полуплоскости и одного из интервалов или лучей $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ и $(1; \infty)$.

Обозначим через Ω_n область, полученную на n-м шаге описанного процесса продолжения. Область Ω_n состоит из всех треугольников Δ_k^l, $k = 0, 1, \dots, n$, $l = 1, 2, \dots, 2k$, с добавленными к ним интервалами их смежных сторон. Множества Ω_n открыты и возрастают: $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$, а их объединение составляет область

$$\Omega := \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n.$$

Очевидно, $\Omega \subseteq U_1$. Описанный выше процесс продолжения определяет голоморфную функцию $\mu : \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$.

Утверждение 1. *Область Ω совпадает со всем единичным кругом U_1.*

Доказательство утверждения 1 (довольно техническое) приведено в [ДС] (первый пункт Предложения на странице 258 в п.23.1 лекции 23). В доказательстве используются следующие понятия, которые нам тоже понадобятся.

Совокупность всех гиперболических треугольников Δ_k^l, $k = 0, 1, 2, \dots$, $l = 1, 2, \dots, 2k$, назовем для краткости *сетью*. Будем также называть *цепочкой* конечную упорядоченную последовательность гиперболических треугольников, в которой каждые два соседних треугольника имеют общую сторону и симметричны друг другу относительно нее. Очевидно, любые два треугольника сети можно соединить цепочкой.

1.2 Обратная функция к модулярной функции как аналитическая функция

Как следует из предыдущего пункта, модулярная функция μ голоморфна в единичном круге и принимает значения в области $D := \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$. Из построения ясно, что модулярная функция локально конформна в каждой точке единичного круга. Также из построения видно, что модулярная функция принимает каждое свое значение бесконечно много раз. Значит, в любой точке области D можно определить счетное число канонических элементов функции μ^{-1}. Их радиусы, вообще говоря, различны.

Утверждение 2. *Множество определенных выше канонических элементов представляет собой аналитическую функцию в области D.*

Доказательство. Мы должны проверить, что, во-первых, каждый из элементов нашего множества может быть продолжен по любому пути в области D, и, во-вторых, что каждый из элементов нашего множества можно получить из любого другого элемента продолжением по некоторому пути.

1. Пусть $a \in D$ и F_a^0 — какой-либо из элементов нашего множества в точке a. Если точка a не лежит на вещественной прямой, то значение $F_a^0(a) \in \mu^{-1}(a)$ лежит в одном из гиперболических треугольников сети. Если же точка a лежит на одном из интервалов и лучей $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; \infty)$, то значение $F_a^0(a) \in \mu^{-1}(a)$ лежит на общей стороне двух смежных треугольников сети, образующих гиперболический четырехугольник.

Пусть $\gamma : [0; 1] \to D$ — непрерывный путь и $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. Положим

$$d := \min\{dist(0, [\gamma]); \, dist(1, [\gamma])\}.$$

Очевидно, $d > 0$. В силу равномерной непрерывности функции γ на $[0; 1]$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $t', t'' \in [0; 1]$ таких, что $|t' - t''| < \delta$, выполнено неравенство $|\gamma(t') - \gamma(t'')| < d$. Разобьем отрезок $[0; 1]$ на отрезки длины, меньшей δ: $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$. Тогда каждый из отрезков пути $\gamma|_{[t_k; t_{k+1}]}$ может задевать только точки одного из интервалов и лучей $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; \infty)$ (или, возможно, $\gamma|_{[t_k; t_{k+1}]}$ вообще не попадает в точки вещественной прямой).

Пусть сначала $a \notin \mathbb{R}$. Рассмотрим гиперболический треугольник сети Δ^0, содержащий точку $F_a^0(a)$. Если отрезок пути $\gamma|_{[t_0; t_1]}$ не задевает вещественной прямой, то его носитель целиком лежит в той из полуплоскостей Π_+, Π_-, которая совпадает с образом $\mu(\Delta^0)$. Тогда мы продолжаем элемент голоморфной функции $(\mu|_{\Delta^0})^{-1}$ в этой полуплоскости вдоль пути, лежащего в ней, и такое продолжение, очевидно, существует. Если же отрезок пути $\gamma|_{[t_0; t_1]}$ проходит, к примеру, через точки интервала $(0; 1)$, то его носитель целиком лежит в объединении $\Pi_+ \cup (0; 1) \cup \Pi_-$. Пусть Δ^1 — гиперболический треугольник сети, симметричный треугольнику Δ^0 относительно той из сторон последнего, которая переводится функцией μ в интервал $(0; 1)$ (обозначим через λ открытую общую сторону треугольников Δ^0 и Δ^1). Тогда μ конформно отображает гиперболический четырехугольник $\Delta^0 \cup \lambda \cup \Delta_1$ на область $\Pi_+ \cup (0; 1) \cup \Pi_-$, и мы продолжаем элемент обратного конформного отображения $(\mu|_{\Delta^0 \cup L \cup \Delta_1})^{-1}$ вдоль пути, лежащего в его области определения.

Если же, например, $a \in (0; 1)$, то точка $F_a^0(a) \in \mu^{-1}(a)$ лежит на общей стороне двух смежных треугольников сети, образующих гиперболический четырехугольник $\square$. Образ отрезка пути $\gamma_{[t_0; t_1]}$ целиком лежит в области $\Pi_+ \cup (0; 1) \cup \Pi_-$ и μ конформно отображает гиперболический четырехугольник $\square$ на эту область. Поэтому мы должны продолжить элемент обратного конформного отображения $(\mu|_{\square})^{-1}$ вдоль пути, лежащего в его области определения.

Итак, мы продолжили элемент F_a^0 вдоль отрезка пути $\gamma_{[t_0;t_1]}$ и получили некоторый элемент F_1, который во всех случаях также представляет собой элемент нашего множества μ^{-1}. Рассуждая аналогично, мы сможем продолжить элемент F_1 вдоль отрезка пути $\gamma_{[t_1;t_2]}$ и получить элемент F_2, и так далее.

2. Пусть F_a и F_b — два элемента нашего множества в точках a и b области D. Если точки a и b не лежат на вещественной прямой, то найдутся такие гиперболические треугольники сети Δ^a и Δ^b, что $\alpha := F_a(a) \in \Delta^a$ и $\beta := F_b(b) \in \Delta^b$. Можно найти цепочку треугольников сети $\Delta^0 := \Delta^a$, $\Delta^1, \ldots, \Delta^n := \Delta^b$, соединяющую треугольники Δ^a и Δ^b. Пусть γ — ломаная, соединяющая точки α и β и такая, что каждое ее звено либо целиком лежит в одном из треугольников Δ^k, либо начинается в точке треугольника Δ^k, заканчивается в точке треугольника Δ^{k+1} и лежит в объединении этих двух треугольников и их общей стороны. Тогда продолжение элемента F_a вдоль пути $\mu \circ \gamma$ даст элемент F_b.

Если, к примеру, точка a лежит на вещественной прямой, мы можем продолжить элемент F_a вдоль какого-нибудь пути в D, ведущего из a в невещественную точку D, и применить приведенное выше рассуждение к результату этого продолжения.

$\square$

Замечание. Функции μ, построенные по разым исходным гиперболическим треугольникам ABC, отличаются друг от друга на автоморфизм единичного круга, переводящий вершины одного треугольника в вершины второго.

2 Малая теорема Пикара

Теорема (малая теорема Пикара для целых функций)**.** *Целая функция, отличная от постоянной, принимает все комплексные значения, кроме, быть может, одного.*

Доказательство. Пусть f — целая функция такая, что $f \neq a$ и $f \neq b$ для двух различных значений $a, b \in \mathbb{C}$. Пусть $g(z) := \dfrac{f(z)-a}{b-a}$. Тогда g — также целая функция, причем $g \neq 0$ и $g \neq 1$. Поэтому композиция $\mu^{-1} \circ g$ представляет собой корректно определенную аналитическую функцию в $\mathbb{C}$, причем все ее значения лежат в единичном круге. Поскольку плоскость односвязна, функция $\mu^{-1} \circ g$ целая. По теореме Лиувилля она обязана быть постоянной. Тогда g также постоянна, а значит, и f постоянна. $\square$

Замечание. Для доказательства малой теоремы Пикара нам достаточно было бы знать лишь, что какой-нибудь элемент обратной функции μ^{-1} продолжается вдоль всех путей в области $D = \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$.

Примером целой функции, не принимающей одно значение, может служить экспонента: $e^z \neq 0$ при всех $z \in \mathbb{C}$.

Следствие (малая теорема Пикара для мероморфных функций)**.** *Пусть F — непостоянная функция, мероморфная в $\mathbb{C}$. Тогда F принимает все значения из $\overline{\mathbb{C}}$, кроме, быть может, двух.*

Доказательство. Пусть F — мероморфная функция в $\mathbb{C}$ и пусть F не принимает трех различных значений $a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$. Если $c = \infty$, то F — целая функция, не принимающая значений $a, b \in \mathbb{C}$, и по малой теореме Пикара она постоянна. Если же $c \in \mathbb{C}$, то $G(z) := \dfrac{1}{F(z) - c}$ — целая функция, не принимающая значений $\dfrac{1}{a-c}$ и $\dfrac{1}{b-c}$, и опять по малой теореме Пикара G постоянна. Значит, F также постоянна. □

Замечание. Следующий пример показывает, что возможность аналитического продолжения элементов обратной функции μ^{-1} вдоль путей, лежащих в ее образе — нетривиальное свойство, не вытекающее из ее локальной конформности.

Пусть

$$f(z) = \int_0^z e^{\zeta^2} d\zeta$$

есть первообразная в $\mathbb{C}$ для целой функции e^{z^2}, равная нулю в нуле. Поскольку функция e^{z^2} четна, легко видеть, что функция $f(z)$ нечетна. По малой теореме Пикара функция f обязана принимать все комплексные значения, кроме, быть может, одного. Но если $a \neq 0$ и $f(z) \neq a$, то в силу нечетности $f(z) \neq -a$, что невозможно. Значение 0 функция f принимает в нуле. Значит, f принимает все комплексные значения.

Кроме того, $f'(z) = e^{z^2} \neq 0$ всюду. Значит, функция f локально конформна в каждой точке плоскости. При каждом $a \in \mathbb{C}$ в точке a определены элементы обратной функции f^{-1}. Однако если какой-либо из этих элементов продолжался по всем путям в $\mathbb{C}$, он задавал бы целую функцию φ. Поскольку $\varphi(f(z)) \equiv z$, функция f была бы взаимно однозначной, а значит, конформным автоморфизмом комплексной плоскости. Но все такие автоморфизмы линейны, а $f' \not\equiv const$ — противоречие.