Материалы к лекции №9, 16 апреля 2020 года

Напоминание. Часть доказательств утверждений, встречающихся в тексте, не приводится здесь и содержится в книге

[ДС] А.В.Домрин, А.Г.Сергеев. Лекции по комплексному анализу (части 1 и 2), Москва, МИАН, 2004 г.

Книга разделена на две части. Их электронные версии доступны по ссылкам:

`mi-ras.ru/books/pdf/ser1.pdf`

`mi-ras.ru/books/pdf/ser2.pdf`

Изложение материала в целом следует тексту этой книги.

1 Изолированные особые точки аналитических функций

1.1 Классификация изолированных особых точек

Определение 1. *Точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется **изолированной особой точкой** аналитической функции $\mathcal{F}$, если $\mathcal{F}$ является аналитической функцией в проколотой окрестности V точки a вида*

$$V = \{0 < |z - a| < \varepsilon\}$$

при $a \in \mathbb{C}$ и вида

$$V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \varepsilon\}$$

при $a = \infty$.

Изолированная особая точка a называется:

1. *изолированной особой точкой однозначного характера*, если $\mathcal{F}$ однозначна. В этом случае $\mathcal{F}$ есть голоморфная функция в V, и точка a может быть ее устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой.

2. *точкой ветвления порядка $n \in \mathbb{N}$*, если число листов $\mathcal{F}$ равно n.

3. *логарифмической точкой ветвления* или *точкой ветвления бесконечного порядка*, если число листов $\mathcal{F}$ бесконечно.

На практике бывает полезно следующее утверждение, позволяющее определить тип изолированной особой точки.

Утверждение 1. *Пусть V есть проколотая окрестность точки $a \in \mathbb{C}$ и $\mathcal{F}$ — аналитическая функция в V. Пусть $z_0 \in V$. Пусть F_0 — какой-нибудь элемент $\mathcal{F}$ в точке z_0. Пусть γ_0 — это путь, обходящий против часовой стрелки окружность с центром a, на которой лежит точка z_0, и начинающийся и кончающийся в точке z_0:*

$$\gamma(t) := a + (z_0 - a)e^{2\pi i t}, \quad t \in [0; 1].$$

Пусть F_1 — результат продолжения элемента F_0 вдоль пути γ_0 и F_n при $n \in \mathbb{N}$ — результат продолжения элемента F_0 вдоль пути $\gamma_0^n = \underbrace{\gamma_0 \cup \gamma_0 \cup \dots \cup \gamma_0}_{n \text{ раз}}$.

Если $F_1 = F_0$, то аналитическая функция $\mathcal{F}$ однозначна и точка a — изолированная особая точка однозначного характера.

Если $F_1 \neq F_0$, но $F_n = F_0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, причем $F_k \neq F_0$ при $k = 1, \ldots, n-1$, то a — точка ветвления порядка n.

Если же $F_n \neq F_0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то a — логарифмическая точка ветвления.

Для доказательства утверждения 1 используем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть в условиях утверждения 1 $\gamma : [0;1] \to V$ — замкнутый путь, $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$. Тогда найдется такое целое число n, что путь γ гомотопен в V пути γ_0^n (здесь и далее $\gamma_0^n := \underbrace{\gamma_0 \cup \gamma_0 \cup \cdots \cup \gamma_0}_{n \text{ раз}}$ при $n \geqslant 0$ и $\gamma_0^n := \underbrace{\gamma_0^{-1} \cup \gamma_0^{-1} \cup \cdots \cup \gamma_0^{-1}}_{|n| \text{ раз}}$ при $n < 0$).*

Доказательство леммы можно найти в [ДС] (лемма 11.1 в лекции 11, часть «Существование n»).

Доказательство утверждения 1. Очевидно, результат продолжения элемента F_1 вдоль пути γ_0^{-1} равен F_0. Если $F_1{=}F_0$, то результат продолжения элемента F_0 вдоль пути γ_0^{-1} также равен F_0. Тогда продолжение элемента F_0 вдоль любого пути вида γ_0^n, $n \in \mathbb{Z}$, дает F_0. Значит, согласно лемме продолжение F_0 вдоль любого замкнутого пути в V дает снова F_0. Поскольку любой элемент аналитической функции $\mathcal{F}$ должен получаться из F_0 продолжением вдоль некоторого пути, в точке z_0 она имеет ровно один элемент, а значит, она имеет ровно один элемент и в любой другой точке области и потому однозначна.

Пусть $F_N = F_0$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$, причем $F_k \neq F_0$ при $k = 1, \ldots, N-1$. Сохраним обозначение F_n для результата продолжения элемента F_0 вдоль пути γ_0^n также при $n < 0$. Тогда, продолжая вдоль пути γ_0^{-1}, мы последовательно получим: $F_{-1} = F_{N-1}$, $F_{-2} = F_{N-2}$ и т.д. Тогда для всякого целого n вида $n = kN + m$, $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \{0, \ldots, N-1\}$ получим $F_n = F_m$. Значит, все результаты продолжения элемента F_0 по всем путям вида γ_0^n, $n \in Z$,— это элементы F_0, F_1, ..., F_{N-1} и только они. Тогда в силу леммы все элементы аналитической функции $\mathcal{F}$ в точке z_0 — это эти же N элементов. С другой стороны, все эти N элементов различны: если $0 \leqslant k < l \leqslant N-1$ и $F_k = F_l$, то, продолжая по пути γ_0^{-1}, мы получим $F_{k-1} = F_{l-1}$, $F_{k-2} = F_{l-2}$ и т.д., а значит, $F_{l-k} = F_0$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, функция $\mathcal{F}$ в этом случае n-листна, а точка a — точка ветвления порядка n.

Если, наконец, $F_n \neq F_0$ при всех $n \in N$, то все элементы F_n для разных $n \in \mathbb{N}$ различны. В самом деле, если $F_k = F_l$, при некоторых $k < l$, $k, l \in \mathbb{N}$, то, опять продолжая по пути γ_0^{-1}, мы получим $F_{k-1} = F_{l-1}$, $F_{k-2} = F_{l-2}$ и т.д., а значит, $F_{l-k} = F_0$, что противоречит нашему предположению. Значит, в этом случае аналитическая функция $\mathcal{F}$ бесконечнолистна, а точка a — логарифмическая точка ветвления. □

Замечание 1. В случае, когда a — логарифмическая точка ветвления, легко показать, что все элементы F_n для всех *целых* n различны и исчерпывают всевозможные элементы функции $\mathcal{F}$ в точке z_0.

Замечание 2. Утверждение, аналогичное утверждению 1, верно и для случая изолированной особой точки ∞. Его доказательство повторяет доказательство утверждения для случая конечной особой точки.

Замечание 3. Из утверждения 1 следует, что если $\mathcal{F}$ — аналитическая функция в проколотой окрестности V точки $a \in \overline{\mathbb{C}}$ и $V' \subset V$ — меньшая проколотая окрестность точки a, то ограничение $\mathcal{F}|_{V'}$ — также одна аналитическая функция с точкой ветвления того же типа, что и $\mathcal{F}$. Действительно, точку z_0 в формулировке утверждения можно брать в V'.

Предположим теперь, что D — область в C, для которой точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — изолированная точка границы (иными словами, область D содержит некоторую проколотую окрестность точки a). Когда говорят об описании типа точки a для функции $\mathcal{F}$, это означает, что нужно рассмотреть ограничение функции $\mathcal{F}$ на любую проколотую окрестность точки a, лежащую в D. Вообще говоря, это ограничение может распасться на несколько аналитических функций в этой проколотой окрестности. Для каждой из них теперь следует изучить тип особой точки a. Из замечания 3 следует, что эти типы не зависят от выбора проколотой окрестности.

Типичным примером функции, имеющей точку ветвления порядка $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, является функция $\sqrt[n]{z}$ в любой проколотой окрестности нуля. В любой проколотой окрестности точки ∞ эта функция также имеет точку ветвления порядка n.

Типичным примером функции, имеющей логарифмическую точку ветвления, может служить функция $\operatorname{Ln} z$ в любой проколотой окрестности нуля (в любой проколотой окрестности бесконечности она также имеет логарифмическую точку ветвления).

Замечание 4. В доказательстве утверждения 1 мы нигде не использовали, что пути γ_0^n и γ_0^m при $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$ не гомотопны друг другу. Лемма 11.1 в лекции 11 в [ДС] содержит это утверждение, но его доказательство опирается на технически сложную теорему о равенстве интегралов голоморфной функции по гомотопным путям, которую мы не доказывали. Можно показать, что если для некоторой проколотой окрестности $V = \{0 < |z - a| < \varepsilon\}$, некоторой точки $z_0 \in V$ и некоторых различных целых чисел m и n пути γ_0^n и γ_0^m были бы гомотопны друг другу в V, то в V не существовало бы ни одной бесконечнолистной функции. Однако такие функции существуют, например $\operatorname{Ln}(z - a)$.

Несложно увидеть, что если в обозначениях утверждения 1 элемент $F_0 = (U_0, f_0)$ — какой-нибудь элемент функции $\operatorname{Ln}(z - a)$ в точке z_0, то $F_n = (U_0, f_0 + 2\pi i n)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Значит, все элементы F_n для разных целых чисел n различны, и потому все пути вида γ_0^n при разных целых n не гомотопны друг другу.

1.2 Ряды Пюизó

Утверждение 2. *Пусть $\mathcal{F}$ есть аналитическая функция в проколотой окрестности $V = \{0 < |z - a| < \varepsilon\}$ точки $a \in \mathbb{C}$, имеющая a точкой ветвления порядка $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через*

$$v := \{\zeta \in \mathbb{C} \colon 0 < |\zeta| < \varepsilon^{1/n}\}$$

проколотую окрестность нуля в плоскости переменного ζ и рассмотрим голоморфное отображение $\pi : v \to V$, задаваемое формулой $\pi(\zeta) = a + \zeta^n$.

Тогда композиция $\mathcal{F} \circ \pi$ распадается на n различных голоморфных функций в области v. Если обозначить любую из этих функций через $\Phi = \Phi_0$, то остальные функции Φ_j, $j = 1, \ldots, n-1$, получаются из нее заменой переменных по формуле

$$\Phi_j(\zeta) = \Phi\left(e^{\frac{2\pi i j}{n}}\zeta\right).$$

При этом сама аналитическая функция $\mathcal{F}$ восстанавливается по функции Φ по формуле $\mathcal{F} = \Phi \circ \pi^{-1}$.

Доказательство утверждения 2 можно найти в [ДС] (предложение в п.11.8 лекции 11).

Утверждение 2 можно интерпретировать так, что в некотором смысле все точки ветвления конечного порядка n сводятся к корням n-й степени.

Следствие утверждения 2. Пусть функция Φ разложена в ряд Лорана в v:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \zeta^k.$$

Формально подставив $\zeta = \pi^{-1}(z) = \sqrt[n]{z-a}$, мы получим *разложение функции $\mathcal{F}$ в ряд Пюизо*:

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^{k/n}.$$

Однако важно понимать, что по сути это другая запись соотношения $\mathcal{F} = \Phi \circ \pi^{-1}$. Говоря неформально, выбор ветвей во всех слагаемых правой части должен быть правильно согласован друг с другом.

2 Обращение голоморфной функции в окрестности критического значения

Пусть f — голоморфная функция в окрестности $U_\delta(a) := \{|z-a| < \delta\}$ точки $a \in \mathbb{C}$. Ранее мы установили, что функция f является локально однолистной в точке a тогда и только тогда, когда $f'(a) \neq 0$. В этом случае функция f локально обратима в окрестности точки $b := f(a)$, то есть существует такая голоморфная функция $g(w)$ в некоторой окрестности $U_\varepsilon(b) := \{|w-b| < \varepsilon\}$ точки b, что $g(U_\varepsilon(b)) \subset U_\delta(a)$ и $f(g(w)) = w$ всюду в $U_\varepsilon(b)$. Также для некоторой окрестности $U_{\delta'}(a) := \{|z-a| < \delta'\}$ точки a (возможно, $\delta' < \delta$) выполнены соотношения $f(U_{\delta'}(a)) \subset U_\varepsilon(b)$ и $g(f(z)) = z$ для всех $z \in U_{\delta'}(a)$.

Что происходит, если a — критическая точка функции f, то есть $f'(a) = 0$?

Утверждение 3. *Пусть f — непостоянная голоморфная функция в окрестности $U_\delta(a) := \{|z-a| < \delta\}$ точки $a \in \mathbb{C}$ и пусть $f'(a) = 0$. Обозначим $b := f(a)$. Пусть точка $z = a$ — нуль порядка $n \in \mathbb{N}$ функции $f(z) - b$.*

Тогда существуют проколотая окрестность $U_\varepsilon^\circ(b) := \{0 < |w-b| < \varepsilon\}$ точки b и n-листная аналитическая функция $\mathcal{G}$ в $U_\varepsilon^\circ(b)$ такие, что все значения всех элементов $\mathcal{G}$ в точках $U_\varepsilon^\circ(b)$ лежат в $U_\delta(a)$ и $f \circ \mathcal{G}(w) = w$.

Доказательство. В силу теоремы о разложении голоморфной функции в окрестности ее нуля мы можем выбрать окрестность $U_{\delta_1}(a) := \{|z-a| < \delta\}$, $0 < \delta_1 \leqslant \delta$ так, что $f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$, где $\varphi \in \mathcal{O}(U_{\delta_1}(a))$ и $\varphi \neq 0$ всюду в $U_{\delta_1}(a)$. Композиция $\sqrt[n]{\varphi(z)}$ корректно определена в $U_{\delta_1}(a)$ и в силу односвязности круга $U_{\delta_1}(a)$ распадается в нем на n голоморфных ветвей. Пусть $\psi(z)$ — одна из этих ветвей. Тогда $f(z) - b = ((z-a)\psi(z))^n$ всюду в $U_{\delta_1}(a)$.

Обозначим $h(z) := (z-a)\psi(z)$. Тогда $h(a) = 0$ и $h'(a) = \psi(a) \neq 0$. Значит, функция h локально однолистна и локально обратима в точке a. В частности, существуют такое число $\varepsilon_0 > 0$ и такая функция $g(w)$ в окрестности нуля вида $U_{\varepsilon_0}(0) := \{|w| < \varepsilon_0\}$, что $h(g(w)) = w$ для всех $w \in U_{\varepsilon_0}(0)$.

Обозначим $\varepsilon := \varepsilon_0^n$ и положим $\mathcal{G}(w) := g \circ \sqrt[n]{w-b}$ в проколотой окрестности

$$U_\varepsilon^\circ(b) := \{0 < |w-b| < \varepsilon\}.$$

Поскольку все значения аналитической функции $\sqrt[n]{w-b}$ в $U_\varepsilon^\circ(b)$ попадают в окрестность $U_{\varepsilon_0}(0)$, композиция определена корректно, причем как единая аналитическая функция, потому что g

голоморфна (см. замечание после определения композиции аналитических функций в материалах прошлой лекции). Все значения $\mathcal{G}$ попадают в окрестность $U_{\delta_1}(a)$. Кроме того, поскольку функция g локально однолистна в нуле, то $\mathcal{G}$ n-листна (как и $\sqrt[n]{w-b}$). Наконец, если $w_0 \in U_\varepsilon^\circ(b)$ и z_0 — любое из значений аналитической функции $\mathcal{G}$ в точке w_0, то $z_0 = g(\zeta_0)$ для некоторой точки $\zeta_0 \in U_{\varepsilon_0}(0)$ такой, что $\zeta_0^n = w_0 - b$, и тогда

$$f(z_0) = b + (h(z_0))^n = b + (h(g(\zeta_0))^n = b + \zeta_0^n = b + w_0 - b = w_0.$$

Поэтому действительно $f \circ \mathcal{G}(w) = w$. $\square$

Говоря неформально, уравнение $f(z) = w$, которое мы должны решить, можно переписать в виде:

$$f(z) - b = w - b \Leftrightarrow ((z-a)\psi(z))^n = w - b \Leftrightarrow (h(z))^n = w - b,$$

где функция h локально обратима в окрестности точки a и $h(a) = 0$.