Материалы к лекции №8, 9 апреля 2020 года

Напоминание. Часть доказательств утверждений, встречающихся в тексте, не приводится здесь и содержится в книге

[ДС] А.В.Домрин, А.Г.Сергеев. Лекции по комплексному анализу (части 1 и 2), Москва, МИАН, 2004 г.

Книга разделена на две части. Их электронные версии доступны по ссылкам:

`mi-ras.ru/books/pdf/ser1.pdf`

`mi-ras.ru/books/pdf/ser2.pdf`

Изложение материала в целом следует тексту этой книги.

1 Аналитические функции

1.1 Определения аналитической функции в области

Определение 1. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область и $F_0 = (U_0, f_0)$ — канонический элемент с центром в точке $a \in \mathbb{D}$, допускающий аналитическое продолжение вдоль любого пути γ в области D с началом в точке a. Множество $\mathcal{F}$ канонических элементов, получаемых продолжением элемента F_0 вдоль всех таких путей, называется* ***(многозначной) аналитической функцией*** *в области D, порожденной элементом F_0.*

Замечание. Пусть канонический элемент F_0 порождает аналитическую функцию в области D в смысле данного выше определения. Пусть элемент F_1 — результат продолжения F_0 по какому-нибудь пути γ, лежащему в D и ведущему из точки a в точку $b \in D$. Тогда элемент F_1 продолжается по всем путям, выходящим из точки b и лежащим в D, а порожденная им аналитическая функция в D совпадает с аналитической функцией в D, порожденной F_0 (как множество элементов). Действительно, продолжение элемента F_1 по пути $\tilde{\gamma}$, выходящему из точки b, — это то же самое, что продолжение элемента F_0 по пути $\gamma \cup \tilde{\gamma}$. С другой стороны, элемент F_0 есть результат продолжения элемента F_1 вдоль пути γ^{-1}, поэтому всякий элемент, который можно получить из F_0 продолжением по пути, лежащему в D, можно получить и из F_1.

Иными словами, не имеет значения, какой элемент из множества, являющегося аналитической функцией в D, выбирать в качестве начального.

Можно дать определение аналитической функции в области D, не опирающееся на выбор какого-либо начального элемента.

Определение 2. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область.* ***Аналитическая функция в области*** *D — это непустое множество $\mathcal{F}$ канонических элементов с центрами только в точках D со следующими свойствами:*

- *любой элемент $F \in \mathcal{F}$ можно продолжить по любому пути из его центра, лежащему в D;*
- *любой элемент $F_1 \in \mathcal{F}$ можно получить из любого другого элемента $F_2 \in \mathcal{F}$ продолжением по какому-нибудь пути, лежащему в $\mathcal{F}$ (и идущему из центра элемента F_2 в центр элемента F_1).*

1.2 Голоморфная функция в области как аналитическая

Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и пусть f — голоморфная функция в D. Определим в каждой точке $a \in D$ канонический элемент f_a: его радиусом будет радиус сходимости ряда Тейлора функции f к окрестности точки a, а функцией — сумма этого ряда Тейлора. Несложно проверить, что множество

$$\mathcal{F} := \{f_a \colon a \in D\}$$

представляет собой аналитическую функцию: продолжение любого элемента f_a вдоль пути $\gamma : [0;1] \to D$ с началом $\gamma(0) = a$ имеет вид $F_t := f_{\gamma(t)}$, $t \in [0;1]$. В дальнейшем мы будем отождествлять такую аналитическую функцию $\mathcal{F}$ с голоморфной функцией f.

Голоморфная функция в области D, рассматриваемая как аналитическая, имеет в каждой точке области только один элемент. Верно и обратное: если аналитическая функция в области D имеет в каждой точке области ровно один элемент, то она совпадает с некоторой голоморфной функцией в области D. Действительно, пусть $\mathcal{F}$ — аналитическая функция в D, имеющая в каждой точке $a \in D$ только один элемент F_a. Определим функцию $f : D \to \mathbb{C}$ формулой $f(a) := F_a(a)$.

Покажем, что функция f голоморфна в D. Пусть $z_0 \in D$ и пусть $F_{z_0} = (U_0, f_0)$. Из свойства Вейерштрасса непосредственного аналитического продолжения (если элемент (U_2, f_2) — НАП элемента (U_1, f_1) и центр круга U_2 лежит в круге U_1, то круг U_2 есть круг сходимости ряда Тейлора функции f_1 в центре круга U_2, а функция f_2 — сумма этого ряда) ясно, что если точка $z \in U_0$, то элемент F_{z_0} можно продолжить по любому пути в U_0, соединяющему z_0 и z (например, по отрезку $[z_0; z]$), а результат этого продолжения опять сводится к разложению функции f_0 в ряд Тейлора в точке z. Поэтому в любой точке $z \in U_0 \cap D$ получаем $f(z) = f_0(z)$. Значит, функция f голоморфна в точке z_0. Поскольку $z_0 \in D$ произвольна, функция f голоморфна во всей области D. Из приведенного рассуждения также несложно увидеть, что аналитическая функция $\mathcal{F}$ порождается функцией f.

Из теоремы о монодромии тривиально следует, что *любая аналитичсекая функция в односвязной области является голоморфной функцией.*

1.3 Число элементов аналитической функции в точке

Из определения аналитической функции в области D следует, что в каждой точке области имеется хотя бы один элемент аналитической функции (поскольку существуют пути, кончающиеся в этой точке). Как установлено в предыдущем пункте, функции, имеющие только один элемент в каждой точке области — это в точности голоморфные функции в этой области.

Утверждение 1. *Пусть $\mathcal{F}$ — аналитическая функция в области D. Тогда число различных элементов функции $\mathcal{F}$ с центрами в данной точке области (конечное или бесконечность) одинаковое для всех точек области.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}_{z_0}$ и $\mathcal{F}_{z_1}$ — множества элементов аналитической функции $\mathcal{F}$ в точках z_0 и z_1 соответственно. Между этими множествами можно установить биекцию. Зафиксируем какой-нибудь путь γ из точки z_0 в точку z_1, лежащий в D, и построим отображение $\Gamma : \mathcal{F}_{z_0} \to \mathcal{F}_{z_1}$, которое переводит любой элемент $F_0 \in \mathcal{F}_{z_0}$ в результат продолжения F_0 по пути γ.

Отображение Γ обратимо (с обеих сторон), потому что Γ^{-1} — это просто продолжение по пути γ^{-1}. Поэтому Γ и сюръективно, и инъективно, то есть взаимно однозначно. □

Теорема (Пуанкаре–Вольтерра). *Множество элементов аналитической функции в данной точке не более чем счетно.*

Идея доказательства. Пусть $\mathcal{F}$ — аналитическая функция в области D и $z_0 \in D$. Зафиксируем элемент $F_0 \in \mathcal{F}$ с центром z_0. Пусть $z_1 \in D$ — любая другая точка области D.

Для любого пути γ из z_0 в z_1, лежащего в D, существует путь $\tilde{\gamma}$, который гомотопен γ *в области* D (то есть все пути семейства гомотопии тоже лежат в D) и представляет собой ломаную, все вершины которой, кроме z_0 и z_1, попадают в точки с рациональными вещественной и мнимой частью. По теореме о продолжении по гомотопным путям результаты продолжения элемента F_0 по путям γ и $\tilde{\gamma}$ совпадают. Поэтому различных элементов $\mathcal{F}$ в точке z_1 не больше, чем таких ломаных с вершинами с рациональными вещественной и мнимой частью (кроме концов), лежащих в D и соединяющих z_0 с z_1. А количество таких ломаных, как несложно понять, счетно.

□

Из доказанного выше утверждения и теоремы Пуанкаре–Вольтерра следует, что число элементов данной аналитической функции в области либо бесконечно в каждой точке области (и множество таких элементов счетно), либо конечно и одинаково во всех точках области. Это число называют *числом листов* аналитической функции в области. Говорят об однозначной, двузначной, трехзначной, бесконечнозначной функции или же двулистной. трехлистной, бесконечнолистной. (Слово «однолистный», как мы помним, используется в другом смысле.)

1.4 Примеры: аналитические функции $\sqrt{z}$ и $\operatorname{Ln} z$ в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Примеры разобраны в [ДС] (пункты 11.2 и 11.3 лекции 11).

1.5 Действия над аналитическими функциями

1. Сумма аналитических функций. Пусть $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ — две аналитические функции в одной и той же области D. Их *сумма* определяется как множество попарных сумм элементов функции $\mathcal{F}$ и функции $\mathcal{G}$ с центрами в одной и той же точке:

$$\mathcal{F} + \mathcal{G} := \{canon(F_a + G_a),\ F_a \in \mathcal{F}_a, G_a \in \mathcal{G}_a, a \in D\}.$$

Здесь $canon(F_a + G_a)$ означает канонический элемент, определяемый суммой элементов F_a и G_a, то есть канонический элемент, соответствующий элементу, круг которого есть пересечение кругов элементов F_a и G_a, а функция — сумма функций этих элементов. Радиус элемента $canon(F_a + G_a)$ не меньше, чем минимум радиусов элементов F_a и G_a, но может быть и больше (подумайте, почему). Любой элемент вида $canon(F_a + G_a)$ можно продолжить по любому пути, выходящему из точки a и лежащему в D: пусть $\gamma : [0;1] \to D$ и $\gamma(0) = a$ и F_t, G_t, $t \in [0;1]$ — продолжения элементов F_a и G_a вдоль пути γ, тогда продолжение элемента $canon(F_a + G_a)$ определяется попарными суммами: $canon(F_t + G_t)$, $t \in [0;1]$. Однако, вообще говоря, не любой элемент $canon(F_b + G_b)$, где F_b и G_b — элементы функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ в точке $b \in D$ соответственно, может получиться из элемента $canon(F_a + G_a)$ продолжением по какому-либо пути в D. Поэтому сумма $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ — вообще говоря, объединение нескольких разных аналитических функций в области D (очевидно, не более чем счетное).

2. Произведение аналитических функций. Пусть $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ — две аналитические функции в одной и той же области D. Их *произведение* определяется (аналогично сумме) как множество попарных произведений элементов функции $\mathcal{F}$ и функции $\mathcal{G}$ с центрами в одной и той же точке:

$$\mathcal{F}\mathcal{G} := \{canon(F_a G_a),\ F_a \in \mathcal{F}_a, G_a \in \mathcal{G}_a, a \in D\}.$$

Так же, как в случае суммы, можно показать, что любой элемент вида $canon(F_a G_a)$ можно продолжить по любому пути, выходящему из точки a и лежащему в D. Но, как и сумма $\mathcal{F}+\mathcal{G}$, произведение $\mathcal{F}\mathcal{G}$ — вообще говоря, не более чем счетное объединение нескольких разных аналитических функций в области D.

3. Производная аналитической функции. Пусть $\mathcal{F}$ — аналитическая функция в области D. Ее *производной* называется множество производных от элементов аналитической функции $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}' := \{F'_a : \ F_a \in \mathcal{F}_a, a \in D\}.$$

Здесь для канонического элемента $F_a = (U, f)$ мы полагаем $F'_a := (U, f')$. Поскольку радиус сходимости ряда Тейлора для производной от голоморфной функции в круге такой же, как и для самой функции, элементы F'_a также канонические. Производная аналитической функции в D — *одна* аналитическая функция в D.

Действительно, любой элемент F'_a можно продолжить по любому пути, выходящему из точки a и лежащему в D: если $\gamma : [0;1] \to D$ и $\gamma(0) = a$, а F_t — продолжение элемента F_a вдоль пути γ, то F'_t — продолжение элемента F'_a вдоль того же пути. С другой стороны, если элемент F_b функции $\mathcal{F}$ в точке b получается из элемента F_a в точке a продолжением вдоль пути γ, лежащего в D, то элемент F'_b получается из элемента F'_a продолжением по тому же пути.

Число листов $\mathcal{F}'$ не больше числа листов $\mathcal{F}$, но может быть и меньше.

Пример: $(\operatorname{Ln} z)' = \dfrac{1}{z}$.

4. Композиция аналитических функций

Предположим, что $\mathcal{F}$ — аналитическая функции в области D, причем *все значения всех элементов F в точках области D лежат в области D_1*. Пусть $\mathcal{G}$ — аналитическая функции в области D_1. Тогда *композиция* аналитических функций $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$ определяется как множество композиций таких пар элементов $\mathcal{G}$ и элементов $\mathcal{F}$, что центр элемента $\mathcal{G}$ есть значение функции элемента $\mathcal{F}$ в его центре:

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \mathcal{G}(\mathcal{F}) := \{canon(G_b \circ F_a), \ F_a = (U_a, f_a) \in \mathcal{F}_a, b = f_a(a), G_b \in \mathcal{G}_b; a \in D\}.$$

Более точно, элемент $canon(G_b \circ F_a)$ определяется следующим образом. Пусть $G_b = (\tilde{U}_b, g_b)$. Функция f_a голоморфна в круге U_a с центром a и $f_a(a) = b$. Поэтому (в силу непрерывности f_a) существует такое число $\delta > 0$, не большее радиуса круга U_a, что при $|z-a| < \delta$ верно условие $f_a(z) \in \tilde{U}_b$. Тогда композиция $g_b(f_a(z))$ определена и голоморфна в круге $\{|z-a| < \delta\}$. Разлагая ее в ряд Тейлора в точке a и рассматривая его круг сходимости и его сумму в этом круге, получаем элемент $canon(G_b \circ F_a)$.

Каждый элемент вида $canon(G_b \circ F_a)$ можно продолжить по любому пути $\gamma : [0;1] \to D$, выходящему из точки a. В самом деле, пусть $F_t = (U_t, f_t)$ — продолжение элемента F_a вдоль пути γ. Тогда путь $\tilde{\gamma}(t) := f_t(t) : [0;1] \to \mathbb{C}$ лежит в области D_1 и выходит из точки $\tilde{\gamma}(0) = f_a(a) = b$. Значит, элемент G_b можно продолжить вдоль пути $\tilde{\gamma}$. Обозначим это продолжение через G_t. Тогда продолжение элемента вида $canon(G_b \circ F_a)$ вдоль пути γ задается формулой $canon(G_t \circ F_t)$.

Как и сумма и произведение, композиция аналитических функций представляет собой, вообще говоря, не более чем счетное объединение аналитичсеких функций в области D.

Замечание. Если в качестве функции $\mathcal{G}$ выбирается обычная голоморфная функция g в области D_1, то композиция $g \circ \mathcal{F}$ представляет собой единую аналитическую функцию в области D. В самом деле, в этом случае любой элемент композиции $g \circ \mathcal{F}$ имеет вид $canon(g \circ F)$, где $F \in \mathcal{F}$. Если элемент $F_b \in \mathcal{F}$ получается из элемента $F_a \in \mathcal{F}$ продолжением вдоль некоторого пути в области D из точки a в точку b, то и элемент $canon(g \circ F_b)$ получается из элемента $canon(g \circ F_a)$ продолжением вдоль того же пути γ.

5. Ограничение аналитической функции на подобласть.

Пусть $\mathcal{F}$ — аналитическая функция в области D и пусть $\tilde{D}$ — меньшая область: $\tilde{D} \subset D$. Тогда *ограничение аналитической функции $\mathcal{F}$ на область $\tilde{D}$* состоит из всех элементов аналитической функции $\mathcal{F}$ с центрами в точках области $\tilde{D}$:

$$\mathcal{F}|_{\tilde{D}} := \{F_a : F_a \in \mathcal{F}_a, a \in \tilde{D}\}.$$

Очевидно, любой элемент ограничения $\mathcal{F}|_{\tilde{D}}$, будучи также элементом исходной аналитической функции $\mathcal{F}$, продолжается вдоль любого пути в $\tilde{D}$ (и даже вдоль любого пути в D). Однако если элемент F_b получается из элемента F_a продолжением вдоль некоторого пути, лежащего в области D, то не обязательно найдется путь с тем же свойством, лежащий в меньшей области $\tilde{D}$. Поэтому ограничение $\mathcal{F}|_{\tilde{D}}$ представляет собой, вообще говоря, не более чем счетное объединение аналитических функций в подобласти $\tilde{D}$.

Если какая-то из функций, составляющих ограничение $\mathcal{F}|_{\tilde{D}}$, однозначна (то есть является голоморфной функцией в области $\tilde{D}$), мы будем называть ее *голоморфной ветвью* аналитической функции $\mathcal{F}$ в области $\tilde{D}$.

В частности, если область $\tilde{D}$ односвязна, то, как мы знаем, все аналитические функции в ней голоморфны. Поэтому ограничение аналитической функции на односвязную подобласть всегда распадается на голоморфные ветви (их количество равно числу листов исходной аналитической функции).

Упражнение. Пусть $\mathcal{F}$ — аналитическая функция $e^{z \operatorname{Ln} z}$ в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Покажите, что число листов $\mathcal{F}$ бесконечно, однако количество различных значений, принимаемых функцией $\mathcal{F}$ в рациональной точке вида $z = \dfrac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ и m и n взаимно просты, равно n.