# Теория функций и функциональный анализ

**В.И. Богачев, П.А. Бородин, М.И. Дьяченко, Б.С. Кашин, П.В. Парамонов**

Влияние теории функций и функционального анализа на другие направления математики и ее приложения исключительно велико и продолжает расширяться. Поэтому не удивительно, что кафедра ТФФА — одна из самых крупных на механико-математическом факультете. Перед коллективом кафедры стоит очень непростая задача — сохранить высочайший уровень исследований, отличавший сотрудников старших поколений. В последние 10 лет кафедра потеряла замечательных ученых, создателей крупных научных школ — скончались академик А.Г. Витушкин, академик А.А. Гончар, профессор А.Г. Костюченко, академик П.Л. Ульянов. В то же время кафедра совсем не пополнялась молодыми сотрудниками.

Сейчас на кафедре работают 1 академик РАН, 19 докторов и 7 кандидатов наук. Ежегодно на кафедру распределяются 10–20 студентов 2 курса, бóльшая часть которых затем поступают в аспирантуру. Научная жизнь кафедры сосредоточена в многочисленных специальных семинарах, каждый из которых, как правило, объединяет целую научную школу со сложившимися традициями и направлениями исследований.

Научные достижения кафедры ежегодно отмечаются различными премиями, стипендиями и грантами. Премии имени А.Н.Колмогорова РАН присуждены академику А.Г. Витушкину (2003; цикл работ "Аналитическая емкость в задачах теории приближений"), профессору А.М. Степину (2009; цикл работ "Эргодическая теория и смежные вопросы"), академику Б.С. Кашину (2012; цикл работ "Поперечники по Колмогорову, $n$-членные приближения, оценки норм подматриц"). Доцентам кафедры А.Н. Бахвалову, П.А. Бородину, А.М. Савчуку по нескольку лет подряд присуждалась стипендия МГУ для талантливых молодых преподавателей и ученых.

За последние 10 лет более пятидесяти аспирантов кафедры защитили кандидатские диссертации. Докторские диссертации защитили доценты кафедры А.Н. Бахвалов (2011), И.А. Шейпак (2012), П.А. Бородин (2012), а также выпускники кафедры А.В. Покровский (2008, консультант проф. Е.П. Долженко), К.В. Руновский (2010, консультант проф. М.К. Потапов), М.Г. Плотников (2011, консультант проф. В.А. Скворцов), С.В. Шапошников (2011, консультант проф. В.И. Богачев), Н.Н. Шамаров (2011, консультант проф. О.Г. Смолянов).

Перейдем к изложению научных достижений кафедры за последние 10 лет. За недостатком места будет изложена лишь часть полученных результатов, которые традиционно делятся на три направления: действительный анализ, функциональный анализ и комплексный анализ. Это деление весьма условно: как будет видно из нижеследующего текста, научные исследования на кафедре ведутся не только по анализу, но и по многим близким разделам математики (дифференциальные уравнения, математическая физика, вычислительная математика, теория вероятностей, теория чисел, выпуклая геометрия и др.)

### Действительный анализ

За последние 10 лет сотрудниками кафедры был получен ряд важных результатов в области действительного анализа.

Б.С. Кашиным, совместно с американским математиком С. Шареком, решена известная задача, поставленная Б. Кнастером еще в 1947 г. В [47] указан пример непрерывной функции $F$ на евклидовой сфере достаточно большой размерности $N$ и набора $\{x_1, \ldots, x_N\}$ таких точек этой сферы, что не существует вращения сферы, переводящего все указанные точки в линию уровня функции $F$.

Изучались вопросы суммируемости *кратных тригонометрических рядов Фурье*. М.И.Дьяченко [17] установил, что для широкого класса методов суммирования, являющихся усреднениями прямоугольных частичных сумм по $m$-кратным финитным последовательностям, монотонно невозрастающим по каждому индексу, сохраняются те же свойства, что и для кратных $(C, 1)$-средних Чезаро. Продолжилось изучение многомерных классов функций ограниченной $\Lambda$-вариации. Это обобщение класса функций ограниченной вариации оказалось наиболее подходящим для описания поведения кратного тригонометрического ряда Фурье. В частности, А.Н.Бахваловым было введено и изучено понятие непрерывности по $\Lambda$-вариации в многомерном случае [2]. Задача о сравнении классов функций ограниченной $\Lambda$-вариации с классами функций, непрерывных по $\Lambda$-вариации, полностью решена для важного случая степенных последовательностей. Им же [3] получены новые результаты о сходимости кратных рядов и интегралов Фурье по прямоугольникам, при этом выявлены качественные отличия между случаем размерности два и случаем более высокой размерности, связанные с особенностями локального поведения гармонической вариации. А именно, хотя для функции любого числа переменных конечность ее гармонической вариации гарантирует равномерную ограниченность прямоугольных частичных сумм ряда Фурье, однако сходимость таких сумм для функций трех и более переменных из этого класса может не иметь места. Это связано с тем, что даже для непрерывных функций трех и более переменных гармоническая вариация функции по стягивающемуся в точку кубу может не стремиться к нулю. Показано также [4], какому более узкому классу того же типа должна принадлежать функция, чтобы локальное стремление гармонической вариации к нулю в точке непрерывности заведомо имело место. М.И.Дьяченко [46], совместно с американским математиком Д.Ватерманом, изучал альтернативные многомерные классы функций ограниченной $\Lambda$-вариации, при определении которых используется единая последовательность непересекающихся многомерных параллелепипедов. Для таких классов установлено окончательное в своих терминах условие, гарантирующее сходимость по прямоугольникам ряда Фурье функции из этого класса.

Продолжалось *исследование различных обобщений интеграла Лебега*, в том числе связанных с новыми задачами из теории ортогональных рядов. В.А.Скворцовым разработан единый подход к решению задачи восстановления, с помощью обобщенных формул Фурье, коэффициентов сходящихся рядов по различным ортогональным системам. Метод состоит в подборе дифференциального базиса, соответствующего системе, и построении по этому базису интеграла, определяемого обобщенными суммами Римана-Хенстока [53]. В частности, в последние годы в этом направлении определены и изучены интегралы, решающие задачу восстановления коэффициентов рядов по системам характеров нульмерных компактных абелевых групп, включая группу целых p-адических чисел [54], [55]. В.А.Скворцовым, совместно с британскими математиками Р. Хенстоком и П. Мальдони, решена проблема корректности определения обобщенного интеграла Римана в функциональном пространстве $R^{[a,b]}$ [49].

Важные новые результаты получены в *теории приближений*. М.К.Потаповым доказана эквивалентность поточечного приближения алгебраическими многочленами непрерывной функции и её поточечной структурной характеристики [24]. Доказаны прямые и обратные теоремы о приближении в интегральной метрике алгебраическими многочленами функций, модуль гладкости которых определяется при помощи обобщенного сдвига Якоби [25]. Им же, совместно с Б.В.Симоновым и С.Ю.Тихоновым, установлено точное неравенство, связывающее дробные модули гладкости функции в разных метриках [26] и найдена конструктивная характеристика смешанного модуля гладкости в смешанной метрике [27].

## Функциональный анализ

Проводимые на кафедре исследования по функциональному анализу тесно связаны со всеми другими направлениями научной работы кафедры. В этом разделе дается краткий обзор основных результатов кафедры последнего десятилетия, связанных с геометрией банаховых пространств, банаховыми алгебрами, теорией операторов и дифференциальными уравнениями, бесконечномерным анализом, теорией меры и теорией динамических систем.

В последние годы в связи с запросами практики за рубежом бурно развивается направление функционального анализа, получившее название "*сжатые измерения*" (compressed sensing). В рамках этого направления изучаются $n \times N$ матрицы $A$, для которых возможен эффективный алгоритм решения (вообще говоря неопределенной) системы линейных уравнений $y = Ax$, $x \in \mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^n$, при дополнительной априорной информации о том, что вектор $x$ — разреженный (т.е. число его ненулевых координат достаточно мало). К основам указанного направления относятся оценки колмогоровских поперечников, полученные Б.С. Кашиным еще в конце 70-х годов прошлого века. В работе [18] Б.С. Кашина и В.Н. Темлякова установлено, что любая матрица $A$, для которой $n$- мерное подпространство, порожденное ее строками, реализует по порядку колмогоровский поперечник $N$-мерного евклидова шара в равномерной метрике, обеспечивает эффективное решение задачи "сжатого измерения устойчивое относительно помех (т.е. ошибок в значениях координат вектора $x$). Приложения оценок поперечников специального вида к исследованию рядов Дирихле даны в работе Ж. Бургейна и Б.С. Кашина [10].

В *геометрии банаховых пространств* известная проблема выпуклости чебышевского множества (поставленная более полувека назад Н.В. Ефимовым, С.Б. Стечкиным и В. Кли) получила положительное решение при дополнительном аппроксимативном условии на множество в работе П.А. Бородина [9].

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — действительное банахово пространство. Для точек $x_1, \dots, x_N \in X$ и множества $M \subset X$ положим $\varrho(x_1, \dots, x_N; M) = \inf\{\sum_{k=1}^N \|x_k - y\|:\ y \in M\}$,

$$P_M(x_1, \dots, x_N) = \{y \in M:\ \sum_{k=1}^N \|x_k - y\| = \varrho(x_1, \dots, x_N; M)\}.$$

Множество $P_M(x_1, \dots, x_N)$ называют метрической $N$-проекцией точек $x_1, \dots, x_N$ на множество $M$. Множество $M$ называют *$N$-чебышевским*, если для всех $x_1, \dots, x_N \in X$ выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

(1) $\varrho(x_1, \dots, x_N; M) > \varrho(x_1, \dots, x_N; X)$ и $P_M(x_1, \dots, x_N)$ одноточечно;

(2) $\varrho(x_1,\dots,x_N;M)=\varrho(x_1,\dots,x_N;X)$ и $P_M(x_1,\dots,x_N)\neq\emptyset$.

При $N=1$ это определение дает обычные чебышевские множества (то есть такие множества $M$, что для всякого $x\in X$ в $M$ существует и единствен элемент, ближайший к $x$). Всякое $N$-чебышевское множество является чебышевским. В [9] доказан такой результат.

(i) *Пусть $N$ четно и $X$ — равномерно выпуклое банахово пространство. Множество $M\subset X$ является $N$-чебышевским тогда и только тогда, когда оно выпукло и замкнуто.*

(ii) *Пусть $N\geq 3$ нечетно и $X$ — гладкое равномерно выпуклое банахово пространство. Множество $M\subset X$ является $N$-чебышевским тогда и только тогда, когда оно выпукло и замкнуто.*

Условие гладкости пространства в утверждении (ii) убрать нельзя.

В.М. Федоров получил значительные результаты, связанные с чебышевскими клиньями в пространстве $C(X)$ непрерывных функций на хаусдорфовом компакте $X$. Пусть $E$ — нормированное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Выпуклое коническое множество $K\subset E$ называется клином. Обозначим через $\nabla_pK\doteqdot\operatorname{cone}(K-p)$ коническую оболочку множества $K-p$, называемую опорным клином в точке $p\in K$; через $\varPi_pK\doteqdot\nabla_pK\cap(-\nabla_pK)$ обозначим наибольшее линейное подпространство, содержащееся в опорном клине $\nabla_pK$ и называемое опорной плоскостью в точке $p$; наконец, $\nabla_p^\circ K\doteqdot\{\alpha\in K^\circ\mid\Re\alpha(p)=0\}$ — полярный* клин опорного клина $\nabla_pK$ в точке $p$, где $K^\circ\doteqdot\{\alpha\in E^*\mid\Re\alpha(x)\leqslant 0,\ x\in K\}$. Положим $n_p\doteqdot\operatorname{codim}\varPi_pK$, $N_p\doteqdot n_p-1$, если $E$ вещественно, $N_p\doteqdot[(n_p-1)/2]$, если $E$ комплексно. Рассмотрим клин $K\subset C(X)$ в пространстве $C(X)$. Будем говорить, что ненулевая функция $g\in\varPi_pK$ имеет полярные нули $x_i\in X$, если $g(x_i)=0$, $i=1,\dots,n$, и найдется ненулевая линейная комбинация функционалов Дирака $\alpha=\sum_{i=1}^n c_i\delta_{x_i}$, которая принадлежит полярному* клину $\alpha\in\nabla_p^\circ K$. В.М. Федоров доказал следующие утверждения [37].

*Замкнутый клин $K\subset C(X)$ конечной размерности* $\dim K<\infty$ *является чебышевским тогда и только тогда, когда для всякой точки $p\in K$ всякая ненулевая функция из опорной плоскости $g\in\varPi_pK$ не имеет полярных нулей на компакте $X$.*

*Замкнутый клин $K\subset C(X)$ конечной коразмерности* $\dim K^\circ<\infty$ *является чебышевским тогда и только тогда, когда для всякой точки $p\in K$ и для всякого ненулевого функционала $\alpha\in\nabla_p^\circ K$ выполняются следующие условия*: (a) *функционал $\alpha\in\nabla_p^\circ K$ достигает своей нормы*; (b) *всякий функционал $\beta\in\nabla_p^\circ K$ абсолютно непрерывен относительно $\alpha$ на носителе* $\operatorname{supp}(\alpha)$; (c) *множество* $\operatorname{zero}(\alpha)\doteqdot X\setminus\operatorname{supp}(\alpha)$ *содержит не более $N_p$ точек*; (d) *конечная система характеристических функций* $\{\chi_x\mid x\in\operatorname{zero}(\alpha)\}$ *линейно не зависит от подпространства $\varPi_pK$.*

Следствиями этих утверждений являются известные теоремы Хаара (1918 г.) и Колмогорова (1948 г.) о единственности наилучшего приближения конечномерным подпространством в $C(X)$, а также теоремы Фелпса (1963 г.) и Гаркави (1967 г.) о существовании и единственности наилучшего приближения подпространством конечной коразмерности в $C(X)$.

В *спектральной теории линейных операторов* важные новые результаты получены в работах школы А.А. Шкаликова. В работе И.А. Шейпака [38] введено понятие самоподобной функции нулевого спектрального порядка. Показано, что все такие функции кусочно постоянны, причем для каждой из них существует особая в некотором смысле точка: все точки разрыва, кроме особой, являются разрывами первого рода. В работе А.А. Владимирова и И.А. Шейпака [11] рассмотрено спектральное уравнение струны с дискретным фрактальным весом, порожденным самоподобной функцией нулевого спектрального порядка. Доказано, что спектр этой задачи дискретный. В работе [12] аналогичные исследования проведены для оператора $(-1)^l y^{(2l)}$, где $l > 1$, с самоподобным дискретным весом при спектральном параметре. Доказано, что можно выделить несколько серий собственных значений, каждая из которых имеет экспоненциальную асимптотику. Новизна результатов заключается как в том, что изучены спектральные свойства операторов с сингулярными весами, которые в рассмотренных случаях являются обобщенными функциями первого порядка сингулярности, так и в том, что дискретные веса ранее не изучались и в менее сингулярных случаях: даже для мер асимптотика собственных значений была неизвестна. В совместной работе И.А. Шейпака с А.И. Назаровым [50] исследованы спектральные свойства оператора, порожденного произвольным формально самосопряженным дифференциальным выражением высокого четного порядка и самоподобной дискретной мерой при спектральном параметре, найден главный член асиптотики считающей функции. Эти результаты использованы для получения логарифмической асимптотики малых уклонений гауссовских процессов по самоподобной дискретной мере.

В серии работ А.М. Савчука и А.А. Шкаликова (см. [30], [31], [29]) изучены прямые и обратные задачи для операторов Штурма – Лиувилля $-y'' + q(x)y$ с потенциалами из всей шкалы пространств Соболева $W_2^\theta$, где $\theta \in [-1, +\infty)$, на конечном промежутке. Для операторов подобного вида с краевыми условиями Дирихле и Дирихле – Неймана получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций. Новизна результатов состоит не только в том, что эти формулы были получены для дробных показателей $\theta$ и потенциалов-распределений (случай $\theta < 0$), но и в том, что остаточные члены в этих формулах допускают оценку, равномерную по шару $\|q\|_\theta \leq R$. Для формулировки этих результатов были введены расширенные весовые пространства $\hat{l}_2^\theta$ (расширение состоит в добавлении специальных последовательностей вида $(k^{-j})_{k=1}^\infty$ и $((-1)^k k^{-j})_{k=1}^\infty$, причем число таких последовательностей зависит от $\theta$). Для доказательства асимптотических формул для дробных $\theta$ применялся метод интерполяции нелинейных отображений. Это потребовало доказательства дифференцируемости отображения $F$, сопоставляющего потенциалу $q$ спектральные данные. Аналогичный метод удалось применить и для доказательства асимптотики спектральной функции Вейля $\varrho(\lambda)$ операторов Штурма – Лиувилля с описанными потенциалами. Дополнительная сложность в данном случае состояла в доказательстве невырожденности дифференциала упомянутого отображения. Последние исследования, связанные с доказательством теорем о равномерной на всем отрезке $[0, \pi]$ равносходимости разложений в ряды по системе собственных и присоединенных функций операторов Штурма – Лиувилля с потенциалами $q \in W_2^\theta$, $\theta \in [-1, 0)$, потребовали уточнения асимптотических формул для собственных функций. Для случая $\theta \in [-1, -1/2]$ были получены новые оценки для остаточных членов. Доказанные результаты об асимптотике собственных значений и нормировочных чисел успешно применены к решению обратных задач восстановления потенциала $q$ по двум спектрам или по спектру и нормировочным числам. Новизна последних результатов состоит в том, что обратная задача была решена для пространств с дробным показателем $\theta$, а также в том, что для решений обратной задачи были получены оценки устойчивости.

В работе [39] рассматривалась классическая задача об асимптотике спектра самосопряженного оператора, когда начальный оператор с плотностью считающей функции собственных значений, равной $\alpha$, возмущается $\beta$-подчиненным несамосопряженным оператором, но подчинение понимается не в глобальном смысле, как это было ранее в классических теоремах Карлемана – Тичмарша – Келдыша – Маркуса – Мацаева, а в локальном смысле (определение было предложено А.А. Шкаликовым). Новое понятие подчиненности позволило решить проблему асимптотики собственных значений для существенно более широкого круга дифференциальных операторов.

В *теории банаховых алгебр* яркое достижение принадлежит А.Я. Хелемскому [45]:

*Банахова алгебра мер на непрерывной (т. е. не дискретной) локально компактной группе никогда не бывает аменабельной.*

Это решение проблемы, стоявшей более 20 лет. Ранее это было доказано Г. Брауном для абелевых групп. Новое доказательство основано на совершенно других соображениях (отсутствие свойства плоскости у идеала сингулярных мер). Важным итоговым достижением последнего десятилетия стала также монография А.Я. Хелемского [48] по квантовому функциональному анализу.

Итоги многолетних исследований *по бесконечномерному анализу*, проводившихся О.Г. Смоляновым и его школой, в том числе результаты по топологии локально выпуклых пространств, дифференцированию и интегрированию в локально выпуклых пространствах, представлены в недавней монографии [8]. Применениям бесконечномерного анализа в математической физике посвящена работа В.В. Козлова и О.Г. Смолянова [19], в которой введена квантовая модель Пуанкаре, реализующая необратимое поведение идеального газа, состоящего из невзаимодействующих квантовых больцмановских частиц.

В *теории бесконечномерных групп* значительное продвижение недавно получено Ю.А. Неретиным. Известно, что двойные классы смежности и классы сопряженности на бесконечномерных группах часто имеют полугрупповую структуру. В недавних работах [51], [52] получены явные описания таких умножений для классических групп и симметрических групп (и, в частности, описания самих таких классов; простейший пример задачи — описать пары перестановок с точностью до общего сопряжения). Для симметрических групп эти умножения интерпретируются как склейки двумерных симплициальных (или полигональных) бордизмов. В случае бесконечномерных классических групп получены многомерные аналоги характеристической оператор-функции Лившица. Пример задачи: предъявить спектральные данные для $k$ унитарных матриц, определенных с точностью до сопряжения общей унитарной матрицей меньшего размера. Характеристические функции оказываются «внутренними функциями» в следующем смысле: пространство $B_k$ матриц размера $k$ с нормой менее 1 голоморфно отображается в пространство $B_\alpha$ так, что граница Шилова отображается в границу Шилова (т. е. унитарная группа $\mathrm{U}(k)$ переходит в унитарную группу $\mathrm{U}(\alpha)$).

В *теории меры на бесконечномерных пространствах* долго стоявшая проблема была решена В.И. Богачевым, А.В. Колесниковым и К.В. Медведевым. В 50-х годах прошлого века в работах Р. Камерона, У. Мартина, Ю.В. Прохорова, А.В. Скорохода и И.В. Гирсанова было установлено, что мера Винера $P_W$ на пространстве непрерывных функций $C[0,1]$ переходит в абсолютно непрерывную меру при преобразованиях вида $T = I+F$, где $I$ — тождественное преобразование, а отображение $F$ принимает значения в пространстве Камерона – Мартина $H$ меры Винера, т. е. в множестве абсолютно непрерывных функций $h$ с $h(0) = 0$ и $h' \in L^2[0,1]$, при весьма широких условиях на $F$. Однако оставалось неизвестным обратное: всякая ли вероятностная мера, абсолютно непрерывная относительно меры $P_W$, может быть получена из $P_W$ преобразованием указанного вида. В работе [6] В.И. Богачев, А.В. Колесников и К.В. Медведев дали положительный ответ на этот вопрос. Этот результат вошел также в монографии [42] и [43] по теории меры. Ряд более специальных результатов недавно получен в работе [5], посвященной проблеме Монжа – Канторовича оптимальной транспортировки масс.

В последнее десятилетие В.И. Богачев совместно с Н.В. Крыловым и М. Рёкнером (а также с рядом других математиков) развивал новое направление на стыке *аналитической теории меры и теории уравнений с частными производными*, связанное с исследованием уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова для мер. Подробный обзор этих исследований дан в [7].

В *эргодической теории* А.М. Степиным совместно с А.М. Еременко получены неожиданные результаты в задаче о включении преобразований, сохраняющих меру, в потоки преобразований. Для преобразования $T$ с однократным спектром множество потоков, включающих $T$, если и не пусто, то состоит либо из одного элемента, либо из бесконечного числа спектрально неэквивалентных потоков. В [36] доказано, что в типичном случае имеет место максимальная неединственность включения в поток в том смысле, что централизатор типичного преобразования содержит подгруппу, изоморфную бесконечномерному тору. Доказательство использует так называемую динамическую альтернативу, топологический аналог теоремы Фубини, фундаментальный факт дескриптивной теории множеств о почти открытости аналитических множеств.

В.В. Рыжиков рассмотрел в [28] класс автоморфизмов пространства Лебега, обладающих набором слабых пределов степеней, обеспечивающих свойство простоты спектра их симметрических степеней. Граница этого класса в рамках специальных конструкций содержит перемешивающие автоморфизмы, обладающие упомянутым свойством. Тем самым задача Колмогорова о групповом свойстве спектра динамических систем была решена в классе перемешивающих систем: построены перемешивающие автоморфизмы, у которых сверточные степени спектральной меры взаимно сингулярны. Предложенный метод в дальнейшем привел к новым примерам перемешивающих гауссовских и пуассоновских систем.

Реализация наборов спектральных кратностей динамической системы — давняя задача эргодической теории. В случае пространств с конечной мерой задача не решена до сих пор. Для пространств с сигма-конечной мерой В.В. Рыжиковым в совместной работе с А.И. Даниленко [13] получено полное решение:

*Любое непустое подмножество натурального ряда реализовано как множество кратностей спектра купмановского оператора, отвечающего эргодическому консервативному преобразованию, сохраняющему бесконечную меру.*

## Комплексный анализ

Современный комплексный анализ черпает постановки своих задач как из классических разделов математики, таких как теория приближений или аналитическая теория чисел, так и из моделей современной математической физики. В следующем обзоре основных результатов сотрудников кафедры ТФФА за 2003–2012 годы четко видны оба указанных направления.

*Приближения аналитических функций рациональными и комплексно ортогональные многочлены.* А.И. Аптекаревым доказаны теоремы о сильной асимптотике многочленов $\{P_n(z)\}, \quad n \to \infty$, определяемых соотношениями ортогональности

$$\int_F P_n(z) z^\nu h(z)\, dz = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad \deg P_n \le n\,,$$

на контурах и дугах $F$ в комплексной плоскости, относительно комплекснозначных аналитических весов $h(z)$. Техника доказательства основана на аппроксимации решений краевых задач для матричнозначных аналитических функций (матричной задаче Римана-Гильберта). Такого сорта асимптотики находят применения в различных областях математики. В качестве примеров можно привести результаты о локальной универсальности распределений собственных значений ансамблей случайных матриц [40] или о равномерной сходимости рациональных аппроксимаций. Другой пример – уточнение скорости приближения аналитических функций рациональными.

Пусть
$$d_n := d_n(f, E) := \inf_{r\in\mathfrak{R}_n} \bigl\{\max_E |f - r|\bigr\}, \qquad E \cap F = \varnothing,$$
– расстояние в чебышевской метрике на компакте $E$ от аналитической функции $f$ до множества $\mathfrak{R}_n$ рациональных функций $r$ порядка $n$. Известно, что аналитические функции приближаются рациональными со скоростью геометрической прогрессии $d := \lim_{n\to\infty} d_n^{1/(2n)}$ . В работе [1] доказана общая теорема об уточнении скорости приближения рациональными функциями вещественно-симметричных функций $f$, аппроксимируемых на промежутках (конечных или бесконечных интервалах $E$) действительной оси. Речь идет о наличии и о величине предела
$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_n(f, E)}{\alpha_n d^{2n}}, \quad \text{где} \quad \alpha_n^{1/n} = 1 + o(1),$$
который называют точной константой приближения аналитической функции рациональными. В частности, была доказана справедливость известной гипотезы А.Магнуса о точной константе для скорости приближения экспоненциальной функции на полуоси:
$$\frac{d_n(e^{-x}, [0,\infty])}{d^{2n}} \to 2d \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$
где показатель скорости приближения
$$d := d(e^{-x}, [0,\infty]) = \lim_{n\to\infty} d_n^{1/(2n)}(e^{-x}, [0,\infty]),$$
был ранее найден А.А. Гончаром и Е.А. Рахмановым в виде $d = \sqrt{v}$, где $v$ есть единственный положительный корень уравнения
$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l v^l = \frac{1}{8}, \qquad a_l := \Bigl|\sum_{b|l} (-1)^b b\Bigr|.$$

*$CR$-геометрия.* В 1907-м году А. Пуанкаре показал, что 3-мерная вещественная сфера — это ключ к пониманию голоморфной геометрии 3-мерных вещественных гиперповерхностей двумерного комплексного пространства (старое название этой теории — "псевдоконформная геометрия", современное "$CR$-геометрия"). В 1932-м году Э. Картан, используя результат Пуанкаре и классификацию Энгеля 3-мерных алгебр Ли, дал полную классификацию голоморфно однородных ростков вещественных гиперповерхностей двумерного комплексного пространства. Его результат можно рассматривать как классификацию всех локально однородных 3-мерных $CR$-многообразий. В [41] В.К. Белошапка и И.Г. Коссовский (в прошлом аспирант кафедры ТФФА, сейчас работает в Канаде) построили полную голоморфную классификацию всех однородных 4-мерных $CR$-многообразий. Полученный список состоит из плоских ростков (линейные пространства); цилиндров над поверхностями из списка Картана, модельной кубики (полный аналог сферы Пуанкаре), и 19-ти семейств (один и два вещественных параметра) неизвестных ранее однородных ростков, заданных уравнениями в элементарных функциях. Почти все ростки имеют реализацию в виде 4-мерных вещественных поверхностей трехмерного комплексного пространства. Построение классификации основано на методе модельных

поверхностей (А.Пуанкаре, Ю.Мозер, В.Белошапка), на технике представления алгебр Ли голоморфными полями (Э.Картан) и на методах компьютерной алгебры.

*Граничное поведение конформных отображений произвольных жордановых областей.* Теорема Каратеодори утверждает, что всякое конформное отображение одной ограниченной односвязной жордановой области на другую область этого типа продолжается на замыкание первой области до гомеоморфизма замкнутых областей, не указывая какой-либо зависимости свойств непрерывности этого отображения от свойств границ рассматриваемых областей. В некоторых частных случаях областей с гладкими границами и областей со спрямляемыми границами типа М.А. Лаврентьева такую зависимость обнаружили O.D. Kellogg (1912 г.) и S.E. Warschawski (1961 г.). В 1996 г. Е.П. Долженко ввел две простые метрические характеристики жордановых кривых — модуль колебания (для произвольных жордановых кривых) и модуль спрямляемости (для произвольных спрямляемых жордановых кривых). Это позволило ему получить содержательные оценки сверху для модуля непрерывности конформных отображений ограниченных областей комплексной плоскости с произвольными жордановыми границами (включая, например, границы положительной площади) на единичный круг и модуля непрерывности конформных отображений единичного круга на такие области. В случае областей со спрямляемыми жордановыми границами эти оценки существенно уточнены за счет использования модуля спрямляемости границы. Результаты такой общности получены впервые. Резко усилена оценка модуля непрерывности для отображений единичного круга на области со спрямляемыми границами типа М.А.Лаврентьева. Перечисленные результаты опубликованы в статье [14], где рассмотрены также конформные отображения произвольных односвязных ограниченных областей друг на друга, а также приведены локальные формы всех формулируемых теорем.

*Голоморфные решения солитонных уравнений.* А.В. Домрин [15] с помощью развитого им локального варианта метода обратной задачи рассеяния изучал вопросы аналитического продолжения локальных голоморфных решений солитонных уравнений параболического типа, например, уравнения Кортевега-де Фриза $u_t = au_{xxx} + buu_x$, Буссинеска $u_{tt} = au_{xxxx} + buu_{xx} + bu_x^2$ и нелинейного уравнения Шредингера (NLS) $iu_t = au_{xx} + bu|u|^2$, где $a, b$ — любые ненулевые комплексные (для (NLS) — вещественные) числа, а под $|u|^2$ понимается $u(x,t)\overline{u(\overline{x},\overline{t})}$. Основной результат гласит, что каждое решение $u(x,t)$ любого из этих (и многих других) уравнений, определенное и голоморфное в бидиске

$$\{(x,t) \in \mathbb{C}^2 : |x - x_0| < R_1,\ |t - t_0| < R_2\}$$

(для (NLS) — с вещественным центром $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$), допускает аналитическое продолжение до мероморфной функции в полосе

$$\{(x,t) \in \mathbb{C}^2 : |t - t_0| < R_2\}.$$

Кроме того, описаны все возможные оболочки мероморфности ростков решений указанных уравнений (окончательная формулировка этого описания приводится в [16]) и дан критерий разрешимости локальной голоморфной задачи Коши в терминах данных рассеяния начального условия.

Следует также добавить, что по теореме Коши–Ковалевской (с $x$ в качестве времени) локальные голоморфные решения изучаемых уравнений существуют в изобилии в окрестности любой заданной точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$. Более того, изучаемый класс решений содержит все конечнозонные решения и многие быстроубывающие, а предложенный локальный вариант метода обратной задачи рассеяния совпадает в каждом из этих случаев со стандартным (уже известным) вариантом, но при этом покрывает многие случаи, не поддающиеся изучению ни одним из указанных стандартных методов.

*Квантование универсального пространства Тейхмюллера.* Решение задачи квантования теории гладких струн было представлено А.Г. Сергеевым в [32]. При этом стало понятно, что на самом деле нет никаких физических оснований для того, чтобы рассматривать только гладкие струны — такое ограничение продиктовано скорее математическими соображениями удобства работы с гладкими отображениями. Гораздо более естественно выбирать в качестве фазового пространства теории вместо пространства гладких струн его соболевское пополнение $V_d := H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^d)$ как наиболее широкое в шкале соболевских пространств, на котором корректно определена симплектическая форма струнной теории. Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ (фактор пространства квазисимметричных гомеоморфизмов единичной окружности по дробно-линейным автоморфизмам единичного круга), так же как содержащееся в нем пространство $\mathcal{S}$ диффеоморфизмов окружности в случае гладких струн, параметризует различные комплексные структуры на этом фазовом пространстве. После того, как в качестве фазового пространства выбрано указанное соболевское пространство, возникает задача квантования пространства $\mathcal{T}$. И тут проявляется главная трудность при работе с "негладкими" объектами, которая состоит в том, что к пространству $\mathcal{T}$ не применимы методы квантования, разработанные для гладких струн: дираковская схема квантования, использовавшаяся при квантовании пространства диффеоморфизмов $\mathcal{S}$, не работает в случае универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$.

Для квантования $\mathcal{T}$ пришлось применить принципиально иной подход, основанный на соображениях из некоммутативной геометрии. Решение задачи квантования $\mathcal{T}$ представлено А.Г. Сергеевым в [33].

*Аппроксимация решениями эллиптических уравнений и продолжение решений эллиптических неравенств.* П.В. Парамонов исследовал условия возможности продолжения субгармонических функций с компактных подмножеств евклидовых пространств на сами эти пространства с сохранением свойств субгармоничности и гладкости продолжаемых функций (соответствующая проблема непрерывного продолжения в более простой постановке типа Рунге изучалась с конца 1950-х годов). Пусть $K$ — объединение конечного числа попарно непересекающихся замкнутых областей Ляпунова в $\mathbb{R}^N$ со связным дополнением, $N \geq 2$. Тогда при $m \in [1, 3)$ всякая функция $f$ класса $C^m(K)$, субгармоническая внутри $K$, может быть продолжена до функции $F$ класса $C^m(\mathbb{R}^N)$, субгармонической на всем $\mathbb{R}^N$ (при $N > 2$ дополнительно дается оценка $C^m$-нормы функции $F$ на $\mathbb{R}^N$ через $C^m$-норму функции $f$ на $K$). Установлено, что при $m \in [0, 1) \cup [3, +\infty)$ аналог указанного утверждения не верен даже для замкнутых шаров. Приведены примеры показывающие, что при $m = 1$ полученные достаточные условия продолжения близки к необходимым. Так, с замкнутых жордановых областей с границей класса $C^1$ указанного типа продолжения не всегда возможны. Эти результаты опубликованы в [22], [23] и других работах. Отметим, что задача о $C^m$-субгармонических продолжениях типа Рунге полностью решена в работе [44].

М.Я. Мазалов (докторант кафедры ТФФА с 2008 по 2011 г.) в работе [20] получил критерий равномерной приближаемости гармоническими функциями в индивидуальной форме, обобщающий классический критерий Келдыша-Дени для классов функций (1941, 1949). Соответствующая проблема была известна уже более полувека (форма ответа в качестве гипотезы была сформулирована П.В. Парамоновым по аналогии с известным критерием А.Г. Витушкина (1967) для рациональных аппроксимаций). Критерий Мазалова состоит в следующем.

Пусть $N \geq 3$ натурально, $f$ – непрерывная (вещественная) функция в $\mathbb{R}^N$ с компактным носителем, $X$ – компакт в $\mathbb{R}^N$. Пусть существуют постоянная $k \geq 1$ и функция $\omega(t) \searrow 0$ при $t \searrow 0$, такие, что для любого открытого шара $B = B(a, \delta)$ (с радиусом $\delta$ и центром в точке $a$) в $\mathbb{R}^N$ с границей $S$ имеет место оценка

$$\left| \frac{1}{\sigma(S)} \int_S f(x)\, d\sigma_x - \frac{1}{m(B)} \int_B f(x)\, dm_x \right| \leq \omega(\delta)\delta^{2-N} Cap(kB \setminus X),$$

где $d\sigma_{(\cdot)}$ — поверхностная ($(N-1)$-мерная Лебегова) мера на $S$, $dm_{(\cdot)}$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^N$, $kB = B(a, k\delta)$, $Cap(\cdot)$ — (винеровская) гармоническая емкость в $\mathbb{R}^N$. Тогда $f$ равномерно на $X$ с любой точностью приближается функциями, гармоническими (каждая в своей) окрестности $X$.

Обратно, если $f$ приближаема в только что указанном смысле, то последняя оценка выполнена для $k = 1$, а в качестве функции $\omega(t)$ достаточно взять $A\omega(f, t)$, где $A > 0$ — зависящая только от размерности $N$ подходящая постоянная, а $\omega(f, t)$ – модуль непрерывности функции $f$ на $\mathbb{R}^N$.

В работах М.Я. Мазалова, П.В. Парамонова и К.Ю. Федоровского (в прошлом аспирант кафедры ТФФА) получены серьезные продвижения в теории равномерных приближений полианалитическими функциями на компактах комплексной плоскости (см., напр., [21]).

*Аппроксимации Эрмита-Паде для систем функций марковского типа и их приложения к задачам математической физики и теории диофантовых приближений.* Исследование асимптотического поведения совместных рациональных аппроксимаций аналитических функций начиналось с так называемых систем Анжелеско. Они состоят из преобразований Коши положительных мер с носителями на дизъюнктных отрезках вещественной оси. В 1979-1981 годах А.А.Гончаром и Е.А.Рахмановым была полностью построена асимптотическая теория этих аппроксимаций. В то же время Е.М.Никишин предложил другие классы марковских функций, построение которых естественным образом повторяет процедуру построения римановых поверхностей полных аналитических функций. Для этих классов Е.М.Никишин построил асимптотическую теорию поведения функциональных линейных форм с полиномиальными коэффициентами (аппроксимации первого типа). Тем не менее, описать асимптотику рациональных аппроксимаций с общим знаменателем (аппроксимаций второго типа) и, в частности, доказать гипотезу Никишина о сходимости этих аппроксимаций не удавалось в течении семнадцати лет, хотя на протяжении всего этого времени многими авторами предпринимались многочисленные попытки. Лишь в 1997 году в совместной работе А.А.Гончара, Е.А.Рахманова. В.Н.Сорокина эта задача была решена полностью. Более того, задача была решена для более широких классов аналитических функций, содержащих системы Анжелеско и системы Никишина в качестве частных случаев. Функции таких систем удобно нумеровать ветвящимеся графами-деревьями.

В последние десять лет В.Н. Сорокин продолжал развивать эти результаты в двух направлениях (см., напр., [34]).

Во-первых, помимо графов-деревьев он рассмотрел и циклические графы. Во-вторых, им изучался более широкий класс аппроксимаций, частными случаями которых являются аппроксимации первого и второго типа. Эти обобщения развивались в связи с дальнейшими приложениями к решению некоторых задач математической физики и теории диофантовых приближений. На этом пути были, в частности, получены следующие результаты.

Были полностью проинтегрированы некоторые классы бесонечномерных динамических систем, а именно, цепочки Богоявленского (иерархия начинающаяся с цепочек Тоды и Ленгмюра). В теории чисел были получены новые оценки меры линейной независимости значений различных классов обобщенных полилогарифмов в алгебраических точках, а также значений дзета-функции Римана [35]. Улучшены оценки меры трансцендентности числа $\pi^2$, меры иррациональности чисел $\log 3$ и $\pi^4$.

## Список литературы


[1] *Аптекарев А.И.*, Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций // Матем. сборник, 2002, т. 193, №. 1, с. 3–72.

[2] *Бахвалов А.Н.*, О локальном поведении многомерной $\Lambda$-вариации // Матем. сборник, 2010, т. 201, №11, с. 3–18.

[3] *Бахвалов А.Н.*, Представление непериодических функций ограниченной $\Lambda$-вариации интегралом Фурье в многомерном случае // Изв. РАН. Сер. матем., 2003, т. 67, №6, с. 3–22.

[4] *Бахвалов А.Н.*, Непрерывность по $\Lambda$-вариации и суммирование методами Чезаро кратных рядов Фурье // Матем. заметки, 2011, т. 90, №4, с. 483–500.

[5] *Богачев В.И., Колесников А.В.*, Задача Монжа – Канторовича: достижения, связи и перспективы // Успехи матем. наук, 2012, т. 67, №5, с. 3–110.

[6] *Богачев В.И., Колесников А.В., Медведев К.В.*, Треугольные преобразования мер // Матем. сборник, 2005, т. 196, №3, с. 3–30.

[7] *Богачев В.И., Крылов Н.В., Рёкнер М.*, Эллиптические и параболические уравнения для мер // Успехи матем. наук, 2009, т. 64, №6, с. 5–116.

[8] *Богачев В.И., Смолянов О.Г., Соболев В.И.*, Топологические векторные пространства и их приложения, Москва – Ижевск, «Регулярная и Хаотическая Динамика», 2012.

[9] *Бородин П.А.*, О выпуклости $N$-чебышевских множеств // Известия РАН. Сер. матем., 2011, т. 75, №5, с. 19–46.

[10] *Бургейн Ж., Кашин Б.С.*, О равномерном приближении частной суммы ряда Дирихле более короткой суммой и Ф-поперечниках // Матем. сборник, 2012, т. 203, №12, с. 57–80.

[11] *Владимиров А.А., Шейпак И.А.*, Асимптотика собственных значений задачи Штурма – Лиувилля с дискретным самоподобным весом // Матем. заметки, 2010, т. 88, №5, с. 662–672.

[12] *Владимиров А.А., Шейпак И.А.*, Асимптотика собственных значений задачи высшего четного порядка с дискретным самоподобным весом // Алгебра и анализ, 2012, т. 24, №2, с. 104–119.

[13] *Даниленко А.И., Рыжиков В.В.*, Спектральные кратности преобразований, сохраняющих бесконечную меру // Функц. анализ и его прил., 2010, т. 44, №3, с. 1–13.

[14] *Долженко Е.П.*, Оценки модулей непрерывности конформных отображений областей вблизи их достижимых граничных дуг // Матем. сборник, 2011, т. 202, №12, с. 57–106.

[15] *Домрин А.В.*, Мероморфное продолжение решений солитонных уравнений // Известия РАН. Сер. Матем., 2010, т. 74, №. 3, с. 23–44.

[16] *Домрин А.В.*, О голоморфных решениях уравнений типа Кортевега-де Фриза. // Труды ММО, 2012, т. 73, №. 2, с. 241–257.

[17] *Дъяченко М.И.*, Об одном классе методов суммирования кратных рядов Фурье // Матем. сборник, 2013, т. 204, №3.

[18] *Кашин Б.С., Темляков В.Н.*, Замечание о задаче сжатого измерения // Матем. заметки, 2007, т. 82, №6, с. 829–837.

[19] *Козлов В.В., Смолянов О.Г.*, Функция Вигнера и диффузия в бесстолкновительной среде, состоящей из квантовых частиц // Теор. вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, №1, с. 109–125.

[20] *Мазалов М.Я.*, Критерий равномерной приближаемости гармоническими функциями на компактах в $\mathbb{R}^3$ // Труды МИРАН, 2012, т. 279, с. 120–165.

[21] *Мазалов М.Я., Парамонов П.В., Федоровский К.Ю.*, Условия $C^m$ - приближаемости функций решениями эллиптических уравнений// Успехи матем. наук, 2012, т. 67, №. 6, с. 53–100.

[22] *Парамонов П.В.*, О $C^1$-продолжении и $C^1$-отражении субгармонических функций с областей Ляпунова- Дини на $\mathbb{R}^N$ // Матем. сборник, 2008, т. 199, №. 12, с. 79–116.

[23] *Парамонов П.В.*, О $C^m$-продолжении субгармонических функций с областей Ляпунова–Дини на $\mathbb{R}^N$// Матем. заметки, 2011, т. 89, №. 1, с. 149–152.

[24] *Потапов М.К.*, О приближении дифференцируемых функций в равномерной метрике // Труды МИРАН, 2005, т. 248, с. 223-236.

[25] *Потапов М.К.*, О приближении алгебраическими многочленами дифференцируемых функций // ДАН, 2005, т. 409, №6, с. 1-3.

[26] *Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю.*, О соотношениях между модулями гладкости в разных метриках // Вестник МГУ. Сер. Матем., мех., 2009, №3, с. 36-43.

[27] *Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю.*, Соотношения между смешанными модулями гладкости и теоремы вложения классов Никольского // Труды МИРАН, 2010, т. 269, с. 204-214.

[28] *Рыжиков В.В.*, Слабые пределы степеней, простой спектр симметрических произведений и перемешивающие конструкции ранга 1 // Матем. сборник, 2007, т. 198, №5, с. 137–159.

[29] *Савчук А.М.*, Метод отображений в обратных задачах Штурма – Лиувилля с сингулярными потенциалами // Труды МИРАН, 2008, т. 261, с. 243–248.

[30] *Савчук А.М., Шкаликов А.А.*, О свойствах отображений, связанных с обратной задачей Штурма – Лиувилля // Труды МИРАН, 2008, т. 260, с. 227–247.

[31] *Савчук А.М., Шкаликов А.А.*, Обратные задачи для уравнения Штурма – Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева // Функц. анализ и его прил., 2010, т. 44, №4, с. 104–125.

[32] А.Г.Сергеев, *Геометрическое квантование пространств петель*, Москва: МИАН, 2009.

[33] А.Г.Сергеев, *Лекции об универсальном пространстве Тейхмюллера*, Москва: МИАН, 2013.

[34] *Сорокин В.Н.*, Обобщенные многочлены Полачека // Матем. сборник, 2009, т. 200, №4, с. 113–130.

[35] *Сорокин В.Н.*, Совместные приближения корня, логарифма и арксинуса // Вестник МГУ. Сер. матем., мех., 2009, №2, с. 65–69.

[36] *Степин А.М., Еременко А.М.*, Неединственность включения в поток и обширность централизатора для типичного сохраняющего меру преобразования // Матем. сборник, 2004, т. 195, №12, с. 95–108.

[37] *Федоров В.М.*, О характеристике чебышевских конусов конечной размерности и конечной коразмерности // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Мех., 2008, №6, с. 9–25.

[38] *Шейпак И.А.*, Особые точки самоподобной функции нулевого спектрального порядка. Самоподобная струна Стилтьеса // Матем. заметки, 2010, т. 88, №2, с. 303–316.

[39] *Шкаликов А.А.*, О базисности корневых векторов возмущенного самосопряженного оператора // Труды МИРАН, 2010, т. 269, с. 290–303.

[40] *Aptekarev A.I., Bleher P.M., Kuijlaars A.B.J.*, $n$ limit of Gaussian random matrices with external source // Comm. Math. Phys., 2005, v. 259, p. 367–389.

[41] *Beloshapka V.K., Kossovskiy I.G.*, Classification of homogeneous $CR$-manifolds in dimension 4 // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, v. 374, p. 655–672.

[42] *Bogachev V.I.*, Measure theory. V. 1, 2. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[43] *Bogachev V.I.*, Differentiable measures and the Malliavin calculus. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2010.

[44] *Boivin A., Gauthier P.M., Paramonov P.V.*, $C^m$-subharmonic extension of Runge-type from closed to open subsets of $\mathbb{R}^N$ // Труды МИРАН, 2012, т. 279, с. 1–8.

[45] *Dales H.G., Ghahramani F., Helemskii A.Ya.*, The amenability of measure algebras // J. London Math. Soc. II. Ser., 2002, v. 66, №1, p. 213–226.

[46] *Dyachenko M.I., Waterman D.*, Convergence of double Fourier series and W-classes // Trans. Amer. Math. Soc., 2005, v. 357, №1, p. 397-407.

[47] *Kashin B.S., Szarek S.J.*, The Knaster problem and the geometry of high-dimensional cubes // C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 2003, v. 336, №11, p. 931–936.

[48] *Helemskii A.Ya.*, Quantum functional analysis. Amer. Math. Society, Providence, Rhode Island, 2010.

[49] *Henstock R., Muldowney P., Skvortsov V.A.*, Partitioning for infinite-dimensional spaces for generalized Riemann integration // Bull. London Math. Soc, 2006, v. 38, №5, p. 795-803.

[50] *Nazarov A.I., Sheipak I.A.*, Degenerate self-similar measures, spectral asymptotics and small deviations of Gaussian processes // Bull. London Math. Soc., 2012, v. 44, p. 12–24.

[51] *Neretin Yu.A.*, Multi-operator colligations and multivariate characteristic functions // Anal. Math. Phys., 2011, v. 1, №2-3, p. 121–138.

[52] *Neretin Yu.A.*, Infinite tri-symmetric group, multiplication of double cosets, and checker topological field theories // Intern. Math. Research. Notes, 2012, №3, p. 501–523.

[53] *Skvortsov V.A.*, Henstock integral in harmonic analysis // Scientiae Mathematicae Japonicae, analysis, 2008, v. 67, №1, p. 71—82.

[54] *Skvortsov V.A., Tulone F.*, Henstock type integral in Harmonic Analysis on Zero-dimensional groups // Journal Math. Anal. and Appl., 2006, v. 322, №2, p. 621-628.

[55] *Skvortsov V.A., Tulone F.*, Kurzweil-Henstock type integral on zero-dimensional group and some of its application // Czechoslovak Math. J., 2008, v. 58(133), №4, p. 1167-1183.