Материалы к лекции №11, 30 апреля 2020 года

Напоминание. Часть доказательств утверждений, встречающихся в тексте, не приводится здесь и содержится в книге

[ДС] А.В.Домрин, А.Г.Сергеев. Лекции по комплексному анализу (части 1 и 2), Москва, МИАН, 2004 г.

Книга разделена на две части. Их электронные версии доступны по ссылкам:

`mi-ras.ru/books/pdf/ser1.pdf`

`mi-ras.ru/books/pdf/ser2.pdf`

Изложение материала в целом следует тексту этой книги.

1 Задача Дирихле для уравнения Лапласа

1.1 Постановка задачи. Единственность решения

Определение 1. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ —ограниченная область.* ***Задача Дирихле для уравнения Лапласа*** *в области D состоит в следующем. Пусть задана непрерывная функция $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$. Требуется найти непрерывную функцию $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$, которая гармонична в области D и совпадает с функцией φ всюду на ∂D.*

Утверждение 1. *В любой ограниченной области D и для любой функции $\varphi \in C(\partial D)$ задача Дирихле не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 — два решения задачи Дирихле для данной функции φ. Тогда разность $h := u_1 - u_2$ гармонична в области D, непрерывна в $\overline{D}$ и равна нулю всюду на ∂D. По принципу максимума для гармонических функций $\max\limits_{\overline{D}} h = 0$, а значит, $h \leqslant 0$ всюду в D. Однако функция $-h$ также гармонична в D и непрерывна в $\overline{D}$, и поэтому $\max\limits_{\overline{D}}(-h) = 0$, а тогда $-h \leqslant 0$ всюду в D, то есть $h \geqslant 0$. Значит, $h \equiv 0$ и $u_1 \equiv u_2$ в D. $\square$

Очевидно, какова бы ни была область D, существует много граничных функций $\varphi \in C(\partial D)$ таких, что задача Дирихле в D с функцией φ разрешима: например, в качестве φ можно взять ограничение на ∂D любой гармонической функции на всей плоскости. Существуют области, в которых задача Дирихле разрешима для *любой* граничной функции $\varphi \in C(\partial D)$ (например, как мы увидим далее, такой областью является любой круг). Однако в некоторых областях задача Дирихле разрешима не для любых граничных функций.

Пример. Пусть $D = \{0 < |z| < 1\}$ — единичный круг с выброшенным центром. Тогда $\overline{D}$ — замкнутый единичный круг и $\partial D = \{|z| = 1\} \cup \{0\}$. Можно показать, что не существует такой функции u, гармоничной в D и непрерывной в $\overline{D}$, что $u(z) \equiv 0$ при $|z| = 1$ и $u(0) = 1$.

1.2 Решение задачи Дирихле для круга

В случае, если область D — круг, решение задачи Дирихле для любой непрерывной граничной функции φ существует и задается явной формулой, а именно, формулой Пуассона, введенной в предыдущей лекции. Это показывает следующая теорема.

Теорема (о разрешимости задачи Дирихле в круге)**.** *Пусть $B_R := \{|z| < R\}$ — круг радиуса $R > 0$ с центром в нуле. Пусть φ — произвольная непрерывная функция на окружности $\{|z| = R\}$. Тогда функция $u(z)$, задаваемая в U_R формулой*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} \varphi(Re^{i\theta}) d\theta,$$

гармонична в B_R и непрерывно продолжается на $\overline{B}_R$. При этом ее продолжение совпадает с функцией φ на ∂B_R:

$$u(z) = \varphi(z) \text{ для всех } z \text{ таких, что } |z| = R.$$

Доказательство теоремы технически сложно и приведено в [ДС] в п.24.2 лекции 24.

Из приведенной теоремы можно несложно вывести формулу, выражающую значения голоморфной функции в круге через значения ее вещественной части на границе круга.

Следствие (формула Шварца)**.** *Пусть функция f голоморфна в круге $B_R := \{|z| < R\}$, а ее вещественная часть $u := \operatorname{Re} f$ непрерывно продолжается на замкнутый круг $\overline{B}_R = \{|z| \leqslant R\}$. Тогда для всех $z \in B_R$ верна формула Шварца:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} u(Re^{i\theta}) d\theta + i \operatorname{Im} f(0).$$

Доказательство. Обозначим

$$F(z) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} u(Re^{i\theta}) d\theta.$$

Функция F голоморфна в круге B_R по лемме о голоморфной зависимости интеграла от параметра, доказанной в первом семестре. Кроме того, $\operatorname{Re} F = u$ всюду в B_R вследствие формулы Пуассона (здесь мы пользуемся соотношением

$$\frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} = \operatorname{Re} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z},$$

которое уже использовалось в доказательстве теоремы о разрешимости задачи Дирихле в круге). Значит, $\operatorname{Re} F = \operatorname{Re} f$ всюду в круге B_R, а тогда голоморфная в B_R функция $F - f$ имеет нулевую вещественную часть и потому равна чисто мнимой константе: $F(z) - f(z) \equiv ic$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$.

Подставляя $z = 0$ в определение функции F, получаем:

$$F(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) d\theta = u(0)$$

в силу формулы Пуассона. Отсюда $F(0) = \operatorname{Re} f(0)$, а значит, $ic = F(0) - f(0) = \operatorname{Re} f(0) - f(0) = -i \operatorname{Im} f(0)$ и $f(z) = F(z) - ic = F(z) + i \operatorname{Im} f(0)$, что и требовалось.

$\square$

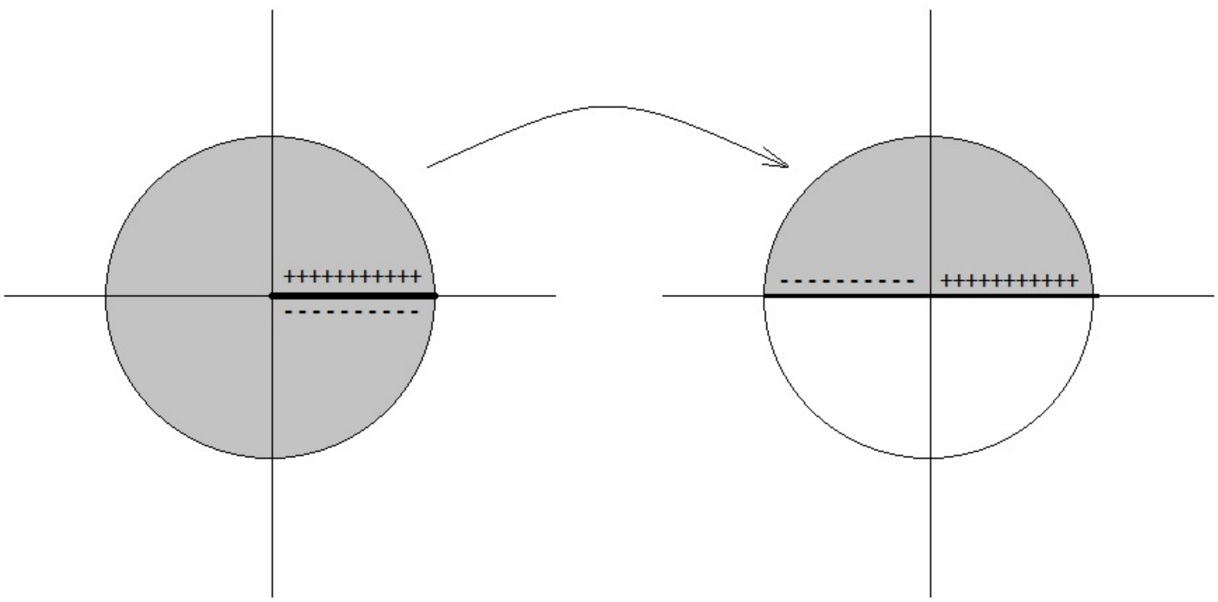
1.3 Решение задачи Дирихле для жордановой области

Пусть D — жорданова область, то есть область в $\mathbb{C}$, ограниченная одной замкнутой жордановой кривой. Тогда область D односвязна. Оказывается, решение задачи Дирихле в области D для всякой граничной функции $\varphi \in C(\partial D)$ существует. Более того, его можно выразить с помощью функции, конформно отображающей область D на единичный круг. Чтобы показать это, мы используем без доказательства следующую фундаментальную теорему.

Теорема (Каратеодори)**.** *Пусть D_1 и D_2 — области, каждая из которых ограничена конечным числом непересекающихся замкнутых жордановых кривых. Пусть функция f конформно отображает D_1 на D_2.*

Тогда функция f продолжается на замыкание $\overline{D}_1$ области D_1, причем это продолжение гомеоморфно отображает $\overline{D}_1$ на $\overline{D}_2$. (В частности, продолжение функции f гомеоморфно отображает ∂D_1 на ∂D_2.)

Замечание. Несложно привести пример, когда утверждение теоремы Каратеодори не выполняется. Пусть $D_1 = \{|z| < 1\} \setminus [0; 1)$ — единичный круг, разрезаннгый по оложительной полуоси, а $D_2 = \{|z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$ — верхняя половина единичного круга. Очевидно, функция $f(z) = \sqrt{z}$, $0 < \arg z < 2\pi$, конформно отображает D_1 на D_2. Однако эта функция не продолжается непрерывно на интервал $(0; 1)$, поскольку ее предельные значения сверху на этом интервале положительны, а предельные значения снизу отрицательны. (См. рис.)



Однако обратная функция $f^{-1}(w) = w^2$, очевидно, продолжается на отрезок $[-1; 1]$ и отображает его в отрезок $[0; 1]$, причем любая ненулевая точка последнего имеет два прообраза.

Утверждение 2 (разрешимость задачи Дирихле в жордановой области)**.** *Пусть D — жорданова область в $\mathbb{C}$. Тогда задача Дирихле в области D для любой граничной функции $\varphi \in C(\partial D)$ имеет решение.*

Доказательство. По теореме Римана о конформном отображении существует функция f, конформно отображающая область D на единичный круг U_1. По теореме Каратеодори функция f продолжается до гомеоморфизма замыкания $\overline{D}$ области D на замкнутый единичный круг $\overline{U}_1$ (это продолжение мы также будем обозначать буквой f). Функция $\varphi_0 := \varphi \circ f^{-1}$ непрерывна на единичной окружности ∂U_1. Тогда задача Дирихле в единичном круге для граничной функции φ_0 разрешима, то есть существует функция $u_0 \in C(\overline{U}_1)$, гармоническая в U_1 и такая, что $u_0 = \varphi_0$ на ∂U_1. (Более того, мы можем выписать для нее явное интегральное представление через значения функции φ_0.) Функция $u := u_0 \circ f$ и будет решением исходной задачи Дирихле в области D. Действительно, по свойству гармоничности композиции гармонической и голоморфной функций (см. предыдущую лекцию) функция u гармонична в D. Поскольку $u_0 \in C(\overline{U}_1)$ и $f \in C(\overline{D})$, функция u непрерывна в $\overline{D}$. Наконец, при любом $z \in \partial D$ точка $f(z)$ лежит на ∂U_1, и поэтому верно равенство

$$u(z) = u_0(f(z)) = \varphi_0(f(z)) = \varphi(f^{-1}(f(z)) = \varphi(z).$$

$\square$