Материалы к лекции №6, 19 марта 2020 года

Предупреждение. Часть доказательств утверждений, встречающихся в тексте, не приводится здесь и содержится в книге

[ДС] А.В.Домрин, А.Г.Сергеев. Лекции по комплексному анализу (части 1 и 2), Москва, МИАН, 2004 г.

Книга разделена на две части. Их электронные версии доступны по ссылкам:

`mi-ras.ru/books/pdf/ser1.pdf`

`mi-ras.ru/books/pdf/ser2.pdf`

Изложение материала в целом следует тексту этой книги.

Принцип симметрии

Лекция 6 должна была быть посвящена принципу симметрии. Этот текст призван лишь пояснить основную идею принципа. Аккуратные формулировки утверждений приведены далее, доказательства содержатся, например, в п. 18.2 книги [ДС].

Пусть D — область в $\mathbb{C}$, содержащаяся в верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$. Пусть $f \in \mathcal{O}(D)$. Обозначим через D^* область, которая симметрична D относительно вещественной прямой: $D^* = \{\bar z \colon z \in D\}$ (см. рис. 1).

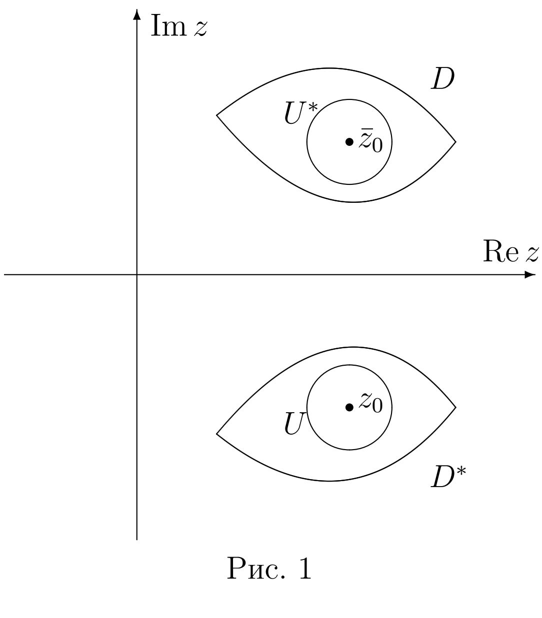

Рис. 1

Покажем, что формула $g(z) := \overline{f(\bar z)}$ определяет голоморфную функцию в области D^*. Если f — полином, то это очевидно:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 \Rightarrow$$
$$g(z) = \overline{f(\bar z)} = \overline{a_n \bar z^n + a_{n-1} \bar z^{n-1} + \cdots + a_0} = \overline{a_n} z^n + \overline{a_{n-1}} z^{n-1} + \cdots + \overline{a_0}.$$

В общем случае пусть $z_0 \in D^*$ — любая точка и пусть круг $U := \{|z - z_0| < \varepsilon\}$ целиком лежит в области D^*. Покажем, что функция g голоморфна в круге U. Очевидно, $\bar z_0 \in D$ и круг $U^* := \{|z - \bar z_0| < \varepsilon\}$

лежит в D. Значит, функция f в круге U^* разлагается в ряд Тейлора с центром $\bar{z}_0$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - \bar{z}_0)^k.$$

Тогда функция g в круге U тоже разлагается в сходящийся степенной ряд:

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (\bar{z} - \bar{z}_0)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{c_k} (z - z_0)^k.$$

Значит, функция g голоморфна в U. Поскольку точка $z_0 \in D^*$ произвольна, функция g голоморфна в D^*.

Теперь предположим, что область D такова, что ее граница ∂D содержит открытый интервал I вещественной прямой. Для простоты будем считать, что всякая точка интервала I имеет верхнюю полуокрестность, целиком содержащуюся в области D. Вообще говоря, граница области D может содержать и другие точки вещественной прямой, кроме точек интервала I. (См. рис. 2.)

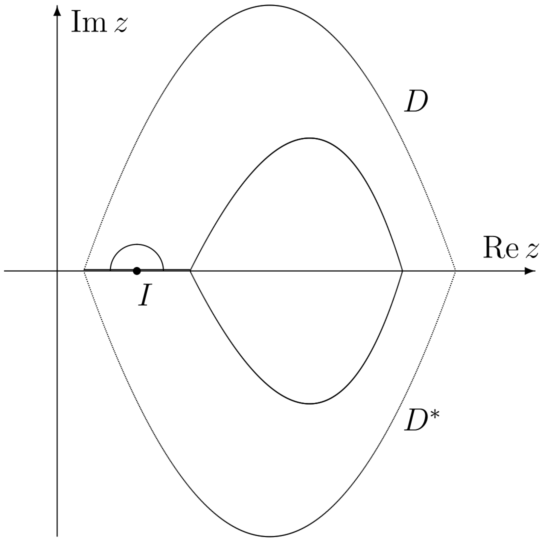

Рис. 2.

Пусть функция f голоморфна в области D и непрерывно продолжается на интервал I: $f \in C(D \cup I)$. Тогда функция g, определенная выше, голоморфна в области D^* и тоже непрерывно продолжается на интервал I, причем легко увидеть, что в каждой точке $a \in I$ значения функций f и g будут сопряжены друг другу: $g(a) = \overline{f(a)}$.

Теперь ясно, что в случае, когда значения функции f в точках интервала I вещественны, функции f и g будут совпадать на интервале I. В этом случае функции f и g «склеиваются» в единую непрерывную функцию $F(z)$ в области $G := D \cup I \cup D^*$ (см. рис. 3):

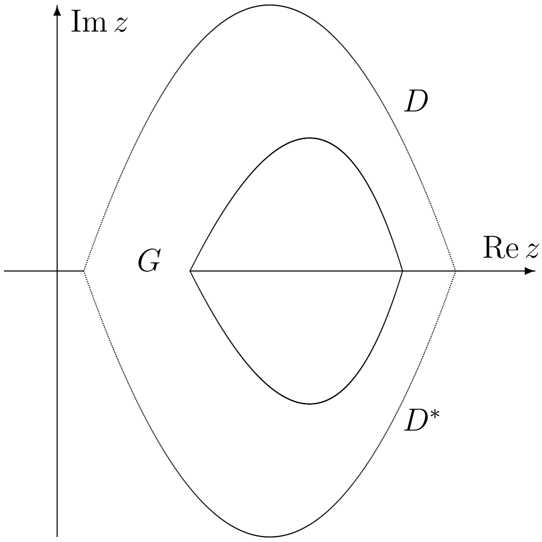

Рис. 3

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & \text{если } z \in D \cup I; \\ g(z), & \text{если } z \in D^*. \end{cases}$$

Функция F голоморфна в области D и в области D^*. Оказывается, поскольку функция F непрерывна в G, то она будет и голоморфна во всей области G. Это утверждение подробно доказано в [ДС] (лемма о голоморфном продолжении в п.18.2). Идея его доказательства состоит в том, чтобы проверить для функции F выполнение условия треугольника (и затем сослаться на теорему Мореры). Пусть треугольник Δ лежит вместе со своим замыканием $\bar{\Delta}$ в области G. Если замкнутый треугольник $\bar{\Delta}$ не задевает интервала I, то он целиком лежит в области D или в области D^* и интеграл по его границе от функции F равен нулю. Если он задевает I только вершиной или стороной, то можно слегка деформировать его, не сильно изменив интеграл функции F (в силу ее непрерывности), так, чтобы деформированная граница попала в область D или в область D^* (и тогда интеграл по деформированной границе будет нулевым.) Наконец, если интервал I задевает внутренность треугольника $\bar{\Delta}$, то $\bar{\Delta}$ разбивается интервалом на две части, одна их которых лежит в $D \cup I$, а другая в $D^* \cup I$. Каждая из частей представляет собой либо треугольник, либо четырехугольник, которые задевают интервал I только границей. Четырехугольник (если он есть) диагональю разбивается на два треугольника, и внутренность каждого их них не задевает интервала I. Ко вновь получившимся треугольникам можно теперь применить рассуждение с малой деформацией, приведенное выше. Общая формулировка леммы такова.

Лемма 1 (о голоморфном продолжении)**.** *Предположим, что прямая l пересекает область $D \subset \mathbb{C}$, а функция $f : D \to \mathbb{C}$ голоморфна в $D \setminus l$ и непрерывна в D. Тогда f голоморфна во всей области D.*

Можно заметить, что поскольку функция F совпадает с f на области D, мы получили аналитическое продолжение функции f из области D на бо́льшую область G.

Общая формулировка принципа симметрии получается, если с помощью дробно-линейных отображений заменить вещественную прямую на произвольную обобщенную окружность. При этом вместо комплексного сопряжения нужно будет рассматривать симметрию относительно этой обобщенной окружности. Следует заметить, что в формуле $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ мы использовали комплексное сопряжение два раза, и в общем случае одно из них можно заменить на симметрию относительно одной обобщенной окружности, а второе — относительно другой: $g(z) := S_2(f(S_1(z)))$, где S_1 — симметрия относительно обобщенной окружности l_1, а S_2 — симметрия относительно обобщенной окружности l_2. Тогда область D должна находиться в одной из двух частей, на которые обобщенная окружность l_1 делит расширенную комплексную плоскость, и включать в свою границу дугу I этой обобщенной окружности; значения же функции f на дуге I должны содержаться в обобщенной окружности l_2 (она совпадает с множеством неподвижных точек симметрии S_2), и тогда формула для функции g даст функцию, которая непрерывно «склеится» с функцией f через интервал I (в области $D \cup I \cup S_1(D)$).

Утверждение 1. *Пусть $D_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область, граница которой содержит дугу γ_1 обобщенной окружности l_1. Обозначим через D_1^* область, симметричную D_1 относительно l_1. Предположим, что*

$$D_1 \cap D_1^* = \varnothing,$$

а множество $G_1 := D_1 \cup \gamma_1 \cup D_1^*$ является областью в $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть $\overline{\mathbb{C}}$-значная функция f, голоморфная в D_1 и непрерывная в $D_1 \cup \gamma_1$, отображает дугу γ_1 на подмножество некоторой обобщенной окружности $l_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$. Тогда существует $\overline{\mathbb{C}}$-значная функция F, голоморфная в области G_1, которая совпадает с f на $D_1 \cup \gamma_1$. При этом

$$F(z) = S_2(f(S_1(z))) \quad \text{для } z \in D_1^*$$

(в этом равенстве S_1 обозначает симметрию относительно l_1, а S_2 — относительно l_2).

О доказательстве утверждения 1 см. ниже.

Вернемся для простоты теперь к рассмотренному частному случаю. Если предположить, что функция f конформна в области D, то она конформно отображает ее на какую-то другую область $\tilde{D}$. Определенная нами функция g тогда будет конформно отображать область D^* на область $\tilde{D}^*$, симметричную области $\tilde{D}$ относительно вещественной прямой. Если дополнительно наложить условия, гарантирующие, что области $\tilde{D}$ и $\tilde{D}^*$ не пересекаются, а функция f на интервале I взаимно однозначна, то функция F будет взаимно однозначна в области G, а значит, она будет конформно отображать область G на область $\tilde{D} \cup f(I) \cup \tilde{D}^*$. Обобщение этого утверждения на случай произвольных обобщенных окружностей дает вторую формулировку принципа симметрии:

Утверждение 2. *Пусть* D_1, D_2 *— области в* $\overline{\mathbb{C}}$. *Допустим, что граница* ∂D_1 *содержит дугу (то есть непустое связное открытое подмножество)* γ_1 *обобщенной окружности* l_1, *а граница* ∂D_2 *— дугу* γ_2 *обобщенной окружности* l_2. *Обозначим через* D_1^* *область, симметричную области* D_1 *относительно* l_1, *а через* D_2^* *область, симметричную* D_2 *относительно* l_2. *Мы будем предполагать, что*

$$D_1 \cap D_1^* = \varnothing = D_2 \cap D_2^*,$$

а множества

$$G_1 := D_1 \cup \gamma_1 \cup D_1^* \text{ и } G_2 := D_2 \cup \gamma_2 \cup D_2^*$$

являются областями в $\overline{\mathbb{C}}$.

Пусть, далее, функция f, *голоморфная в области* D_1 *и непрерывная в* $D_1 \cup \gamma_1$, *конформно отображает область* D_1 *на область* D_2 *и задает гомеоморфизм дуги* γ_1 *на дугу* γ_2.

Тогда функция f *голоморфно продолжается через дугу* γ_1 *в область* G_1. *Иными словами, существует функция* $F \in \mathcal{O}(G_1)$, *совпадающая с* f *на* $D_1 \cup \gamma_1$, *которая конформно отображает область* G_1 *на область* G_2. *При этом*

$$F(z) = S_2(f(S_1(z))) \quad \text{для } z \in D_1^*$$

(в этом равенстве S_1 *обозначает симметрию относительно* l_1, *а* S_2 *— относительно* l_2*).*

Доказательство утверждений 1 и 2 приведено в [ДС] (см. страницы 207–209 и замечание 18.1) .