Материалы к лекции №10, 23 апреля 2020 года

Напоминание. Часть доказательств утверждений, встречающихся в тексте, не приводится здесь и содержится в книге

[ДС] А.В.Домрин, А.Г.Сергеев. Лекции по комплексному анализу (части 1 и 2), Москва, МИАН, 2004 г.

Книга разделена на две части. Их электронные версии доступны по ссылкам:

`mi-ras.ru/books/pdf/ser1.pdf`

`mi-ras.ru/books/pdf/ser2.pdf`

Изложение материала в целом следует тексту этой книги.

1 Гармонические функции двух переменных

1.1 Определение гармонических функций в области на плоскости. Связь гармонических и голоморфных функций в области

Определение 1. *Вещественнозначная функция $u : D \to \mathbb{R}$ в области $D \subset \mathbb{C}$ называется* ***гармонической*** *в D, если $u \in C^2(D)$ и функция u удовлетворяет в D уравнению Лапласа:*

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

(Как обычно, здесь $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$.)

Гармонические и голоморфные функции в одной и той же области связаны следующим образом.

Утверждение 1. *1) Пусть D —область в $\mathbb{C}$ и функция f голоморфна в D. Тогда ее вещественная часть $u(z) := \operatorname{Re} f(z)$ гармонична в D.*

2) Пусть D — ***односвязная*** *область в $\mathbb{C}$ и пусть функция $u : D \to \mathbb{R}$ гармонична в D. Тогда существует такая голоморфная в D функция f, что $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ всюду в D.*

Доказательство утверждения 1 можно найти в [ДС] (предложение в п.24.1 лекции 24).

Замечание 1. Из пункта 1) утверждения 1 следует также, что и мнимая часть всякой голоморфной функции в области D тоже гармонична в D (поскольку $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Re}(if(z))$).

Замечание 2. Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — две голоморфные функции в области D с одинаковыми вещественными частями (то есть всюду в D выполнено равенство $\operatorname{Re} f_1(z) = \operatorname{Re} f_2(z)$), то $f_1(z) - f_2(z) \equiv c$, где c — чисто мнимая константа. Это легко получить из условий Коши–Римана. В частности, функция, существование которой утверждается в п.2) утверждения 1, единственна с точностью до аддитивной чисто мнимой константы.

Замечание 3. Односвязность области D важна для выполнения пункта 2) утверждения 1, как показывает следующий пример. Пусть $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $u(z) = \ln|z| = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$. Легко проверить, что функция $u(z)$ гармонична в D:

$$u_x = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad u_{xx} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$
$$u_y = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad u_{yy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Значит, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ в D.

Однако функция u не является вещественной частью никакой функции, голоморфной в D. В самом деле, предположим, что $f \in \mathcal{O}(D)$ и $u = \operatorname{Re} f$. Пусть $D_1 = \mathbb{C} \setminus [0; +\infty)$ — плоскость с разрезом по положительному лучу вещественной оси. Область D_1 односвязна и в ней легко найти голоморфную функцию f_0 такую, что $u = \operatorname{Re} f_0$ в D_1: это ветвь комплексного логарифма $\ln z$, $0 < \arg z < 2\pi$. В силу замечания 2 разность $f - f_0$ должна быть постоянной в D_1, то есть $f(z) \equiv f_0(z) + const$ в D_1. Однако легко видеть, что все функции вида $f_0(z) + const$ разрывны на положительном луче, а именно, их предельные значения снизу и сверху в точках этого луча различаются на $2\pi i$. (Вместо области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ в этом примере можно было бы взять любое концентрическое кольцо с центром в нуле.)

Упражнение. Покажите, что всякая гармоническая функция $u : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ имеет вид $u(z) = c \ln |z| + \operatorname{Re} f(z)$, где $c \in \mathbb{R}$ — константа, а f — голоморфная функция в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

1.2 Основные свойства гармонических функций

Приводимые ниже свойства гармонических функций в области на плоскости выводятся из утверждения 1. Доказательства приведены в [ДС] (свойства 24.1–24.6 в п.24.1 лекции 24).

Свойство 1 (бесконечная дифференцируемость). Если функция $f : D \to \mathbb{R}$ гармонична в области D, то $u \in C^\infty(D)$, причем все частные производные функции u также гармоничны в D.

Свойство 2 (теорема о среднем по окружности). Если функция $u(z)$ гармонична в круге $\{|z - z_0| < R\}$, то для всех $r \in (0; R)$ справедливо равенство

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|z-z_0|=r} u(z)|dz|.$$

Свойство 3 (теорема единственности). Если функции $u_1, u_2 : D \to \mathbb{R}$ гармоничны в области D и множество

$$E := \{z \in D \colon u_1(z) = u_2(z)\}$$

имеет хотя бы одну внутреннюю точку (иными словами, если функции u_1 и u_2 совпадают в целой окрестности хотя бы одной точки области), то $u_1 \equiv u_2$ в D.

Замечание. В отличие от голоморфных функций, различные гармонические функции могут совпадать на вещественно одномерных множествах (например, на гладких кривых). К примеру, функции $u_1(z) \equiv 0$ и $u_2(z) = x = \operatorname{Re} z$ гармоничны во всей плоскости и совпадают на всей мнимой оси.

Свойство 4 (принцип максимума).

1) Пусть функция $u : D \to \mathbb{R}$ гармонична в области D и имеет нестрогий локальный максимум в некоторой точке $z_0 \in D$ (то есть в некоторой окрестности $U_\varepsilon(z_0) = \{|z - z_0| < \varepsilon\}$ выполняется неравенство $u(z) \leqslant u(z_0)$). Тогда $u(z) \equiv const$ в области D.

2) Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}$, а функция $u : \bar{D} \to \mathbb{R}$ непрерывна в замыкании $\bar{D}$ области D и гармонична в D. Тогда

$$\max_{z \in \bar{D}} u(z) = \max_{z \in \partial D} u(z)$$

(иными словами, максимум функции u достигается на границе).

Свойство 5 (теорема Лиувилля). Если функция $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ гармонична во всей комплексной плоскости и ограничена сверху, то есть $u(z) \leqslant M$ для всех $z \in \mathbb{C}$, то $u \equiv const$.

Свойство 6 (композиция гармонической и голоморфной функции гармонична). Пусть функция u гармонична в области D, а функция φ голоморфна в области G и такова, что $\varphi(G) \subset D$. Тогда функция $u(\varphi(z))$ гармонична в области G.

Для доказательства свойства 6 нужно слегка модифицировать рассуждение из [ДС].

Замечание. Композиция голоморфной и гармонической функции не обязана быть гармоничной. Например, квадрат гармонической во всей плоскости функции $x = \operatorname{Re} z$ равен функции x^2, которая не гармонична ни в одной точке плоскости.

1.3 Формула Пуассона для функции, гармонической в круге и непрерывной в его замыкании

Утверждение 2 (формула Пуассона). *Пусть $U_R = \{|z| < R\}$. Предположим, что функция u определена и непрерывна в замкнутом круге $\bar{U}_R := \{|z| \leqslant R\}$ и гармонична в открытом круге U_R.*

Тогда значения функции u во внутренних точках круга однозначно выражаются через ее значения на его границе: для всех $z \in U_R$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} u(Re^{i\theta}) d\theta.$$

Доказательство утверждения 2 приведено в [ДС] в п.24.1 лекции 24.