Материалы к лекции №7, 26 марта 2020 года

**Напоминание**. Часть доказательств утверждений, встречающихся в тексте, не приводится здесь и содержится в книге

[ДС] А.В.Домрин, А.Г.Сергеев. Лекции по комплексному анализу (части 1 и 2), Москва, МИАН, 2004 г.

Книга разделена на две части. Их электронные версии доступны по ссылкам:

`mi-ras.ru/books/pdf/ser1.pdf`

`mi-ras.ru/books/pdf/ser2.pdf`

Изложение материала в целом следует тексту этой книги.

# 1 Аналитическое продолжение приводит к многозначности

Пусть функция $f$ голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}$, а $G$ — бóльшая область: $D \subset G$. Иногда функцию $f$ можно аналитически продолжить в область $G$, то есть существует такая функция $F \in \mathcal{O}(G)$, что $F|_D \equiv f$.

Пример, который мы рассматривали в прошлом семестре: гамма-функция определяется в правой полуплоскости $D := \{\operatorname{Re} z > 0\}$ интегральной формулой, но продолжается в область $G := \mathbb{C} \setminus \{0; -1; -2; \dots\}$.

По теореме единственности для голоморфных функций функция $F \in \mathcal{O}(G)$ определяется однозначно. Бывает также, что функцию $f$ нельзя продолжить в область $G$. Например, функция $\frac{1}{z}$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и не продолжается голоморфно в $\mathbb{C}$. Можно сказать, что *голоморфная функция $f$ «сама определяет», куда и как ее можно продолжать*.

Однако может случиться, что одна и та же функция продолжается в две пересекающиеся области по-разному (то есть продолжения не совпадают на пересечении). Например, рассмотрим функцию $f(z) := \ln z$, $0 < \arg z < \pi$, голоморфную в верхней полуплоскости $D := \{\operatorname{Im} z > 0\}$. (Напомним, что $\ln z = \ln |z| + i \arg z$.)

Функцию $f$ можно аналитически продолжить в область $G_1 := \{-\pi < \arg z < \pi\}$ до голоморфной функции

$$F_1(z) := \ln z, \quad -\pi < \arg z < \pi.$$

Функцию $f$ также можно аналитически продолжить в область $G_2 := \{0 < \arg z < 2\pi\}$ до голоморфной функции

$$F_2(z) := \ln z, \quad 0 < \arg z < 2\pi.$$

Но при всех $z$ в нижней полуплоскости значения $F_1(z)$ и $F_2(z)$ не совпадают. Например, $F_1(-i) = -\dfrac{\pi i}{2}$, а $F_2(-i) = \dfrac{3\pi i}{2}$.

# 2 Аналитические элементы и их продолжение

Для работы с многозначными функциями можно использовать подход, предложенный К. Вейерштрассом и опирающийся на язык так называемых аналитических элементов. В этой лекции мы начнем изучение данного подхода.

**Определение 1.** ***Элемент***, *или* ***аналитический элемент*** *— это пара $(U, f)$, где $U$ – круг в $\mathbb{C}$ (его радиус положителен, но может быть бесконечным), а $f$ — голоморфная функция в круге $U$.*

Два элемента считаются равными, если их круги совпадают и функции совпадают в этом одном и том же круге.

Как мы знаем, функцию $f$ можно разложить в круге $U$ в ряд Тейлора. Этот ряд заведомо будет сходиться к функции $f$ в круге $U$, однако возможно, что этот ряд будет сходиться и в бо́льшем круге.

**Определение 2.** *Элемент называется **каноническим**, если радиус круга $U$ совпадает с радиусом сходимости ряда Тейлора функции $f$ в круге $U$. Это означает, что функцию $f$ нельзя голоморфно продолжить в бо́льший круг с тем же центром, что $U$.*

**Определение 3.** *Элемент $(U_2, f_2)$ называется **непосредственным аналитическим продолжением** (сокращенно НАП) элемента $(U_1, f_1)$, если пересечение кругов $U_1 \cap U_2$ непусто, а функции $f_1$ и $f_2$ совпадают на этом пересечении: $f_1|_{U_1\cap U_2} \equiv f_2|_{U_1\cap U_2}$.*

Очевидно, если $(U_2, f_2)$ — НАП $(U_1, f_1)$, то и, наоборот, $(U_1, f_1)$ — НАП $(U_2, f_2)$.

Следующие свойства НАП практически очевидны и будут полезны в дальнейшем.

**Утверждение 1.** *(A) (Свойство Вейерштрасса.) Если элемент $G = (V, g)$ есть НАП элемента $F = (U, f)$ и центр $b$ круга $V$ лежит в круге $U$, то ряд Тейлора для $g$ получается разложением функции $f$ в ряд Тейлора в точке $b$, то есть*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(z-b)^n$$

*для всех $z \in V$. Обратно, взяв произвольную точку $b \in U$, задав $g(z)$ этой формулой и рассмотрев в качестве $V$ круг сходимости этого ряда, мы получим элемент $(V, g)$, являющийся НАП элемента $F$.*

*(B) (Свойство треугольника.) Пусть элемент $F_1 = (U_1, f_1)$ есть НАП элемента $F_0 = (U_0, f_0)$, элемент $F_2 = (U_1, f_1)$ есть НАП элемента $F_1$. Если $U_0 \cap U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, то $F_2$ есть НАП элемента $F_0$.*

*Доказательство.* Свойство (A) следует из теоремы о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Для доказательства свойства (B) заметим, что на непустом открытом подмножестве $U_0 \cap U_1 \cap U_2$ области $U_0 \cap U_2$ все три функции совпадают: $f_0 \equiv f_1 \equiv f_2$. По теореме единственности $f_0 \equiv f_2$ всюду в $U_0 \cap U_2$, тем самым, элемент $F_2$ есть НАП элемента $F_0$. □

**Определение 4.** *Пусть $F$ — элемент. Элемент $G$ называется **результатом продолжения элемента $F$ по цепочке элементов** $F_0$**,** $F_1$**,** $F_2$**,...,** $F_n$, если $F_0 = F$, $F_n = G$ и элемент $F_j$ есть НАП элемента $F_{j-1}$ при всех $j = 1, 2, \dots, n$.*

Слово «результат» мы иногда будем опускать. Очевидно, если элемент $G$ — результат продолжения элемента $F$ по цепочке $F_0$, $F_1$, $F_2$, ..., $F_n$, то и наоборот, $F$ — результат продолжения $G$ по обратной цепочке $F_n$, $F_{n-1}$,..., $F_1$, $F_0$.

**Определение 5.** *Пусть $F_0 := (U_0, f_0)$ — канонический элемент с центром в точке $a$, а $\gamma : [0;1] \to \mathbb{C}$ — непрерывный путь из точки $a$ в точку $b$: $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. **Продолжением (канонического) элемента** $F_0$ **по пути** $\gamma$ называется семейство канонических элементов $F_t = (U_t, f_t)$, $t \in [0;1]$, обладающее двумя свойствами:*

*1) при каждом $t \in [0;1]$ центр круга $U_t$ находится в точке $\gamma(t)$;*

*2) для каждого $t_0 \in [0;1]$ найдется такая окрестность $u(t_0) \subset [0;1]$, что для всех $t \in u(t_0)$ элемент $F_t$ является НАП элемента $F_{t_0}$.*

Элемент $F_1$ называется результатом продолжения элемента $F_0$ по пути $\gamma$ (или вдоль этого пути). Как и в случае цепочки, иногда слово «результат» мы будем опускать.

**Утверждение 2.** *Если $\{F_t, t \in [0;1]\}$ и $\{\tilde{F}_t, t \in [0;1]\}$ — два продолжения канонического элемента $F_0$ вдоль одного и того же пути $\gamma$, то $\tilde{F}_t = F_t$ при всех $t \in [0;1]$. В частности, $\tilde{F}_1 = F_1$.*

Доказательство: см. [ДС], предложение в п.10.4 лекции 10.

Иными словами, продолжение вдоль пути единственно. Однако, вообще говоря, продолжения данного элемента по данному пути может и не существовать. Тогда мы говорим. что элемент не продолжается по данному пути.

**Замечание.** Если заменить путь $\gamma$ на эквивалентный, то есть репараметризовать, то результат продолжения по нему не изменится (потому что все семейство $F_t$ можно будет так же репараметризовать). Поэтому корректно говорить о продолжении по (ориентированной) кривой.

Следующее свойство продолжения вдоль пути бывает полезно в доказательствах.

**Лемма 1.** *Пусть $F_t$ — семейство элементов, осуществляющее продолжение канонического элемента $F_0$ вдоль пути $\gamma : [0;1] \to \mathbb{C}$. Обозначим радиус элемента $F_t$ через $R(t)$. Тогда либо $R(t) \equiv \infty$ при $t \in [0;1]$, либо $R : [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция.*

Доказательство приведено в [ДС] (лемма в п.10.4 лекции 10).

В некотором смысле операции продолжения по цепочке и вдоль пути эквивалентны друг другу. Более точно, верно следующее утверждение.

**Утверждение 3.** *(1) Пусть $F_t$, $t \in [0;1]$ — продолжение канонического элемента $F_0$ вдоль пути $\gamma : [0;1] \to \mathbb{C}$. Тогда найдутся точки $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-t} < t_n = 1$ такие, что элемент $F_1$ — результат продолжения элемента $F_0$ по цепочке $F_{t_0}, F_{t_1}, \dots, F_{t_{n-1}}, F_{t_n}$.*

*(2) Обратно, пусть канонический элемент $G$ результат продолжения канонического элемента $F$ по цепочке канонических элементов $F = F_0, F_1, \dots, F_{n-1}, F_n = G$. Обозначим через $\gamma : [0;1] \to \mathbb{C}$ параметризованную ломаную, последовательно соединяющую центры элементов $F_0, F_1, \dots, F_n$. Тогда элемент $F$ продолжается вдоль пути $\gamma$ и результат этого продолжения есть элемент $G$.*

Доказательство утверждения приведено в [ДС] (предложение в п.10.5 лекции 10).

В дальнейшем нам понадобится следующая важная теорема о продолжении вдоль путей.

**Теорема 1** (о продолжении по гомотопным путям)**.** *Пусть $\gamma_0, \gamma_1 : [0;1] \to \mathbb{C}$ — два пути с общими концами: $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$, $\gamma_1(0) = \gamma_1(1) = b$. Предположим, что пути $\gamma_0$ и $\gamma_1$ гомотопны в $\mathbb{C}$ (как пути с общими концами), то есть существует такое непрерывное отображение $\gamma(s,t)$, $\gamma : [0;1] \times [0;1] \to \mathbb{C}$, что $\gamma(0,t) = \gamma_0(t)$ и $\gamma(1,t) = \gamma_1(t)$ при всех $t \in [0;1]$, а также $\gamma(s,0) = a$ и $\gamma(s,1) = b$ при всех $s \in [0;1]$.*

*Положим $\gamma_s(t) := \gamma(s,t)$ при $s,t \in [0;1]$. Пусть канонический элемент $F_0$ в точке $a$* ***продолжается по каждому из путей*** *$\gamma_s$.*

*Тогда результаты продолжения элемента $F_0$ по пути $\gamma_0$ и по пути $\gamma_1$ совпадают.*

Доказательство приведено в [ДС] (теорема в п.10.6 лекции 10).

Очевидным следствием из теоремы о продолжении по гомотопным путям являтся теорема о монодромии:

**Теорема 2** (о монодромии)**.** *Пусть $D$ — односвязная область в $\mathbb{C}$. Пусть задан канонический элемент $F_0$ в некоторой точке $a \in D$. Предположим, что элемент $F_0$ продолжается по всем путям в области $D$, выходящим из точки $a$.*

*Тогда результат этого продолжения зависит только от конечной точки пути (а не от выбора самого пути).*