МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет механики и математики

На

правах рукописи

Хорев Константин Павлович

Применение численных методов к исследованию кредитных рынков с явными и неявными опционами

Шифр и наименование специальности

Диссертация на соискание научной степени кандидата

физико-математических наук

Научный руководитель: д.ф. - м.н., проф. Шамаев А.С.

Москва – 2006 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ... 3

Актуальность исследования ... 3

Постановка задачи ... 5

История вопроса и новизна полученных результатов ... 10

ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ И МЕТОДОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ... 16

1.1. Основные определения ... 16

1.2. Математические модели динамики процентных ставок ... 24

1.3. Методология оценки производных финансовых инструментов ... 26

1.4. Численные методы в применении к задаче оценки опционов ... 31

ГЛАВА 2. ОЦЕНКА ОПЦИОНА НА СПРЭД МЕЖДУ ДВУМЯ ФОРВАРДНЫМИ ПРОЦЕНТНЫМИ СТАВКАМИ ... 32

2.1. Описание модели кредитного рынка ... 32

2.2. Вывод цены спрэд-опциона ... 39

2.3. Частный случай и численный пример ... 45

2.4. Приложения ... 51

ГЛАВА 3. ОПРЕДЕНИЕ СТАВКИ ПО КРЕДИТУ С ВОЗМОЖНОСТЬЮ ДОСРОЧНОГО ПОГАШЕНИЯ ... 57

3.1. Описание модели кредитного рынка ... 57

3.2. Система уравнений для определения C(0) ... 60

3.3. Аналитические выражения для C(0) для некоторых частных случаев ... 67

3.4. Алгоритм численного решения системы (5) ... 70

3.5. Степенные модели волатильности ... 71

3.6. Оценка параметров модели и численный пример ... 74

3.7. Альтернативный способ вывода системы уравнений по определению ставки по кредиту с возможностью досрочного погашения ... 80

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ... 85

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ... 89

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования

С появлением и дальнейшем развитием в России рыночных отношений, кредитных организаций и фондового рынка возникла необходимость построения математических моделей, которые могли бы использоваться при решении различных проблем как макроэкономического (т.е. на уровне страны в целом), так и микроэкономического (т.е. на уровне отдельной компании, рынка, ценной бумаги и пр.) характера. Такие модели в идеале должны были бы учитывать как мировой опыт, так и российскую специфику. Последнее, в частности, подразумевает калибровку моделей на основе российских исторических данных. Подобные модели могли бы в дальнейшем применяться, например, для математических симуляций развития различных экономико-финансовых процессов, а также для построения оценок тех или иных параметров окружающей нас экономической конъюнктуры, включая цены различных ценных бумаг, значений процентных ставок и т.д.

С учетом бурного развития российской экономики, роста доходов населения и притока иностранного капитала, которые наблюдаются в течение последних пяти лет, одной из наиболее перспективных тем для исследований является анализ российского рынка капитала. Под рынком капитала мы будем понимать как классический фондовый рынок для торговли первичными (акциями и облигациями) и вторичными (или производными: фьючерсами, опционами и пр.) ценными бумагами, так и банковский сектор, основным продуктом которого являются кредитные инструменты.

В рамках исследования российского рынка капитала можно также выделить его две наиболее, на наш взгляд, интересные на текущий момент характеристики: бурное развитие сегмента долговых инструментов, включающих в себя банковские кредиты и облигации, и появление в России торговли производными инструментами, в первую очередь фьючерсами и опционами.

Существует несколько причин, по которым рынок долгового капитала стал играть все большую и большую роль в российской экономике и по темпам развития (как количественного, так и качественного) опережает рынок акций. На качественном уровне достаточно подробно эти причины изложены в статье [26]. Более того, для таких участников рынка капитала, как региональных и местных органов власти, как показано в [28], выход на рынок облигаций, является, пожалуй, единственным способом привлечь дополнительные денежные ресурсы.

Помимо стремительного развития рынка и роста интереса к долговым инструментам, необходимо отметить также то, что в последнее время большое внимание уделяется и развитию рынка производных ценных бумаг (т.е. инструментов, чья стоимость зависит от других, базовых или первичных, активов). Подтверждением тому служит тот факт, что в структуре рынка РТС (Российской торговой системы) появилась секция FORTS (Futures-Options Russian Trading System), предназначенная для торговли фьючерсами и опционами.

При этом особый интерес, как с теоретической, так и с практической точек зрения представляет рынок комбинированных финансовых инструментов, которые включают в себя черты или тем или иным способом связывают как долговые, так и производные инструменты. Анализу, моделированию и построению оценок таких комбинированных финансовых инструментов и посвящена настоящая диссертационная работа.

Строгое математическое описание исследуемых в настоящей работе задач, наряду с более подробной экономической интерпретацией, будут даны после введения в математический аппарат и методологию (Глава 1), ниже приведено описание исследуемых задач на качественном уровне.

Постановка задачи

В первой части работы мы исследуем вопрос оценки стоимости европейского кол-опциона на спрэд (или иными словами, разность) между двумя форвардными процентными ставками. Суть рассматриваемого опционного контракта, заключаемого в момент времени t, состоит в следующем. В заранее оговоренный момент T $(T>t)$, называемый временем исполнения опциона, становятся известными две форвардные процентные ставки; если спрэд между ними превышает опять-таки заранее оговоренный уровень, называемый ценой исполнения опциона (execution price), то продавец опционного контракта платит покупателю сумму, равную разности спрэда и этого уровня. Опционы подобного типа в западной литературе принято относитьь к категории так называемых «экзотических опционов» («exotic options»).

Приведем примеры ситуаций из реальной жизни, в которых может возникать потребность в совершении сделок купли-продажи с таким опционом и, соответственно, потребность в определении цены такого опциона. Представим себе некую финансовую организацию, которая привлекает краткосрочные финансовые ресурсы и одновременно осуществляет долгосрочные инвестиции. Прибыль такой компании напрямую или косвенно зависят от величины спрэда между долгосрочными и краткосрочными процентными ставками, причем, возможно, при уменьшении спрэда ниже определенного уровня компания может начать нести убытки. Соответственно, организация несет риск сужения этого спрэда, который ей хотелось бы захеджировать (или иными словами – застраховать) тем или иным способом. Один из таких способов – продажа описанного выше опционного контакта. При сужении спрэда организация несет убытки от своей основной деятельности, которые (частично) компенсируются суммой средств, поступившей о продажи опциона. При расширении спрэда и превышении им порогового уровня цены исполнения опциона компания может нести убытки из-за операции с опционом, однако при этом компания получает прибыль от своей основной деятельности. Таким образом происходит сглаживание совокупной прибыли компании, в чем собственно и состоит основная цель хеджирования.

Подобные опционы могут быть использованы и для спекулятивных стратегий[1]. Приведем пример. Для этого отметим сначала следующую особенность долговых рынков: в периоды понижения «коротких» процентных ставок, например, в периоды стимулирующей монетарной политики, долгосрочные процентные ставки снижаются, как правило, менее быстрыми темпами по сравнению с краткосрочными, что приводит к расширению спрэда между «короткими» и «длинными» форвардными ставками. Подобную тенденцию можно наблюдать на кредитных рынках многих стран, в том числе и на российском рынке. Поэтому выражаясь биржевым языком, на данной тенденции можно «играть», покупая описанный выше опцион.

Приведенные выше примеры показывают, что на такие, экзотические на первый взгляд, опционы, как описанный выше опцион на спрэд между двумя форвардными ставками, существует как спрос, так и предложение, а следовательно, существует и потребность в построении их оценок.

Вторая часть настоящей диссертационной работы посвящена анализу ценообразования на рынке услуг ипотечного кредитования (ипотеке), которому в последнее время в нашей стране уделяется большое внимание. Одной из особенностей ипотеки является предоставляемая заемщику возможность досрочного погашения ипотечного кредита. При этом кредитор сталкивается с риском снижения процентных ставок в будущем. При снижении процентных ставок, заемщику становится выгодным рефинансироваться под более низкую процентную ставку путем досрочного погашения своего старого кредита, при этом доходы кредитора снижаются. Поэтому процентная ставка по ипотечному кредиту должна учитывать этот эффект и, как следствие, быть выше по сравнению с обычным кредитом (т.е. кредитом без возможности досрочного погашения).

Ипотечное кредитование обладает и другими особенностями, например, тем, что ипотека представляет собой обеспеченный кредит (в качестве залога выступает недвижимое имущество, для приобретения которого кредит, собственно говоря, и привлекается заемщиком). Кроме того, нельзя забывать, что при ипотечном кредитовании присутствует риск неисполнения заемщиком своих обязательств перед кредитором (так называемый риск дефолта). Однако в данной работе мы не будем рассматривать эти аспекты и сосредоточимся на анализе именно того факта, что ипотека – кредит с возможностью досрочного погашения. Одной из главных причин применения такого подхода, помимо облегчения исследования задачи, является тот факт, что практическое применение

---

[1] Под спекулятивными стратегиями понимаются рисковые стратегии, реализуемые с целью получения

результатов, получаемых при анализе других особенностей ипотеки, весьма затруднено отсутствием соответствующих исторических данных, которые необходимы для калибровки модели (например, отсутствуют данные по дефолтам по ипотечным кредитам, т.к. рынок последних появился совсем недавно). В то же время данные по процентным ставкам по кредитам без возможности досрочного погашения существуют (хотя, безусловно, и их качество оставляет желать лучшего) и это позволит (опять-таки, в определенных пределах) применять результаты излагаемого исследования на практике.

Если задаться попыткой сформулировать изучаемую во второй части данной работы задачу в одном предложении, то оно будет звучать следующим образом: «найти величину процентной ставки по кредиту с возможностью досрочного погашения, если известны текущее значение и закон изменения процентной ставки по кредиту без возможности досрочного погашения».

Как будет показано, решение данной задачи сводится задаче нахождения цены определенного опциона американского типа, поскольку фактически кредитный инструмент с возможностью досрочного погашения представляет собой комбинацию опциона и обычного кредита без возможности досрочного погашения. Подобные опционы называются «вложенными» или «неявными» («embedded options»), в отличие от спрэд-опционов, рассматриваемых в первой части работы, которые представляют

прибыли, в отличие от хеджирующих стратегий, основной целью которых является страхование рисков собой самостоятельные финансовые инструменты и поэтому относятся к категории «явных опционов».

Таким образом, как можно видеть, исследование кредитных рынков в данной работе основано на применении достаточно хорошо развитой к настоящему моменту теории опционов, что во многом также представляет собой влияние общемировой тенденции. Действительно, область применения теории опционов постоянно расширяется, понятие опциона используется во все больших и больших экономических теориях: помимо описанных выше случаях и являющихся предметом интереса данной работы примерах, теория опционов успешно применяется при оценке привлекательности инвестиционных проектов в реальном секторе (при этом возникают, так называемые «реальные опционы» - real options - см., например, работы [7], [1], [8]), расчетах стоимости рисковых облигаций ([2]), анализе роли высшего образования ([9]) и во многих других областях.

История вопроса и новизна полученных результатов

Поставленные выше задачи относятся к области, которая на западе носит название financial engineering (финансовая инженерия). Толчок к своему возникновению и последующему бурному развитию она получила после публикации в 1973 г. американскими учеными Ф. Блеком, М. Скоулсом и Р. Мертоном серии работ (см. [2], [18]), посвященных задачам построения оценок опционов, которые до этого момента длительное время не поддавались решению. За свои революционные идеи и результаты, Скоулс и Мертон были удостоены Нобелевской премии. Вместе с тем, рассмотренные учеными случаи обладали рядом недостатков, поскольку, в числе прочих, накладывали следующие достаточно сильные условия на рассматриваемый рынок:

- постоянство безрисковой процентной ставки;
- закон динамики базового актива S представляет собой геометрическое броуновское движение, т.е. $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$, где μ и σ – константы, W – винеровский процесс.

Кроме того, были рассмотрены наиболее простые типы опционов, так называемые plain vanilla options, в которых выплата опциона представляет собой функцию $(S-K)^+$, где S – указанный выше актив, K – цена исполнения опциона.

Разумеется, указанные выше условия, накладываемые на рыночную модель, а также вид анализируемых опционов не могут более удовлетворять потребностям участников рынка капитала, который с течением времени обогащался и продолжает обогащаться все новыми и новыми финансовыми инструментами. В частности, если речь идет о рассмотрении опционов, чья функция выплаты зависит от величины процентной ставки, то предположение о ее постоянстве естественно недопустимо.

Тем не менее, основные идеи, заложенные в предъявленной Ф. Блеком, М. Скоулсом и Р. Мертоном методологии, позволили в дальнейшем успешно решать задачи оценки более сложных опционов (которые носят также название экзотических опционов, exotic options), в которых выплата опциона представлена более сложной функцией и может зависеть от значений нескольких рыночных показателей, а указанные выше условия, налагаемые на рынок, в рамках которого эти опционы рассматриваются, могут быть ослаблены, что делает рыночную модель более сложной и одновременно более реалистичной. Достаточно подробное описание современной методологии оценки опционов и других производных финансовых инструментов можно найти, например, в работах [29], [30], [11]. Однако указанные работы посвящены общей методологии оценки, без учета особенностей опционов специальных типов. Рассмотрим теперь статьи, относящиеся к оценке опционов, исследуемых в настоящей работе.

Обзор работ, вместе с описанием основных трудностей, связанных с построением оценок спрэд-опционов можно найти, например, в [19]. Как показано в этой работе, основной проблемой, с которой приходится сталкиваться при оценивании спрэд-опционов, – это отсуствие аналитического решения. Поэтому зачастую вместо спрэд-опционов рассматриваются опционы на обмен (exchange options), которые можно рассматривать как своего рода частные случаи спрэд-опционов с ценой исполнения, равной нулю. Аналитические формулы стоимости некоторых таких опционов приведены в работах [9], [17].

Как показано выше, особый интерес и одновременно сложность представляют исследования спрэд-опционов, чья стоимость привязана к значениям показателей кредитных рынков (например, процентных ставок). При этом работ, посвященных данной тематике, крайне мало. Статья [9] содержит исследование опциона, чья стоимость зависит от спот-ставок кредитного рынка, однако опять-таки исследуется опцион на обмен, а не спрэд-опцион. Для российского же рынка анализ подобного рода экзотических финансовых инструментов практически отсутствует.

Задача об определении процентной ставки по ипотечному кредиту, как показано далее, также может быть сведена к задаче нахождения цены определенного опциона американского типа. Наиболее ранние исследования рынка ипотечного кредитования, основывающиеся на использовании данного подхода, датируются началом 80-х и могут быть найдены в работах [4], [20], обзор работ на данную тематику содержится, например, в [15]. Вместе с тем, в связи со сложностями, связанными с вычислением цен опционов (особенно американского типа), работы, содержащие аналитические решения соответствующих задач, практически отсутствуют. Исследования же российского ипотечного кредитного рынка с применением теории опционов автору не встречались.

В данной работе представлена попытка решить сразу несколько задач. Первой целью было восстановление вышеуказанного пробела в исследовании экзотических финансовых инструментов на российском рынке капитала. Одновременно с этим мы пытались анализировать те финансовые инструменты, которые до настоящего времени оставались за пределами мировых исследований и поэтому представленная техника вывода оценки рассмотренных инструментов будет интересна также и для участников международного рынка капитала. Особое внимание поэтому уделено экономико-финансовой мотивации исследования рассмотренных в данной работе финансовых инструментов и возможностям применения полученных результатов на практике.

Настоящая работа содержит следующие основные результаты:

1. была построена аналитическая оценка стоимости опциона на спрэд между двумя форвардными процентными ставками, что само по себе является новым результатом (сослаться на предыдущие работы);
2. была построена дифференциально-алгебраическая система уравнений для определения процентной ставки по кредиту с возможностью досрочного погашения. Были рассмотрены вопросы как аналитического, так и численного решения полученной системы. Был проведен качественный анализ зависимости искомой величины процентной ставки от различных параметров модели долгового рынка;
3. модели, в рамках которых были получены вышеуказанные результаты, были откалиброваны на основе российских

исторических данных, после чего были получены конкретные численные оценки искомых показателей, которые могут в дальнейшем применяться участниками российского рынка капитала;

4. Были проанализированы области применения полученных результатов и представлены направления для дальнейших исследований.

ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ И МЕТОДОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

В данной главе приводятся основные определения и утверждения, используемые в основном тексте работы. Настоящий раздел не содержит новых результатов, большинство утверждений приводится без доказательств.

1.1. Основные определения

Под финансовым инструментом (или активом) будем понимать контракт, в рамках которого агент, приобретающий инструмент и платящий за это определенную денежную сумму, может рассчитывать на поток платежей в будущем. При этом поток платежей может, вообще говоря, носить случайный характер. Будем считать, что каждый актив является абсолютно ликвидным, т.е. может быть в любой момент куплен или продан, причем цена покупки и продажи совпадают. Множество финансовых инструментов называется рынком ценных бумаг (или просто рынком).

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \Im, P)$ и фильтрация $\{\Im_t; t \in [0,\tau]\}$. Пусть $(M+1)$ актив с ценами $\{\mathrm{X_i(t)}\}_{i=0}^{N}$ $(t \in [0,\tau])$ составляют рынок. Каждый $\mathrm{X_i(t)}$ представляет собой случайный процесс, причем $X_i(t) \in \Im_t, i = 0,...,M, 0 \le t \le \tau$ и имеют следующий вид:

$$\mathrm{X_0(t)=exp}\left(\int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{r(s)ds}\right),$$

$$dX_i(t) = m_i(t,\omega)dt + \sum_{i=1}^{N} \sigma_{ij}(t,\omega)dW_j(t),\ X_i(0) = X_i^0,\ i = 1,...,M.$$

Случайный процесс $\mathrm{r(t)}$ называется мгновенной безрисковой процентной ставкой (или спот-ставкой) в момент времени t, а актив $\mathrm{X_0(t)}$ – счетом денежного рынка (money market account).

Обозначим через $\sigma(t,\omega)$ матрицу, составленную из элементов $\sigma_{ij}(t,\omega)$.

Кроме активов $\{\mathrm{X_i(t)}\}_{i=1}^{M}$ будем также рассматривать дисконтированные активы $\{\mathrm{Z_i(t)}\}_{i=1}^{M}$, цены которых определим как:

$$\mathrm{Z_i(t)} = \mathrm{X_0^{-1}}(t)X_i(t)\ ,\ i = 1,...,M$$

Портфелем (или стратегией) на рынке называется $\Im_t$-согласованный случайный процесс $\theta(\mathrm{t}) = (\theta(\mathrm{t})_0,...,\theta_M(\mathrm{t}))$, стоимостью портфеля – величина

$$V^{\theta}(t) = \sum_{i=0}^{M} \theta_i(\mathrm{t})\mathrm{X_i}(t).$$

Портфель называется самофинансируемым, если имеет место:

$$V^{\theta}(t) = V^{\theta}(t) + \int_0^t \theta(\mathrm{s})\mathrm{X}(s)ds,$$

где $\theta(\mathrm{s})\mathrm{X}(s) = \sum_{i=0}^{N} \theta_i(\mathrm{s})\mathrm{X}_{\mathrm{i}}(s)$, $0 \le t \le \tau$.

Портфель $\theta(\mathrm{t})$ называется допустимым, если он самофинансируемый и существует $K = K(\theta) < \infty$ такое, что п. н. $V^{\theta}(t) \ge -K$, $\forall t \in [0, \tau]$.

Допустимый портфель $\theta(\mathrm{t})$ называется арбитражем на рынке, если соответствующий стоимостной процесс удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $V^{\theta}(0) = 0$;

2) $V^{\theta}(t) \ge 0$ (почти наверное);

3) $P\left(V^{\theta}(\tau) > 0\right) > 0$.

На понятии арбитража необходимо остановиться подробнее. Фактически арбитражная стратегия означает неограниченную возможность «делать деньги из воздуха». Поэтому в иногда арбитраж называют также «money machine» или «money pump». Простейшим примером арбитража в реальной жизни может служить следующая ситуация. Представим себе, что какой-то товар, скажем, золото свободно продается и покупается у двух торговцев по различным ценам. При этом существует возможность бесплатной транспортировки золота от одного торговца к другому. Понятно, что описанная ситуация предоставляет возможности для арбитража. Соответствующая стратегия будет заключаться в покупке золота по более низкой цене и последующей продаже его по более высокой.

Очевидно, что в реальной жизни арбитраж не может существовать ни на одном рынке, поскольку в противном случае им бы сразу бы воспользовались участники рынка, и это привело бы к бесконечному обогащению всех игроков, что невозможно по причине ограниченности доступных ресурсов. В связи с этим в большинстве случаев при построении математических моделей финансовых рынков в качестве дополнительного ограничения предполагается отсутствие арбитража на рынке. Однако отложим рассмотрение подобных ограничений до раздела, посвященного методологии оценки проризводных финансовых инструментов.

Отметим только еще необходимость условия $V^{\theta}(t) \geq -K$ в определении допустимой стратегии. Фактически данное условие означает, что участник рынка может использовать кредитные ресурсы (а отрицательная стоимость портфеля как раз и представляет собой задолженность участника рынка) лишь в ограниченном объеме. Это обосновано тем, что в реальной жизни у любого участника рынка есть ограничения по размеру предоставляемой ему кредитной линии, после превышения которой он объявляется банкротом и лишается возможности вести дальнейшие операции.

Перейдем теперь к определению опционов.

<u>Европейским условным T-иском</u> ($\mathrm{T} \in [0,\tau]$) называется ограниченная снизу $\Im_T$-измеримая случайная величина $F(\omega)$. Европейский опцион на иск $F(\omega)$ – это гарантия того, что сумма $F(\omega)$ будет выплачена в момент времени T.

<u>Американским условным T-иском</u> ($\mathrm{T} \in [0,\tau]$) называется ограниченный снизу $\Im_t$-измеримый случайный процесс $F(t,\omega)$, $t \in [0,\mathrm{T}]$. <u>Американский опцион</u> на иск $F(t,\omega)$ дает его владельцу возможность (но не обязательство) выбора момента времени исполнения опциона $\hat{\mathrm{T}}(\omega) \in [0,\mathrm{T}]$, в результате которого сумма $F\left(\hat{T}(\omega),\omega\right)$ будет выплачена владельцу опциона.

Теперь рассмотрим частный пример рынка – а именно, рынок долговых инструментов.

Обозначим через $\mathrm{B(t,T)}$ цену в момент t финансового инструмента, который с вероятностью 1 в момент T обеспечивает своему владельцу выплату в сумме 1 (т.е. $B(T,T)=1$ почти наверное). Такой финансовый инструмент будем называть <u>долговым инструментом</u>, им, как легко видеть, может быть как бескупонная облигация, так и банковский кредит, у которого срок выплаты процентов совпадает со сроком погашения. При этом при условии совершенной конкуренции, а также при условии исключения из рассмотрения каких-либо вторичных факторов (таких, например, как разницы в налогообложении, отражении в бухгалтерском учете и пр.), различие между этими двумя видами финансовых инструментов с математической точки зрения только в названии. Вопрос выбора того или иного названия при этом имеет смысл лишь тогда, когда речь заходит о конкретном способе применения полученных результатов. Соответственно, в зависимости от ситуации (а точнее, от области применения) будем называть множество $\{B(t,T)\}$ либо рынком облигаций, либо рынком кредитов, а в общем случае будем назвать указанное множество долговым рынком или рынком долговых инструментов.

Обозначим теперь $R(t,T) := -\dfrac{\ln B(t,T)}{T-t}$, что представляет собой величину безрисковой процентной ставки в годовом исчислении на период (t,T) при условии непрерывного правила начисления процентов. Действительно,

$$B(t,T) = \exp\left(-R(t,T)(T-t)\right) = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{R(t,T)}{n}\right)^{n}\right]^{T-t}}.$$

Зависимость функции $R(t,T)$ от T для конкретного момента времени t называется временной структурой процентных ставок (Term structure of interest rates, или TSIR)[2].

Введем также понятие форвардной процентной ставки. Прежде чем выписывать конкретную формулу, мы дадим идею, лежащую в ее основе. Представим себе, что в момент времени t нам доступен рынок долговых инструментов $\{B(t,T)\}$, однако мы ставим себе задачу обеспечить инвестирование денежных средств под определенную процентную ставку начиная не с текущего момента времени t, а в определенный период в будущем (пусть этот период в будущем имеет вид (T_1,T_2), где $t<T_1<T_2$). В этом случае мы сможем уже в период t заключить комбинацию контрактов, которые

1) не приведут к каким-либо денежным расходам в период (t,T_1)
2) обеспечат вложение денежных средств под процентную ставку в размере $F(t,T_1,T_2):=-\dfrac{\ln\left(\dfrac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}\right)}{T_2-T_1}$ в период (T_1,T_2).

Вышеуказанного результата можно добиться, например, следующим образом: занять сумму $B(t,T_2)$ на срок до T_1 путем привлечения кредитов (выпуска облигации, открытия соответствующей короткой позиции) стоимостью $B(t,T_1)$ в количестве $\dfrac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}$ штук и приобрести на вырученные денежные средства 1 облигацию с погашением в момент времени T_2 по цене $B(t,T_2)$. Тогда в момент времени t стоимость позиции равна 0, что означает выполнение первого условия, в T_1 заплатив $\dfrac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}$, получим в T_2 1, т.е. фактически проинвестируем сумму $\dfrac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}$ в период

[2] В связи с тем, что русская терминология в теории финансов еще не устоялась, в отдельных случаях наряду с русскими терминами (или при их отсутствии) мы будем приводить их английские варианты написания.

(T_1,T_2) под ставку $F(t,T_1,T_2)$, определяемую из следующего равенства: $\dfrac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)} = \exp\left(-F(t,T_1,T_2)(T_2-T_1)\right)$.

Величина $F(t,T_1,T_2) := -\dfrac{\ln\left(\dfrac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}\right)}{T_2-T_1}$ и называется форвардной процентной ставкой.

Перейдя в этой формуле к пределу при $T_2 \to T_1 = T$, получим:

$$F(t,T) := \lim_{T_2 \to T_1 = T} F(t,T_1,T_2) = -\frac{\partial}{\partial T}\ln B(t,T)$$

– значение в момент *t* мгновенной форвардной процентной ставки в момент *T*.

Как легко видеть, функции $B(t,T)$, $R(t,T)$ и $F(t,T)$ могут быть легко выражены друг через друга. Например, $B(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T F(t,v)dv\right\}$.

Таким образом, мы получили 3 эквивалентных способа задания TSIR:

- посредством функции $B(t,T)$;
- посредством функции $R(t,T)$;
- посредством функции $F(t,T)$.

Легко видеть также, что $F(t,t) = r(t)$. Действительно,

$$F(t,t) = -\lim_{T\to t}\frac{\ln\left(\dfrac{B(t,T)}{B(t,t)}\right)}{T-t} = -\lim_{T\to t}\frac{\ln\left(B(t,T)\right)}{T-t} = \lim_{T\to t}R(t,T),$$

т.е. $F(t,t)$ представляет собой безрисковую процентную ставку, действующую на бесконечно малом промежутке времени $[t, t+dt]$, что и представляет собой $r(t)$.

1.2. Математические модели динамики процентных ставок

Теперь настало время поговорить непосредственно о способах моделирования динамики процентных ставок.

В первом приближении все модели процентных ставок можно разделить на две категории:

1) модели равновесия (equilibrium models);
2) безарбитражные модели (no-arbitrage models).

Модели равновесия представляют собой модели, в которых краеугольным камнем является формула, описывающая динамику спот-ставки $r(t)$. При этом динамика $R(t,T)$ с помощью специальной техники восстанавливается из закона изменения $r(t)$. Как правило, закон изменения мгновенной процентной ставки, в свою очередь, выбирается таким образом, чтобы обеспечивалось равновесие в более общей макроэкономической модели, и отсюда – название указанного подхода. В общем виде модели равновесия имеют вид:

$$dr = m(r,t)dt + \sum_{i=1}^{N} \sigma_i(r,t)dW_i \ ,$$

где W_i - винеровские процессы, N - показатель числа учитываемых случайных факторов, а функции $\sigma_i(r,t)$ и $m(r,t)$ называются функциями волатильности и функцией дрейфа соответственно.

Примерами таких моделей являются:

- модель Rendleman-Bartter

  $dr = \mu r dt + \sigma r dW$;

- модель Vasicek

  $dr = a(b-r)dt + \sigma dW$;

- модель Cox-Ingersoll-Rubinstein

  $dr = a(b-r)dt + \sigma\sqrt{r}dW$

(здесь везде W – одномерный винеровский процесс).

Основным недостатком таких моделей является тот факт, что они, вообще говоря, не обеспечивают совпадение теоретической кривой TSIR с кривой TSIR, которая наблюдается в реальности, даже в начальный момент времени $t=0$. Действительно, как легко видеть, $R(t,T)$ определяет $r(t)$ однозначным образом, однако при этом обратное не верно. В реальности вид кривой TSIR может быть произвольным, в случае же моделей равновесия мы столкнемся с тем, что зачастую их теоретический вид имеет вполне определенную форму. Это и влечет за собой невозможность калибровки модели на основе реальных данных рынка долговых инструментов таким образом, чтобы полученные модельные значения $R(0,T)$ соответствовали наблюдаемым в реальности. Эта проблема известна в англоязычной литературе как initial interest rate curve fitting problem. К преимуществам моделей равновесия процентных ставок является сравнительно небольшое число параметров, требующих оценки, и соответственно, относительная простота калибровки моделей.

Кроме того, в ряде случаев такие модели являются если не единственно возможным, то по крайней мере, наиболее естественным инструментом анализа. Например, при исследовании рынка кредитов с возможностью досрочного погашения (чему посвящена глава 1 настоящей работы) мы делаем предположение, что на рынке обращаются только долговые инструменты с бесконечным сроком действия, счет денежного рынка и кредиты с возможностью досрочного погашения, при этом долговые инструменты с предписанными сроками погашения отсутствуют.

Безарбитражные модели динамики процентных ставок сразу основываются на предположении о виде закона изменения $R(t,T)$, при этом начальная кривая TSIR $R(0,T)$ выступает в качестве исходных данных модели. Понятно, что в случае безарбитражных моделей initial interest rate curve fitting problem не может возникнуть по определению. Расплачиваться за это приходится более сложной оценкой параметров. Наиболее известным примером no-arbitrage model является модель HJM, подробное описание которой будет дано в Главе 2.

1.3. Методология оценки производных финансовых инструментов

Итак, нами были описаны методы моделирования динамики базовых активов долгового рынка – стоимостей кредитных инструментов, а также таких неотъемлемых показателе рынка, как значений процентных ставок. Настало время описать методологию оценки (в рамках описанных моделей) производных ценных бумаг, т.е. финансовых инструментов, стоимость которых зависит от значений базовых активов. Однако для начала нам необходимо понять, что такое стоимость (цена), а точнее *справедливая стоимость* производного финансового инструмента.

Прежде всего, определим понятие *мартингальной меры*. Мера Q на $(\Omega, \Im)$, эквивалентная P, называется мартингальной, если вектор цен дисконтированных активов $\{\mathrm{Z_i(t)}\}_{i=1}^{M}$ является мартингалом относительно Q.

Утверждение 1.1. (см. Лемма 12.1.6 [25]) *Если на рынке* $\{\mathrm{X_i(t)}\}_{i=0}^{N}$ *существует хотя бы одна мартингальная мера, то на рынке отсутствуют арбитражные стратегии.*

Отметим, что обратное утверждение верно только для дискретного случая.

Зафиксируем мартингальную меру Q.

Европейский T-иск $F(\omega)$ называется достижимым, если существует допустимая стратегия $\theta(\mathrm{t})$ и действительное число z, такие, что:

1) $F(\omega) = V_z^{\theta}(T) = z + \int_0^T \theta(t)dX(t)$ почти наверное;

2) $V^{\theta}(t)$ является мартингалом относительно мартингальной меры Q. Здесь $V^{\theta}(t) := \theta(t)Z(t) = X_0^{-1}(t)$, $t \in [0,T]$.

Вышеуказанная стратегия $\theta(\mathrm{t})$ называется хеджирующей или репликативной.

Рынок называется <u>полным</u>, если любой ограниченный T-иск является достижимым.

Оказывается, верны следующие утверждения.

Утверждение 1.2. (по следствию 3.36 работы [2] (см. также [3])**)**

Мартингальная мера существует и единственна, тогда и только тогда, когда рынок полный.

Утверждение 1.3.

Рынок $\{\mathrm{X_i(t)}\}_{i=0}^{N}$ *является полным тогда и только тогда, когда матрица* $\sigma(t,\omega)$ *имеет левую обратную матрицу* $\Lambda(t,\omega)$ *для почти всех* (t,ω)*, т.е. существует* $\Im_t$ *- согласованный матричный процесс* $\Lambda(t,\omega) \in \Re^{M \times N}$*, такой, что:*

$$\Lambda(t,\omega)\sigma(t,\omega) = I_M \text{ для почти всех } (t,\omega).$$

Теперь мы можем дать определение (справедливой) цены европейского опциона.

Пусть $F(\omega)$ - европейский T-иск. Обозначим

$$p(F) := \sup\left\{y; \textit{существует допустимая стратегия } \theta : V_{-y}^{\theta}(T) \geq -F(\omega) \textit{ п.н.}\right\}$$

$$q(F) := \inf\left\{z; \textit{существует допустимая стратегия } \theta : V_{z}^{\theta}(T) \geq F(\omega) \textit{ п.н.}\right\}$$

Если $p(F) = q(F)$, то эта величина называется ценой европейского опциона на Т-иск $F(\omega)$.

Утверждение 1.4.

Пусть рынок $\{\mathrm{X_i(t)}\}_{i=0}^{N}$ *полон и* Q *- единственная мартингальная мера, тогда стоимость европейского опциона на* Т*-иск* $F(\omega)$ *равна:*

$$p(F) = q(F) = E_Q\left[X_0^{-1}(T)F\right].$$

Рассмотрим теперь американские опционы.

Пусть $F(\omega)$ - американский T-иск. Обозначим

$$p_A(F) := \sup\{y; \textit{существует время остановки } \tau \le T \textit{ и допустимая стратегия } \theta: \\ V_{-y}^{\theta}(\tau(\omega),\omega) := -y + \int_0^{\tau(\omega)} \theta(s)dX(s) \ge -F(\tau(\omega),\omega) \textit{ п.н.}\}$$

$$q_A(F) := \inf\{z; \textit{существует допустимая стратегия } \theta: \forall t \in [0,T] \\ V_z^{\theta}(t,\omega) := z + \int_0^t \theta(s)dX(s) \ge F(t,\omega) \textit{ п.н.}\}$$

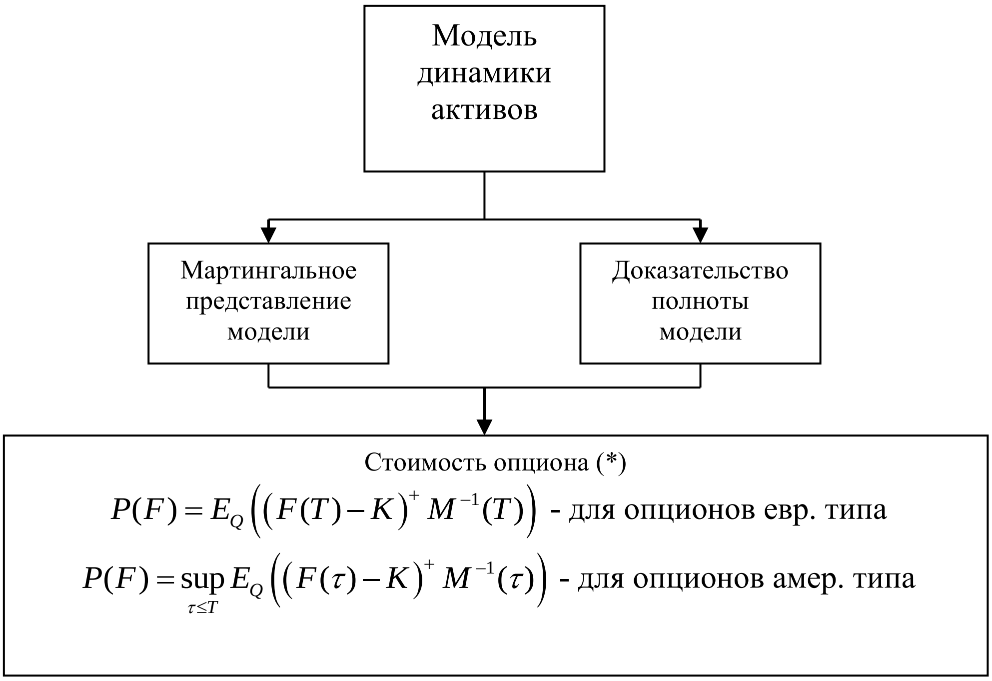
Если $p_A(F) = q_A(F)$, то эта величина называется ценой американского опциона на Т-иск $F(\omega)$.

Утверждение 1.5.

Пусть рынок $\{\mathrm{X_i(t)}\}_{i=0}^{N}$ *полон и* Q *- единственная мартингальная мера, тогда стоимость американского опциона на* T*-иск* $F(\omega)$ *равна:*

$$p_A(F) = q_A(F) = \sup_{\tau \le T} E_Q\left[X_0^{-1}(\tau)F(\tau)\right].$$

Суммируя все вышесказанное, можно представить общий процесс построения оценки опционов следующей графической схемой:



После того, как найдено указанное выше представление цены опциона, процедура нахождения цены опциона может быть продолжена одним из следующих способов:

1) непосредственное аналитическое вычисление соответствующего интеграла (для опциона европейского типа) или нахождения супремума по мат. ожиданиям (для опциона американского типа);

2) вычисление интеграла или супремума с помощью численных методов с применением генерации случайных чисел (Метод Монте-Карло);

3) сведение задачи к решению дифференциального уравнения.

Отметим, что сведение задачи определения цены опциона к дифференциальному уравнению возможно реализовать и минуя предварительный шаг сведения задачи к представлению (*). В Главе 3 для примера будут продемонстрированы оба способа.

1.4. Численные методы в применении к задаче оценки опционов

Необходимость применения численных методов при расчете опционов появляется дважды:

1) при получении цены опциона при известных параметрах;
2) при калибровке (или иными словами, расчете параметров) математической модели рынка.

При получении цены опциона при известных параметрах (самого опциона и модели рынка) необходимость применения численных методов возникает, когда аналитическое решение соответствующей задачи получить не удается. В этом, случае, как указано выше, мы вынуждены либо применять Метод Монте-Карло, либо сводить задачу к дифференциальному уравнению и затем применять численные методы для решения полученного уравнения.

ГЛАВА 2. ОЦЕНКА ОПЦИОНА НА СПРЭД МЕЖДУ ДВУМЯ ФОРВАРДНЫМИ ПРОЦЕНТНЫМИ СТАВКАМИ

2.1. Описание модели кредитного рынка

Мы рассматриваем *N*-факторную модель HJM (ниже приводится ее полное описание). Рассматриваемый временной отрезок - $[0,\tau]$.

Как и прежде (см. Главу 1), через $B(t,T)$ обозначим цену в момент t бескупонной облигации или с номиналом 1 и погашением в момент времени T (т.е. $B(T,T)=1$ почти наверное). Множество $\{B(t,T)\}$назовем кредитным (или долговым) рынком или рынком облигаций.

Положим, что $\frac{\partial}{\partial T}\ln B(t,T)$ существует для всех t из $(0,T)$.

$F(t,T)$ – значение в момент t мгновенной форвардной процентной ставки в момент T:

$$F(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T}\ln B(t,T).$$

Отсюда $B(t,T) = \exp\left\{-\int\limits_t^T F(t,v)dv\right\}$.

Будем считать, что *F(t,T)* для любого *T* удовлетворяют следующему случайному процессу:

$$dF(t,T) = m_F(t,T)dt + \sum_{i=1}^{N} \sigma_F^i(t,T)dW_i,$$

где $W_1, \dots, W_N$ - N независимых винеровских процессов.

Отсюда:

$$F(t,T) = F(0,T) + \int\limits_0^t m_F(s,T)ds + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^t \sigma_F^i(s,T)dW_i(s).$$

Спот-ставка в момент времени t $r(t) := F(t,t)$. Счет денежного рынка будем обозначать через $M(t) := \exp\left\{\int\limits_0^t r(v)dv\right\}$. Как и указывалось в Главе 1, будем считать, что инвестор в любой момент времени может инвестировать также в $M(t)$.

Легко видеть, что имеет место

$$r(t) = F(0,t) + \int\limits_0^t m_F(s,t)ds + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^t \sigma_F^i(s,t)dW_i(s)$$

Нормализованная (дисконтированная) цена облигации $Z(t,T) := B(t,T) / M(t)$, $\{Z(t,T)\}$ – нормализованный рынок облигаций.

Динамика *B(t,T)* и *Z(t)*. В соответствии с формулой Ито имеем

$$dB(t,T) / B(t,T) = (r(t) + m_Z(t,T))dt + \sum_{i=1}^{N} \sigma_B^i(t,T)dW_i\ ,$$

$$dZ(t,T)/Z(t,T) = m_Z(t,T)dt + \sum_{i=1}^{N} \sigma_B^i(t,T)dW_i\ ,$$

где $\sigma_B^i(t,T) = -\int_t^T \sigma_F{}^i(t,v)dv$, $m_Z(t,T) = -\int_t^T m_F(t,v)dv + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \sigma_B{}^i(t,T)^2$.

Мартингальное представление и оценка *T*-исков в рамках модели. Будем считать, что параметры описанной модели удовлетворяют следующим условиям.

Условие 1. $\forall i = 1,2,...,N$ выполняются неравенства

$$\int_0^T | m_F(t,T) | \, dt < \infty\ ,$$

$$\int_0^T \sigma_F{}^i(t,T)^2 dt < \infty$$

Условие 2. Выполняются неравенства

$$\int_0^\tau | F(0,v) | \, dv < \infty\ ,$$

$$\int_0^\tau \int_0^t | m_F(v,t) | \, dvdt < \infty\ .$$

Условие 3. $\forall i = 1,2,...,N$ выполняются неравенства

$$\int_0^t \left(\int_0^t \sigma_F{}^i(v,y)dy \right)^2 dv < \infty, \forall t \in [0,\tau]\ ,$$

$$\int_0^t \left(\int_t^T \sigma_F{}^i(v,y)dy \right)^2 dv < \infty, \forall t \in [0,T], T \in [0,\tau]\ .$$

и отображение

$$t \to \int_t^T \left(\int_0^t \sigma_F{}^i(v,y) dZ_i(v) \right) dy$$

почти наверное является непрерывным $\forall T \in [0,\tau]$.

Условие 4. $\forall S_1,...,S_N \in [0,\tau] : 0 < S_1 < S_2 < ... < S_N \le \tau$ существует *единственное* решение $\gamma_i(\cdot,\cdot;S_1,...,S_N) : \Omega \times [0,S_1] \to R, i = 1,2,...,N$ следующей системы уравнений:

$$\begin{bmatrix} m_Z(t,S_1) \\ ... \\ m_Z(t,S_N) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_B{}^1(t,S_1) & ... & \sigma_B{}^N(t,S_1) \\ ... & ... & ... \\ \sigma_B{}^1(t,S_N) & ... & \sigma_B{}^N(t,S_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1(t;S_1,...,S_N) \\ ... \\ \gamma_n(t;S_1,...,S_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix},$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$\int_0^{S_1} \gamma_i(v;S_1,...,S_N)^2 dv < \infty, \forall i = 1,...,N ,$$

$$E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^N \int_0^{S_1} \gamma_i(v;S_1,...,S_N) dW_i(v) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^{S_1} \gamma_i(v;S_1,...,S_N)^2 dv \right) \right] = 1,$$

$$E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^N \int_0^{S_1} \left[\sigma_B{}^i(v,y) + \gamma_i(v;S_1,...,S_N)\right] dW_i(v) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^{S_1} \left[\sigma_B{}^i(v,y) + \gamma_i(v;S_1,...,S_N)\right]^2 dv \right) \right] = 1$$

для $y \in [S_1,...,S_N]$.

Условие 5.

$\forall S_1,...,S_N \in [0,\tau] : 0 < S_1 < ... < S_N \le \tau,$

$\forall T_1,...,T_N \in [0,\tau] : 0 < T_1 < ... < T_N \le \tau, t \in [0,\tau]$

имеет место

$$\gamma_i(t,S_1,...,S_N) = \gamma_i(t,T_1,...,T_N) =: \gamma_i(t).$$

Первые четыре условия можно назвать условиями типичности, последнее условие 5 называется стандартным условием теории финансов, и, как показано в Приложении 1, является следствием отсутствия арбитража на рынке. Условиям 1-3 удовлетворяет достаточно широкий класс функций $\sigma_F{}^i(t,T)$, $m_F(t,T)$, например, множество непрерывных функций, а условие 4, если исключить технические условия, фактически означает, что матрица

$$\begin{bmatrix} \sigma_B{}^1(t,S_1) & \dots & \sigma_B{}^N(t,S_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_B{}^1(t,S_N) & \dots & \sigma_B{}^N(t,S_N) \end{bmatrix}$$

является невырожденной для всех наборов $S_1,\dots,S_N \in [0,\tau]: 0 < S_1 < \dots < S_N \le \tau$.

Как показано в работе [12], имеет место следующее

Утверждение. *В случае, если параметры модели удовлетворяют перечисленным выше условиям С1-С5, то существует единственная эквивалентная мартингальная мера Q, относительно которой все Z(t,T) являются мартингалами.*

Мера Q задается в виде

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \int_0^S \gamma_i(s) dW_i(s) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int_0^S \gamma_i(s)^2 ds \right)$$

При этом стохастические процессы

$$\tilde{W}_i(t) := W_i(t) - \int_0^t \gamma_i(s) ds$$

являются независимыми винеровскими процессами относительно Q.

Найдем динамику $B(t,T), Z(t,T), F(t,T), r(t)$ относительно меры Q.

Для этого сделаем замену $d\tilde{W}_i(t) = dW_i(t) - \gamma_i(t)dt$ в уравнениях, описывающих их динамику:

$$dZ(t,T)/Z(t,T) = m_Z(t,T)dt + \sum_{i=1}^{N}\sigma_B^i(t,T)d\widetilde{W}_i + \left(\sum_{i=1}^{N}\sigma_B^i(t,T)\gamma_i(t)\right)dt =$$

$$= \widetilde{m}_Z(t,T)dt + \sum_{i=1}^{N}\sigma_B^i(t,T)d\widetilde{W}_i\,,$$

где

$$\widetilde{m}_Z(t,T) = m_Z(t,T) + \sum_{i=1}^{N}\sigma_B^i(t,T)\gamma_i(t)\,.$$

Однако последнее выражение равно нулю согласно определению функции $\gamma_i(t)$. Т.е. относительно меры *Q процессы Z(t,T)* действительно являются мартингалами для любого *t*:

$$dZ(t,T)/Z(t,T) = \sum_{i=1}^{N}\sigma_B^i(t,T)d\widetilde{W}_i.$$

Аналогичным образом получаем

$$dB(t,T)/B(t,T) = r(t)dt + \sum_{i=1}^{N}\sigma_B^i(t,T)d\widetilde{W}_i$$

Точно так же (прямой подстановкой замены $d\widetilde{W}_i(t) = dW_i(t) - \gamma_i(t)dt$ в стохастические уравнения динамики) можно получить уравнения движения процентных ставок, однако проще вспомнить, что следующее соотношение на коэффициенты является следствием применения формулы Ито:

$$m_Z(t,T) = -\int_t^T m_F(t,v)dv + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_B{}^i(t,T)^2\,,$$

а следовательно, сохраняется и для уравнений, получающихся после замены.

Поэтому

$$dF(t,T) = \tilde{m}_F(t,T)dt + \sum_{i=1}^{N} \sigma_F^i(t,T)d\tilde{W}_i,$$

$$r(t) = F(0,t) + \int_0^t \tilde{m}_F(s,t)ds + \sum_{i=1}^{N}\int_0^t \sigma_F^i(s,t)d\tilde{W}_i(s),$$

где

$$\tilde{m}_F(t,T) = \frac{\partial}{\partial T}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} {\sigma_B^i}^2(t,T) - \frac{\partial}{\partial T}\tilde{m}_Z(t,T) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_B^i(t,T)\cdot\sigma_F^i(t,T) = \sum_{i=1}^{N}\sigma_F^i(t,T)\cdot\int_t^T \sigma_F^i(t,s)ds,$$

т.е.

$$dF(t,T) = \left(\sum_{i=1}^{N}\sigma_F^i(t,T)\cdot\int_t^T \sigma_F^i(t,s)ds\right)dt + \sum_{i=1}^{N}\sigma_F^i(t,T)d\tilde{W}_i$$

В силу существования и единственности мартингальной меры в построенной модели, согласно Утверждению 1.1 (см. Главу 1) построенная модель является полной. Поэтому в соответствии с Утверждением 1.3. справедливая цена европейского опциона на любой T-иск $F(\omega)$ в момент t_0 равна:

$$P(F) = E_Q\left(\left(F(T) - K\right)^+ \exp\left\{-\int_{t=t_0}^{T} r(t)dt\right\}\right) \qquad (2.1)$$

Описание опциона. Перейдем теперь непосредственно к описанию того финансового инструмента, оценке стоимости которого посвящена данная статья. Пусть $0 < t < T_0 \le T_1 < T_2 < \tau$. Обозначим через $S(t,T_1,T_2)$ спрэд (т.е. разность) между двумя форвардными процентными ставками $F(t,T_2)$ и $F(t,T_2)$:

$$S(t,T_1,T_2)=F(t,T_2)-F(t,T_1).$$

Назовем *европейским колл-опционом* на спрэд между этими двумя форвардными процентными ставками следующий T_0-иск:

$F(\omega)=\left(S(T_0,T_1,T_2)-K\right)^+$.

Нашей целью является нахождение цены такого опциона в момент времени t_0, которую мы будем обозначать через $P(t_0)$.

2.2. Вывод цены спрэд-опциона

Покажем, что верна следующая

Теорема.

Если долговой рынок описывается моделью HJM и при этом выполняются вышеуказанные условия 1-5, то стоимость описанного спрэд-опциона равна

$$P(t_0)=B(t_0,T)\left((a+\sigma^2\alpha)\cdot\Phi\left(\frac{a+\sigma^2\alpha}{\sigma}\right)+\sigma\cdot\varphi\left(\frac{a+\sigma^2\alpha}{\sigma}\right)\right), \qquad (2.2)$$

где

$$\sigma=\sqrt{\sum_{k=1}^{N}\int_{t=t_0}^{T_0}\left[\sigma_S{}^k(t)\right]^2dt},\ a=S(t_0)+\int_{t=t_0}^{T_0}\tilde{m}_S(t)dt-K,$$

$$\alpha=-\left[\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{T_0}\left(\int_{s}^{T_0}\sigma_F{}^k(s,t)dt\right)\sigma_S{}^k(s)ds\right]\left[\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{T_0}\left[\sigma_S{}^k(t)\right]^2dt\right]^{-1},$$

$$\sigma_S^i(t)=\sigma_F^i(t,T_2)-\sigma_F^i(t,T_1),\ \tilde{m}_S(t)=\tilde{m}_F(t,T_2)-\tilde{m}_F(t,T_1),$$

$$\tilde{m}_F(t,T)=\sum_{i=1}^{N}\sigma_F^i(t,T)\int_t^T\sigma_F^i(t,s)ds.$$

Доказательство. Относительно меры *Q* процесс для *S(t)* имеет вид

$$dS(t) = \tilde{m}_S(t)dt + \sum_{i=1}^{N} \sigma_S^i(t,T)d\tilde{W}_i\,,$$

где $\tilde{m}_S(t) = \tilde{m}_F(t,T_2) - \tilde{m}_F(t,T_1)$, $\sigma_S^i(t) = \sigma_F^i(t,T_2) - \sigma_F^i(t,T_1)$.

Согласно (2.1), справедливая цена опциона такова:

$$P(t_0) = E_Q\left(\left[S(T_0) - K\right]^+ \exp\left\{-\int_{t_0}^{T_0} r(t)dt\right\}\right) =$$

$$= E_Q\left[\left(S(t_0) + \int_{t_0}^{T_0} \tilde{m}_S(t)dt + \sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{T_0} \sigma_S{}^k(t)d\tilde{W}_k(t) - K\right)^+ \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left\{-\int_{t_0}^{T_0} F(t_0,t)dt - \int_{t_0}^{T_0}\int_{t_0}^{t} \tilde{m}_F(s,t)dsdt - \sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{T_0}\int_{t_0}^{t} \sigma_F{}^k(s,t)d\tilde{W}_k(s)dt\right\}\right] =$$

Введем следующие обозначения:

$$a = S(t_0) + \int_{t_0}^{T_0} \tilde{m}_S(t)dt - K\,,$$

$$b = \exp\left(-\int_{t_0}^{T_0} F(t_0,t)dt - \int_{t_0}^{T_0}\int_{t_0}^{t} \tilde{m}_F(s,t)dsdt\right),$$

$$Z = \sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{T_0} \sigma_S{}^k(t)d\tilde{W}_k(t)\,,$$

$$X = \sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{T_0}\int_{t_0}^{t} \sigma_F{}^k(s,t)d\tilde{W}_k(s)dt\,.$$

В этих обозначениях формула для цены опциона приобретает вид

$$P(t_0) = bE_Q\left[\left(a+Z\right)^+ \exp\left\{-X\right\}\right] = bE_Q E_Q\left[(a+Z)^+ \exp(-X) \mid Z\right] =$$

$$= bE_Q\left\{E_Q\left[\exp(-X) \mid Z\right](a+Z)^+\right\}.$$

Для вычисления этого выражения нам потребуются следующие две Леммы (доказательства см. в Приложении 2).

Лемма 1. *Если X и Z – две нормально распределенные случайные величины нулевыми математическими ожиданиями, то*

$$E\left(\exp(-X)\,|\,Z\right) = \exp(\alpha Z + \beta),$$

где

$$\alpha = -\frac{\mathrm{cov}(X,Z)}{\mathrm{var}(Z)}, \beta = \frac{1}{2}\left[\mathrm{var}(X)(1 - \frac{\mathrm{cov}(X,Z)^2}{\mathrm{var}(X)\,\mathrm{var}(Z)})\right].$$

В нашем случае:

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{T_0}\int_{t_0}^{t}\sigma_F{}^k(s,t)d\tilde{W}_k(s)dt) = \sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{T_0}\left(\int_{s}^{T_0}\sigma_F{}^k(s,t)dt\right)^2 ds\,,$$

$$\mathrm{var}(Z) = \mathrm{var}(\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{T_0}\sigma_S{}^k(t)d\tilde{W}_k(t)) = \sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{T_0}\left[\sigma_S{}^k(t)\right]^2 dt\,,$$

$$\mathrm{cov}(X,Z) = \mathrm{cov}\left\{\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{T_0}\int_{t_0}^{t}\sigma_F{}^k(s,t)d\tilde{W}_k(s)dt, \sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{T_0}\sigma_S{}^k(t)d\tilde{W}_k(t)\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{T_0}\left(\int_{s}^{T_0}\sigma_F{}^k(s,t)dt\right)\sigma_S{}^k(s)ds\,.$$

Лемма 2. *Если z – нормально распределенная случайная величина со средним m и дисперсией* σ^2, *то*

$$E(\exp(\alpha z + \beta)(z+a)^+) =$$
$$= \exp(\beta + \alpha m + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2)\left((a + m + \sigma^2\alpha)\Phi(\frac{a+m+\sigma^2\alpha}{\sigma}) + \sigma\varphi(\frac{a+m+\sigma^2\alpha}{\sigma})\right),$$

где $\Phi(\cdot), \varphi(\cdot)$ *- соответственно, функция распределения и функция плотности стандартной нормально распределенной случайной величины.*

В нашем случае $m = 0\,, \sigma^2 = \mathrm{var}(Z)\,, \alpha = -\dfrac{\mathrm{cov}(X,Z)}{\mathrm{var}(Z)}$,

$$\sigma^2\alpha^2 = \frac{\operatorname{cov}(X,Z)^2}{\operatorname{var}(Z)} \;, \beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{var}(X)(1-\frac{\operatorname{cov}(X,Z)^2}{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Z)})\right].$$

Заметим, что

$$B(t_0,T_0) = E_Q\left(B(T_0,T_0)\exp\left\{-\int_{t=t_0}^{T_0} r(t)dt\right\}\right) =$$

$$= E_Q\left(\exp\left\{-\int_{t=t_0}^{T_0} F(t_0,t)dt - \int_{t=t_0}^{T_0}\int_{t=t_0}^{t}\tilde{m}_F(s,t)dsdt - \sum_{k=1}^{N}\int_{t=t_0}^{T_0}\int_{t=t_0}^{t}\sigma_F{}^k(s,t)d\tilde{W}_k(s)dt\right\}\right) =$$

$$= bE_Q\left(\exp\left\{\sum_{k=1}^{N}\int_{t=t_0}^{T_0}\int_{t=t_0}^{t}\sigma_F{}^k(s,t)d\tilde{W}_k(s)dt\right\}\right) = b\exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{var}(X)\right).$$

Поэтому:

$$b = B(t_0,T_0)\exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{var}(X)\right)$$

Тогда

$$b\exp(\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2) = B(t_0,T_0)\exp\left(\frac{1}{2}\left[\operatorname{var}(X)(1-\frac{\operatorname{cov}(X,Z)^2}{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Z)})\right] + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{cov}(X,Z)^2}{\operatorname{var}(Z)} - \frac{1}{2}\operatorname{var}(X)\right) =$$
$$= B(t_0,T_0).$$

Поэтому в итоге искомая цена опциона равна:

$$P(t_0) = bE_Q\left\{\exp(\alpha z + \beta)(a+z)^+\right\} =$$

$$= b\exp(\beta + \frac{\sigma^2\alpha^2}{2})\left((a+\sigma^2\alpha)\Phi(\frac{a+\sigma^2\alpha}{\sigma}) + \sigma\varphi(\frac{a+\sigma^2\alpha}{\sigma})\right) =$$

$$= B(t_0,T)\left((a+\sigma^2\alpha)\Phi(\frac{a+\sigma^2\alpha}{\sigma}) + \sigma\varphi(\frac{a+\sigma^2\alpha}{\sigma})\right).$$

Ч.Т.Д.

Следствие. *Стоимость описанного спрэд-опциона определяется лишь первоначальной формой кривой форвардных ставок и волатильностями процесса для форвардных процентных ставок.*

1.3. Оценка параметров модели HJM

В данном разделе кратко рассмотрим способ оценки параметров модели HJM. Более подробное изложение можно найти, например, в [14]. Будем считать, что $\sigma_F^i(t,T) = \sigma_F^i(T-t)$ и $m_F(t,T) = m_F(T-t)$. Поскольку

$$dF(t,T) = m_F(t,T)dt + \sum_{i=1}^{N} \sigma_F^i(t,T)dW_i \ ,$$

то

$$\begin{bmatrix} F(t+\Delta,t+1) \\ \dots \\ F(t+\Delta,t+N) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} F(t,t+1) \\ \dots \\ F(t,t+N) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_F(t,t+1) \\ \dots \\ m_F(t,t+N) \end{bmatrix} \Delta + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} \sigma_F^i(t,t+1)\Delta W_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{N} \sigma_F^i(t,t+N)\Delta W_i \end{bmatrix}.$$

Здесь Δ - промежуток времени между двумя соседними наблюдениями, например 1 день, или 1 неделя, и т.д.

Обозначим

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{F(t+\Delta,t+1) - F(t,t+1)}{\Delta} \\ \dots \\ \dfrac{F(t+\Delta,t+N) - F(t,t+N)}{\Delta} \end{bmatrix}.$$

Тогда вектор $x(t)$ является нормально распределенной случайной величиной со средним

$$\begin{bmatrix} m_F(1) \\ \dots \\ m_F(N) \end{bmatrix}$$

и матрицей коварации Σ, (i, j)-й элемент которой равен $\sum_{k=1}^{N} \sigma^k{}_F(i) \sigma^k{}_F(j)$.

Возьмем достаточно большую выборку $x(t)$ и получим оценку матрицы ковариаций $\hat{\Sigma}$. Найдем жорданово разложение матрицы $\hat{\Sigma}$: $\hat{\Sigma} = C \Lambda C'$. Тогда Λ является диагональной матрицей: $\Lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_N)$, где $(\lambda_1, ..., \lambda_N)$ - собственные значения матрицы $\hat{\Sigma}$, поскольку $\hat{\Sigma}$ является положительноопределенной. При этом матрица C составлена из собственных векторов $\hat{\Sigma}$.

Имеем тогда:

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_F^i(1) \\ \dots \\ \hat{\sigma}_F^i(N) \end{bmatrix} = c_i \sqrt{\lambda_i} .$$

Таким образом мы получаем оценку значений функции $\sigma_F(T - t)$ в точках $\{1, 2, ..., N\}$. В случае, когда вид $\sigma_F(T - t)$ изначально не известен, будем предполагать при расчетах, что $\sigma_F(T - t)$ является кусочно-линейной функцией с вершинами в $\{1, 2, ..., N\}$.

Если мы предполагаем, что $\sigma_F(T - t)$ принадлежит определенному параметризованному семейству функций, то для оценки параметров могут применяться различные методы, например, метод наименьших квадратов (МНК). Приведем пример.

Рассмотрим $\sigma_F(t, T) = \sigma_1 e^{-\lambda(T - t)}$.

В таком случае $\log(\sigma_F(t,T)) = \log(\sigma_1) - \lambda(T-t)$. Поэтому если нам известны оценки значений $\sigma_F(t,T)$ в точках $i = 1,2,...,N$, то оценка параметров σ_1 и λ может быть найдена из следующей задачи:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\log(\sigma_F(i)) - \log(\sigma_1) + \lambda i\right)^2 \to \min ,$$

решение которой тривиально.

2.3. Частный случай и численный пример

Рассмотрим теперь частный случай модели HJM с числом факторов $N = 1$ и функцией волатильности вида $\sigma_F(t,T) = \sigma_1 e^{-\lambda(T-t)}$.

Выбранный вид функции волатильности обусловлен следующей особенностью, которая характерна для долговых рынков и которая уже отмечалась в начале статьи, а именно: при общем росте или снижении процентных ставок краткосрочные процентные ставки растут (снижаются) быстрее долгосрочных, т.е. эффект влияния случайной составляющей на величину процентной ставки снижается по мере увеличения срока действия процентной ставки.

Без ограничения общности (поскольку рассматриваемая функция волатильности зависит от $(T-t)$ можно считать, что $t_0 = 0$.

Легко убедиться, что имеют место следующие соотношения:

$$\sigma^2 = \mathrm{var}(Z) = \frac{\sigma_1^{\ 2}}{2\lambda}\left(e^{-\lambda T_2} - e^{-\lambda T_1}\right)^2\left(e^{2\lambda T_0} - 1\right), \qquad (2.3)$$

$$\int_{t=0}^{T_0} \tilde{m}_S(t)dt = \frac{\sigma_1^2}{\lambda^2}(e^{-\lambda T_2} - e^{-\lambda T_1})(e^{\lambda T_0} - 1)\left[1 - \frac{1}{2}(e^{-\lambda T_2} + e^{-\lambda T_1})(e^{\lambda T_0} + 1)\right], \qquad (2.4)$$

$$\operatorname{cov}(X, Z) = \frac{\sigma_1^2}{\lambda^2}(e^{-\lambda T_2} - e^{-\lambda T_1})\frac{1}{2}\left(e^{\lambda T_0} - 1\right)\left(e^{-\lambda T_0} - 1\right), \qquad (2.5)$$

$$a + \sigma^2\alpha = S(0) - K + \int_{t=0}^{T_0} \tilde{m}_S(t)dt - \operatorname{cov}(X, Z) =$$

$$= S(0) - K + \frac{\sigma_1^2}{\lambda^2}(e^{-\lambda T_2} - e^{-\lambda T_1})(e^{\lambda T_0} - 1)\left[2 - \frac{1}{2}(e^{-\lambda T_2} + e^{-\lambda T_1} + e^{-\lambda T_0})(e^{\lambda T_0} + 1)\right]. \qquad (2.6)$$

В качестве входных исторических данных взяты процентные ставки MIBOR рынка межбанковских кредитов РФ за период 2000-2006 гг.

В результате калибровки модели по описанному в предыдущем разделе методу получаем следующие оценки параметров модели:

λ	0.0276
σ_1	0.8133

В рамках данной модели для примера рассчитаем стоимость спрэд-опциона следующими параметрами:

K	0.03
$S(0)$	0.02
T_0	0.25
T_1	0.25
T_2	0.5

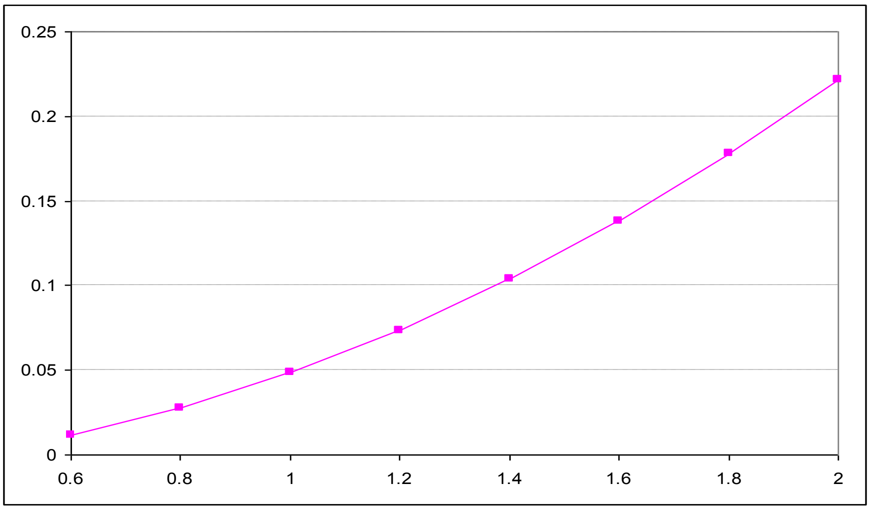
Подставляя указанные параметры в (2.2) с учетом (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), получаем значение стоимости спрэд-опциона в размере 0.02879 у.е. Под у.е. (условной единицей) в данном случае подразумевается любая денежная величина, которая дополнительно устанавливается в договоре купли-продажи опциона и соответствует сумме, выплачиваемой в момент исполнения опциона на каждый процент величины $(S(0)-K)^{+}$.

Экономическая интерпретация данного результата следующая. В случае, если величина спрэда $S(T_0,T_1,T_2)=F(T_0,T_2)-F(T_0,T_1)$ в момент времени T_0 превышает уровень 0.05879 (это сумма цена опциона $P(t_0)$ и цены исполнения опциона K), то покупатель опциона зарабатывает положительную прибыль, в противном случае, величина, полученная от реализации опциона (если такое вообще происходит) не покрывает расходов, связанных с приобретением опциона.

Приведем также результаты расчетов зависимости стоимости опциона от отдельных параметров модели долгового рынка и условий опционного контракта.

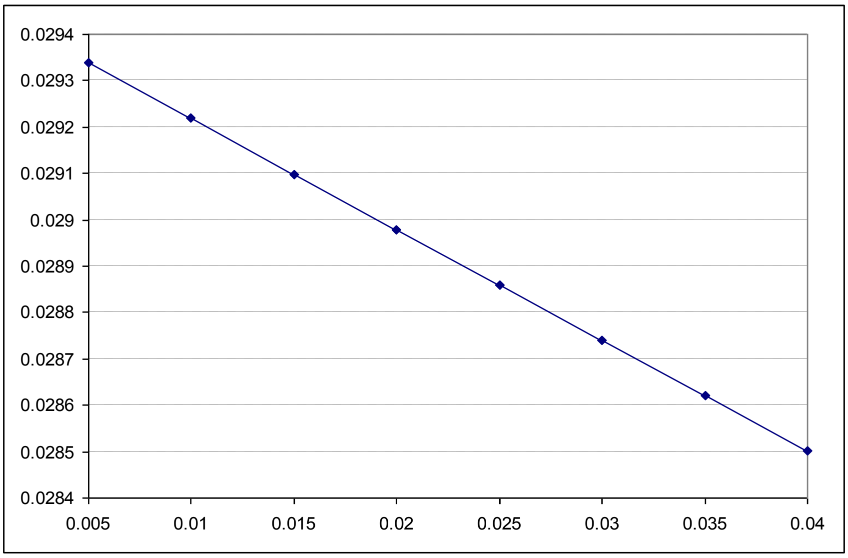
Во всех графиках использовалось, что $T_0=T_1=0.25$, $T_2=0.5$, значения остальных параметров (за исключением параметра, зависимость от которого анализировалась) указаны под графиком.

Зависимость цены опциона от коэффициента волатильности σ_1



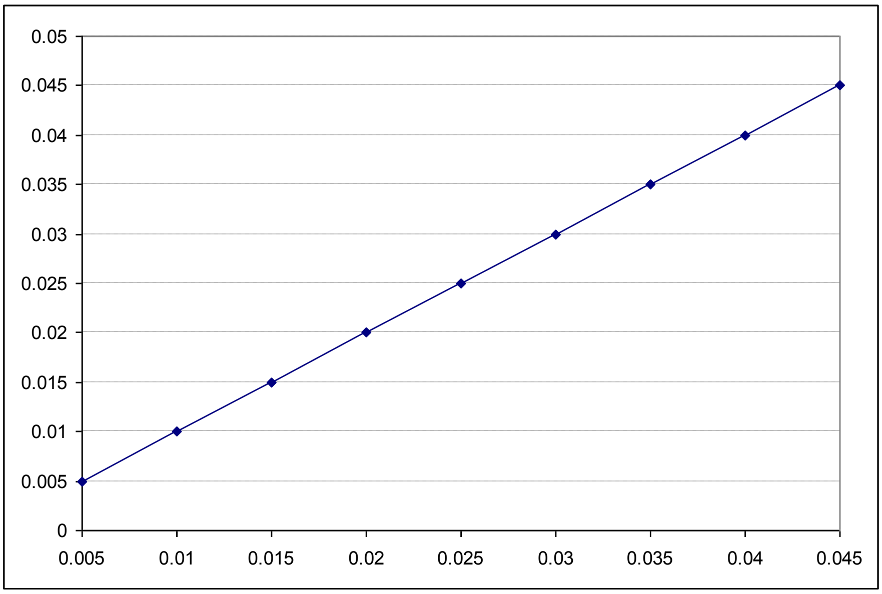
$(\lambda = 0.0276,\ K = 0.03, S(0) = 0.02)$

Зависимость цены опциона от коэффициента λ



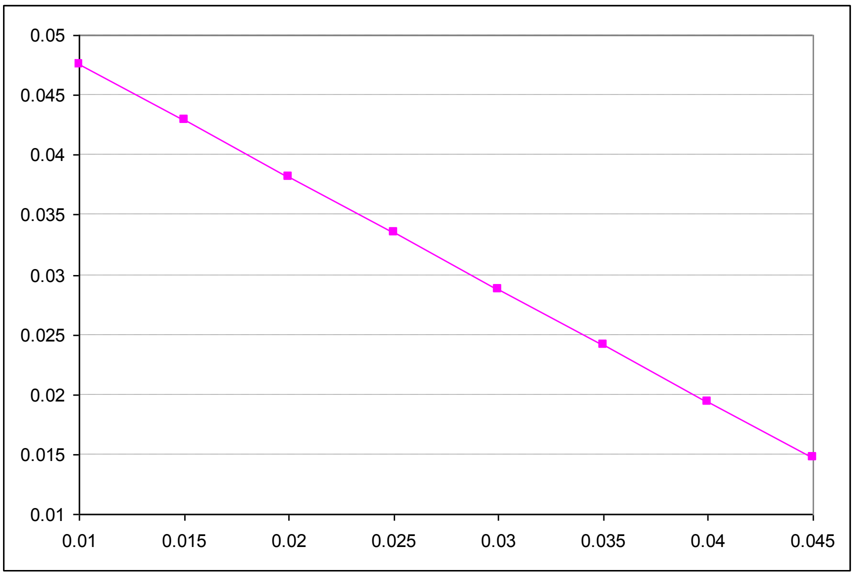
$(\sigma_1 = 0.8133,\ K = 0.03, S(0) = 0.02)$

Зависимость цены опциона от **S(0)**



$(\lambda = 0.0276\,, \sigma_1 = 0.8133\,, K = 0.03)$

Зависимость цены опциона от K



$(\lambda = 0.0276\,, \sigma_1 = 0.8133\,, S(0) = 0.02)$

Выводы. Как можно видеть из приведенных выше графиков, цена опциона положительным образом зависит от коэффициента волатильности σ_1 и начального значения величины спрэда между форвардными процентными ставками, и отрицательным образом зависит от параметра рассмотренной модели процентных ставок λ и цены исполнения опциона K. Указанная зависимость может быть легко обоснована. Действительно, чем выше коэффициент волатильности модели, тем выше вероятность, что спрэд превысит цену исполнения, и выше потенциальный доход владельца опциона. Кроме того, с экономической точки зрения более высокая волатильность означает более высокий риск и, соответственно, большую компенсацию за возможность этот риск захеджировать (застраховать). Большая величина разницы $(S(0)-K)$ означает опять-таки большую вероятность и величину выигрыша (дохода) держателя опциона, что и объясняет соответствующую зависимость цены спрэд-опциона от соответствующих параметров. Однако подобные зависимости характерны для всех видов опционов, не только для опционов рассматриваемого типа.

Наиболее интересной является зависимость цены опциона от показателя λ. Заметим, что λ показывает, насколько сильно реагируют форвардные ставки на «шок» со стороны случайной составляющей. Чем выше λ, тем слабее эффект влияния срока форвардной процентной ставки (т.е. показателя $(T-t)$) на величину сдвига в ответ на «шок». Поэтому чем выше λ, тем меньшее изменение спрэда между двумя форвардными процентными ставками с различными сроками будет наблюдаться и тем ниже, соответственно, цена рассматриваемого опциона.

2.4. Приложения

Приложение 1. Вывод импликации «Отсутствие арбитража $\Rightarrow$ Стандартное условие теории финансов». Покажем, почему стандартное условие финансов 5 является необходимым условием отсутствия арбитражных возможностей на рассматриваемом рынке. Будем считать при этом, что условия типичности 1-4 выполняются.

Продемонстрируем сначала идею доказательства для рынка с $N=1$. Фактически, нам нужно доказать, что если арбитража нет, то существует функция $\gamma(t)$, такая что $\forall T$ выполняется:

$$\frac{m_Z(t,T)}{\sigma_B(t,T)}=\gamma(t).$$

Отметим, что выполнение условия 4 в данном случае означает, что $\sigma_B(t,T)\neq 0, \forall T$.

Зафиксируем $\forall T,S$ и рассмотрим самофинансируемый портфель $\Pi(t)$ из двух облигаций – $B(t,T)$ и $B(t,S)$– с весами $\lambda_T=-\dfrac{\sigma_B(t,S)}{B(t,T)}$ и $\lambda_S=\dfrac{\sigma_B(t,T)}{B(t,S)}$ соответственно, т.е. $\Pi(t)=\lambda_T B(t,T)+\lambda_S B(t,S)$.

Тогда динамика стоимости портфеля описывается уравнением:

$$d\Pi(t)=\lambda_T dB(t,T)+\lambda_S dB(t,S)=$$

$$= \{-(r(t) + m_Z(t,T))\sigma_B(t,S) + (r(t) + m_Z(t,S))\sigma_B(t,T)\}dt +$$

$$+ \{-\sigma_B(t,S)\sigma_B(t,T) + \sigma_B(t,S)\sigma_B(t,T\}dW =$$

$$= \{-(r(t) + m_Z(t,T))\sigma_B(t,S) + (r(t) + m_Z(t,S))\sigma_B(t,T)\}dt \, .$$

Как мы видим в уравнении динамики представленного нами портфеля отсутствует стохастическая составляющая. Поэтому прирост стоимости данного портфеля должен составлять $r(t)$, в противном случае на рынке будут существовать возможности для арбитража (если дрейф портфеля меньше $r(t)$, то арбитражом будет стратегия открытия короткой позиции по портфелю при одновременном открытии длинной позиции по счету денежного рынка, если дрейф больше величины безрисковой процентной ставки, то арбитражом будет обратная стратегия). Поэтому

$$-(r(t) + m_Z(t,T))\sigma_B(t,S) + (r(t) + m_Z(t,S))\sigma_B(t,T) = r(t)(\lambda_T B(t,T) + \lambda_S B(t,S)) =$$

$$= r(t)(-\sigma_B(t,S) + \sigma_B(t,S)).$$

Отсюда

$$\frac{m_Z(t,T)}{\sigma_B(t,T)} = \frac{m_Z(t,S)}{\sigma_B(t,S)} \, .$$

Поскольку T и S были выбраны произвольным образом, это и означает, что существует функция $\gamma(t)$, такая что $\forall T$ выполняется тождество

$$\frac{m_Z(t,T)}{\sigma_B(t,T)} = \gamma(t) \, .$$

Обобщим данную идею на случай произвольного N. Зафиксируем произвольные $S_1, ..., S_N, S_{N+1}$.

Рассмотрим следующую систему уравнений на $\lambda_1,...,\lambda_N,\lambda_{N+1}$:

$$\begin{bmatrix} \sigma_B{}^1(t,S_1) & ... & \sigma_B{}^1(t,S_{N+1}) \\ ... & ... & ... \\ \sigma_B{}^N(t,S_1) & ... & \sigma_B{}^N(t,S_{N+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ ... \\ \lambda_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$$

Такая система заведомо имеет ненулевое решение. Рассмотрим самофинансируемый портфель, составленный из $B(t,S_1),...,B(t,S_{N+1})$ с весами $\left\{ \dfrac{\lambda_1}{B(t,S_1)},...,\dfrac{\lambda_{N+1}}{B(t,S_{N+1})} \right\}$.

Тогда

$$d\Pi = \sum_{i=1}^{N+1} \frac{\lambda_i}{B(t,S_i)} dB(t,S_i)$$

Исходя из уравнений, определяющих λ_i видно, что коэффициенты при стохастических членах $\{dW_i\}_{i=1}^N$ равны 0. Следовательно,

$$d\Pi = r\Pi dt\,.$$

Откуда легко получить соотношение

$$\sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i m_Z(t,S_i) = 0.$$

Поскольку вектор $\{\lambda_1,...,\lambda_{N+1}\}$ ненулевой, то вместе с условиями, определяющими этот вектор, мы получаем, что матрица

$$\Omega = \begin{bmatrix} m_Z(t,S_1) & ... & m_Z(t,S_{N+1}) \\ \sigma_B{}^1(t,S_1) & ... & \sigma_B{}^1(t,S_{N+1}) \\ ... & ... & ... \\ \sigma_B{}^N(t,S_1) & ... & \sigma_B{}^N(t,S_{N+1}) \end{bmatrix}$$

имеет определитель, равный нулю.

Теперь вспомним, что из условия 4 следует, что существуют $\gamma_i(t;S_1,...,S_N), i=1,...,N$:

$$\begin{bmatrix} m_Z(t,S_1) \\ ... \\ m_Z(t,S_N) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_B{}^1(t,S_1) & ... & \sigma_B{}^N(t,S_1) \\ ... & ... & ... \\ \sigma_B{}^1(t,S_N) & ... & \sigma_B{}^N(t,S_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1(t;S_1,...,S_N) \\ ... \\ \gamma_n(t;S_1,...,S_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Причем, решение этой системы единственное, что означает, что определитель матрицы

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_B{}^1(t,S_1) & ... & \sigma_B{}^N(t,S_1) \\ ... & ... & ... \\ \sigma_B{}^1(t,S_N) & ... & \sigma_B{}^N(t,S_N) \end{bmatrix}$$

отличен от нуля.

В матрице Ω сделаем следующее преобразование: из первой строчки вычтем строчки со 2-й до (N+1)-й, умноженные на $\gamma_1,\dots,\gamma_N$ соответственно. Тогда матрица Ω примет вид (определитель при этом не изменится)

$$\begin{bmatrix} 0 & m_Z(t,S_{N+1}) - \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \sigma_B^i(t,S_{N+1}) \\ A^t & B \end{bmatrix},$$

где $B = \begin{bmatrix} \sigma_B{}^1(t,S_{N+1}) \\ ... \\ \sigma_B{}^N(t,S_{N+1}) \end{bmatrix}$.

Тогда имеем: $\det(\Omega) = -\det(A^t)\left(m_Z(t,S_{N+1}) - \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \sigma_B{}^i(t,S_{N+1}) \right)$. Поскольку $\det(A^t) = \det(A) \neq 0$, определитель матрицы Ω равен нулю тогда и только тогда, когда имеет место:

$$m_Z(t,S_{N+1})-\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\sigma_B{}^i(t,S_{N+1})=0\,.$$

Поскольку $S_1,...,S_N,S_{N+1}$ были выбраны произвольно, это и означает выполнение условия 5, что и требовалось доказать.

В заключение отметим еще, что функции $\gamma_i(t), i=1,...,N$ называются рыночными ценами риска.

Приложение 2. Вывод вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Если X и Z – две нормально распределенные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями, то*

$$E\left(\exp(-X)\,|\,Z\right)=\exp(\alpha Z+\beta),$$

где

$$\alpha=-\frac{\operatorname{cov}(X,Z)}{\operatorname{var}(Z)},\ \beta=\frac{1}{2}\left[\operatorname{var}(X)(1-\frac{\operatorname{cov}(X,Z)^2}{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Z)})\right].$$

Доказательство. Функция плотности условного распределения $(X\,|\,Z)$ имеет вид

$$f(X\,|\,Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_X}\exp\left(-\frac{\left[X-\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Z}Z\right]^2}{2(1-\rho^2)\sigma_X{}^2}\right),$$

где

$\rho=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Z)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Z)}}$ – коэффициент корреляции между X и Z,

$\sigma_X=\sqrt{\operatorname{var}(X)},\sigma_Z=\sqrt{\operatorname{var}(Z)}$.

Тогда

$$E\left(\exp(-X)\,|\,Z\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_X}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-X\right)\exp\left(-\frac{\left[X-\rho\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Z}Z\right]^2}{2(1-\rho^2)\sigma_X{}^2}\right)dX=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_X}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{X^2-2X\rho\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Z}Z+2(1-\rho^2)\sigma_X{}^2X+\left(\rho\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Z}Z\right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_X{}^2}\right)dX=$$

$$=\exp\left(-\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Z}Z+\frac{1}{2}(1-\rho^2)\sigma_X{}^2\right)=\exp\left(-\frac{\mathrm{cov}(X,Z)}{\mathrm{var}(Z)}Z+\frac{1}{2}(1-\rho^2)\,\mathrm{var}(X)\right).$$

Ч.Т.Д.

Лемма 2. *Если* z *– нормально распределенная случайная величина со средним* m *и дисперсией* σ^2*, то*

$$E(\exp(\alpha z+\beta)(z+a)^+)=$$
$$=\exp(\beta+\alpha m+\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2)\left((a+m+\sigma^2\alpha)\Phi(\frac{a+m+\sigma^2\alpha}{\sigma})+\sigma\varphi(\frac{a+m+\sigma^2\alpha}{\sigma})\right),$$

где $\Phi(\cdot),\varphi(\cdot)$ *- соответственно функция распределения и функция плотности стандартной нормально распределенной случайной величины.*

Доказательство.

$$E(\exp(\alpha z+\beta)(z+a)^+)=$$
$$\int_R\exp(\alpha z+\beta)(z+a)^+\,d\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(\alpha z+\beta)(z+a)^+\exp\left(-\frac{(z-m)^2}{2\sigma^2}\right)dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(z+a)^+\exp\left(-\frac{(z-m)^2-2\alpha z\sigma^2-2\beta\sigma^2}{2\sigma^2}\right)dz=$$

$$= \exp(\beta + \sigma^2 \alpha m + \frac{\sigma^2 \alpha^2}{2}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (z+a)^+ \exp\left(-\frac{(z-(m+\sigma^2\alpha))^2}{2\sigma^2} \right) dz =$$

$$= \exp(\beta + \alpha m + \frac{\sigma^2 \alpha^2}{2}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (z\sigma + a + m + \sigma^2\alpha)^+ \exp(-\frac{z^2}{2}) dz =$$

$$= \exp(\beta + \alpha m + \frac{\sigma^2 \alpha^2}{2}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{m+a+\sigma^2\alpha}{\sigma}}^{+\infty} (z\sigma + a + m + \sigma^2\alpha) \exp(-\frac{z^2}{2}) dz .$$

откуда следует утверждение Леммы 2.

ГЛАВА 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАВКИ ПО КРЕДИТУ С ВОЗМОЖНОСТЬЮ ДОСРОЧНОГО ПОГАШЕНИЯ

3.1. Описание модели кредитного рынка

Рассмотрим рынок кредитных инструментов (или просто, кредитов). На рынке присутствуют два типа агентов: кредиторы и заемщики. Агенты первого типа готовы в любой момент времени предоставить агентам второго типа денежные средства в виде кредитов в обмен на поток платежей в будущем со стороны заемщиков. Отметим при этом, что разделение агентов на заемщиков и кредиторов достаточно условное и применимо лишь к конкретному кредитному договору, заключенному между двумя агентами. При этом любой агент может в любой момент выступать как заемщик, так и как кредитор.

В зависимости от потока платежей от заемщика в пользу кредитора сами кредиты бывают двух типов: без возможности досрочного погашения и с возможностью досрочного погашения. Поток платежей по кредиту без возможности досрочного погашения представляет собой непрерывное начисление процентов (в течение бесконечного промежутка времени) по ставке R, где размер R *фиксируется* в момент заключения кредитного договора. Т.о. за любой промежуток времени Δt заемщик выплачивает кредитору величину $RA\Delta t$, где A – сумма кредита, т.е. величина, первоначально предоставленная кредитором заемщику. Величина RA, непрерывно выплачиваемая заемщиком кредитору, называется купоном. Поток платежей по кредиту с возможностью досрочного погашения представляет собой непрерывное начисление процентов по ставке C вплоть до момента времени T, в который заемщиком выплачивается сумма кредита, после чего платежи кредитору от заемщика заканчиваются. При этом право выбора момента времени T принадлежит заемщику, причем T может равняться бесконечности, т.е. заемщик может решить никогда не погашать кредит, а всегда уплачивать процентные начисления. Будем предполагать, что при этом риск дефолта (т.е. невыполнения заемщиком своих обязательств) по кредитам обоих типов на рассматриваемом рынке отсутствует.

Как и прежде, будем также считать, что в любой момент времени у любого из агентов есть возможность проинвестировать денежные средства в финансовый инструмент M (*счет денежного рынка*), стоимость которого изменяется по закону: $\frac{dM}{M} = r(t)dt$, где $r(t)$ является случайным процессом и называется *краткосрочной процентной ставкой*.

<u>Примечание 1:</u> основное отличие между R и r состоит в том, что первая представляет собой процентную ставку по долгосрочным, фактически бессрочным, кредитам (и поэтому она называется *долгосрочной процентной ставкой*), вторая же представляет собой процентную ставку по кредиту, срок действия которого – бесконечно малый промежуток времени dt.

Размеры ставок R, r и C меняются со временем, причем это изменение носит случайный характер. Будем предполагать, что R и r изменяется согласно следующему стохастическому закону:

$$dR = m_R(r,R)dt + \sigma_R(r,R)dW_R,$$

$$dr = m_r(r,R)dt + \sigma_r(r,R)dW_r,$$

где W_R, W_r - винеровские процессы, такие что $\mathrm{cov}(dW_R, dW_r) = \rho dt$. Будем называть $m_R(r,R)$, $m_r(r,R)$ функциями дрейфа соответствующих процессов, а $\sigma_R(r,R)$ и $\sigma_r(r,R)$ - функциями волатильности.

<u>Примечание 2:</u> необходимо еще раз обратить внимание на то, что хотя R и C меняются со временем, в момент заключения кредитного договора (без или с возможностью досрочного погашения) значение процентной

ставки по нему фиксируется и является неизменным вплоть до истечения срока договора. Дальнейшие изменения в ставках имеют силу лишь на кредитные договоры, заключаемые в будущие моменты времени.

Задача состоит в том, чтобы зная текущие значения $R(t_0)$ и $r(t_0)$, а также (стохастические) законы распределения $R(t)$ и $r(t)$ определить текущее *безарбитражное* (или, как еще говорят, *справедливое*) значение $C(t_0)$, т.е. такое значение $C(t_0)$, при котором рассматриваемый рынок кредитов является безарбитражным. В дальнейшем без ограничения общности будем предполагать, что $t_0 = 0$.

3.2. Система уравнений для определения C(0)

Оказывается, что имеет место следующая

Теорема 3.1. *Пусть* $r = R$ *и* $m_R(r,R) = m_r(r,R) = m(R)$, $\sigma_R(r,R) = \sigma_r(r,R) = \sigma(R)$. *Тогда безарбитражное значение ставки купона* $C(0)$ *по кредиту с возможностью досрочного погашения находится из следующей дифференциально-алгебраической системы:*

$$\begin{cases} \frac{1}{2} y''(x) \frac{x^5}{C^3(0)} \sigma^2\left(\frac{C(0)}{x}\right) - y(x) = 0 \quad (3.1.1) \\ y\left(\frac{C(0)}{R(0)}\right) = \frac{C(0)}{R(0)} - 1 \quad (3.1.2) \\ y'\left(\frac{C(0)}{R(0)}\right) = 1 \quad (3.1.3) \\ y(0) = 0 \quad (3.1.4) \end{cases} \qquad (3.1)$$

Доказательство. Предварительное замечание: без ограничения общности будем считать, что сумма рассматриваемого кредита без возможности досрочного погашения равна 1, в этом случае искомая процентная ставка по этому кредиту просто совпадает с купоном.

Одна из ключевых идей доказательства этой теоремы состоит в том, чтобы представить кредит с возможностью досрочного погашения в виде комбинации кредита без возможности досрочного погашения с тем же купоном и права приобретения в любой момент времени кредита без возможности досрочного погашения с купоном $C(0)$ по цене, равной сумме кредита (т.е. 1). Такое право представляет собой не что иное, как колл-опцион (т.е. опцион на покупку) американского типа, который, как нетрудно видеть, в любой момент времени τ (причем τ выбирается владельцем опциона) может принести своему владельцу платеж в сумме $\left[\frac{C(0)}{R(\tau)}-1\right]^{+}$, которая называется выплатой опциона.

Таким образом, предоставляя кредит с возможностью досрочного погашения с купоном $C(0)$, кредитор фактически получает право на поток платежей, равноценный потоку платежей по кредиту без возможности досрочного погашения с тем же купоном и одновременно предоставляет заемщику описанный выше опцион. Это означает, что стоимость кредита с возможностью досрочного погашения должна равняться разности стоимости кредита без возможности досрочного погашения с тем же купоном (несложно понять, что в любой момент времени t стоимость такого кредита равна $\frac{C(0)}{R(t)}$) и стоимости соответствующего опциона (обозначим ее через y).

Итак, мы приходим к следующему уравнению:

$$y\left(\frac{C(0)}{R(0)}\right)=\frac{C(0)}{R(0)}-1 \ .$$

Это равенство представляет собой условие (3.1.2) системы (3.1).

Мы докажем Теорему 1, если покажем, что функция y удовлетворяет уравнению (3.1.1) и граничным условиям (3.1.3) и (3.1.4).

Ниже продемонстрирован один из способов решения этой задачи, основанный на Утверждении 3.1, т.е. путем сведения задачи определения справедливого (или безрабитражного) значения цены опциона американского типа к задаче об оптимальной остановке. В Приложении предлагается альтернативная схема вывода системы (3.1).

Обозначим через $x(t)=\frac{C(0)}{R(t)}$ – стоимость кредита с купоном $C=C(0)$ без возможности досрочного погашения. Тогда стохастический закон изменения x (согласно формуле Ито) имеет вид:

$$dx = Cd(\frac{1}{R}) = -\frac{1}{R^2}CdR+\frac{1}{2}\frac{2}{R^3}C(dR)^2 =$$

$$=\left(\frac{x^3}{C^2}\sigma^2 - m\frac{x^2}{C}\right)dt-\frac{x^2}{C}\sigma dW \, .$$

Согласно Утверждению 1.5, безарбитражная цена опциона y равна:

$$y\left(x(0)\right)=\sup_{\tau\geq 0}\tilde{E}\left(e^{-\int_0^{\tau}R(t)dt}(x(\tau)-1)^{+}\right), \tag{3.2}$$

где $\tilde{E}$ представляет собой математическое ожидание относительно мартингальной меры. Для вычисления (3.2) нам необходимо прежде всего понять, каков стохастический закон изменения $x(t)$ относительно мартингальной меры. Мартингальная мера характеризуется тем, что относительно этой меры ожидаемая ставка доходности от обладания базовыми активами (в данном случае это кредиты без возможности досрочного погашения) равна $R(t)$. При этом волатильность (коэффициент при dW) при переходе от начальной меры к мартингальной не меняется. Для владельца кредита без возможности досрочного погашения с купоном $C(0)$ за время dt доход от держания такого инструмента состоит из двух частей: доход от изменения цены кредита в размере dx и процентный доход в размере $C(0)dt$. В итоге ставка доходности составит $\frac{dx+C(0)dt}{x(t)}=\frac{dx}{x(t)}+\frac{C(0)dt}{\frac{C(0)}{R(t)}}=\frac{dx}{x(t)}+R(t)dt$. Относительно мартингальной меры математическое ожидание данной величины должно составлять $R(t)dt$. Следовательно, относительно мартингальной меры функция дрейфа $x(t)$ равна 0 и закон изменения $x(t)$ имеет вид:

$$dx=-\frac{x^2}{C}\sigma d\tilde{W}.$$

Теперь можно перейти непосредственно к проблеме вычисления (3.2). Это не что иное, как стандартная постановка задачи об оптимальной остановке. Введем переменную $Z(\tau)=\dfrac{1}{M(\tau)}=e^{-\int_0^\tau R(t)dt}=e^{-\int_0^\tau \frac{C(0)}{x(t)}dt}$. Тогда $Z(t)$ и $x(t)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dZ}{Z}=-\dfrac{C(0)}{x(t)}dt \\ dx=-\dfrac{x^2}{C}\sigma d\tilde{W} \end{cases} \tag{3.3}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} Z(0)=1 \\ x(0)=\dfrac{C(0)}{R(0)} \end{cases}.$$

При этом (3.2) приобретает вид:

$$y\left(x(0)\right)=\sup_{\tau\ge 0}\tilde{E}\left(Z(\tau)(x(\tau)-1)^+\right). \tag{3.2'}$$

Для нахождения значения (3.2’) воспользуемся Теоремой 10.4.1 из [25]. Согласно данной теореме, если существует функция $V(Z,x)$, обладающая следующими свойствами:

(i) $V(Z,x)\in C^1(V)\cap C(\bar{V})$, где $V=\{(Z,x): Z>0, x>0\}$;

(ii) $V(Z,x)\ge Z(x-1)^+,\quad (Z,x)\in V$,

$V(Z,x)=Z(x-1)^+,\quad (Z,x)\in\partial V$;

(iii) если $D=\{(Z,x)\in V: V(Z,x)>Z(x-1)^+\}$, то

$\tilde{E}\left(\int_0^\infty \chi_{\partial D}\left(Z(t),x(t)\right)dt\right)=0$ при $\left(Z(0),x(0)\right)\in V$ (т.е. время пребывания процесса $\left(Z(t),x(t)\right)$ на границе ∂D равно 0 почти наверное) и ∂D есть поверхность Липшица;

(iv) $V(Z,x) \in C^2(V \setminus \partial D)$ и производные второго порядка ограничены в окрестности границы ∂D;

(v) $LV(Z,x) \le 0, \quad (Z,x) \in V \setminus \bar{D}$,

$LV(Z,x) = 0, \quad (Z,x) \in D$, где дифференциальный оператор L определяется как:

$$Lf(Z,x) = \left(-\frac{C}{x} Z \right) \frac{\partial f}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{x^4 \sigma^2}{C^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} .$$

то имеет место следующее соотношение:

$$V(Z(0), x(0)) = \sup_{\tau \ge 0} \tilde{E} \left(Z(\tau)(x(\tau) - 1)^+ \right), \qquad (3.2'')$$

где $Z(t)$ и $x(t)$ удовлетворяют системе (3.3) с начальными условиями $(Z(0), x(0))$.

Будем искать вышеуказанную функцию $V(Z,x)$ в виде $V(Z,x) = Z\phi(x)$. Пусть $D = \{(Z,x) : 0 < x < x_0\}$, где x_0- неизвестная пока величина, введем также функцию

$$\phi(x) = \begin{cases} g(x), 0 < x < x_0 \\ x - 1, x > x_0 \end{cases},$$

где $g(x)$- решение (3.1.1) со следующими краевыми условиями:

$$\begin{cases} g(x_0) = x_0 - 1 \\ g(0) = 0 \end{cases}.$$

Если выбрать теперь x_0 таким образом, что[3]:

$$g^{'}(x_0) = 1,$$

то легко убедиться в том, что область D и функция $V(Z,x)=Z\phi(x)$ удовлетворяют условиям Теоремы 10.4.1. из [25] и, следовательно, функция $V(Z,x)=Z\phi(x)$ удовлетворяет соотношению (3.2’’). Поскольку в интересующем нас случае в начальный момент времени $Z(0)=1$, искомое значение опциона равно $y(x)=V(1,x)=\phi(x)$.

Итак, мы получили, что значение $y(x)$ колл-опциона американского типа на приобретение кредита без возможности досрочного погашения с купоном $xR(0)$ по цене 1 является решением уравнения (3.1.1) с начальными условиями

$$\begin{cases} y(x_0)=x_0-1 \\ y(0)=0 \end{cases},$$

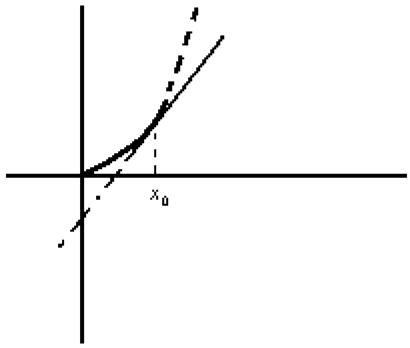
где x_0 однозначным образом определяется из условия $y'(x_0)=1$. Вспомним теперь, что искомое значение $C(0)$ определяется из уравнения $y\left(\frac{C(0)}{R(0)}\right)=\frac{C(0)}{R(0)}-1$. Отсюда следует, что $x_0=\frac{C(0)}{R(0)}$ и искомое значение $C(0)$ удовлетворяет системе (3.1).

Ч.Т.Д.

<u>Геометрическая интерпретация:</u> мы ищем такое решение уравнения (3.1.1), которое проходит через точку (0,0) и касается прямой $y(x)=x-1$, при этом если x^* - абсцисса точки касания, то искомое значение $C(0)$ равно $C=x^*R(0)$.

---

[3] Легко показать, что такая точка x_0 - единственная



Следствие 3.1. *Текущее безарбитражное значение процентной ставки* $C(0)$ *по кредиту с возможностью досрочного погашения зависит только от текущего значения процентной ставки* $R(0)$ *по кредиту с возможностью досрочного погашения и вида функции* $\sigma(R)$. *При этом величина* C *не зависит от вида функции* $m(R)$.

Отметим, что для общего случая (т.е. для произвольной функции $\sigma(R)$) получить аналитическое выражение для C не удается, можно только решить задачу численно. Однако для некоторых функций $\sigma(R)$, как показывает следующие две теоремы, это сделать можно.

3.3. Аналитические выражения для C(0) для некоторых частных случаев

Теорема 3.2. *Если* $r = R$ *и* $\sigma(R) = \sigma R\sqrt{R}dW$, *где* W *– винеровский процесс, то ставка купона* C *по кредиту с возможностью досрочного погашения равна:*

$$C(0)=\left(1+\frac{2}{\sqrt{1+\frac{8}{\sigma^2}}-1}\right)R(0)$$

Доказательство. При $\sigma(R)=\sigma R\sqrt{R}dW$ уравнение (3.1.1) принимает вид:

$$\frac{1}{2}y''x^2\sigma^2-y=0.$$

Легко видеть, что общее решение этого уравнения имеет вид $y=C_1x^{\lambda_1}+C_2x^{\lambda_2}$, где C_1,C_2 - константы, λ_1,λ_2 - корни квадратного уравнения $\sigma^2\lambda(\lambda-1)=2$. Решая это уравнение получаем $\lambda_1=\frac{1-\sqrt{1+\frac{8}{\sigma^2}}}{2},\lambda_2=\frac{1+\sqrt{1+\frac{8}{\sigma^2}}}{2}$.

Для удобства дальнейшей записи обозначим $\alpha=\sqrt{1+\frac{8}{\sigma^2}}$.

Поскольку $y(0)=0$ и $\lambda_1<0$, то $C_1=0$. Таким образом, $y=C_2x^{\frac{1+\alpha}{2}}$.

Положим также $x_0:=\frac{C(0)}{R(0)}$. Условия (3.1.2) и (3.1.3) принимают вид соответственно:

$$\begin{cases}C_2x_0^{\frac{1+\alpha}{2}}=x_0-1\\ C_2\frac{1+\alpha}{2}x_0^{\frac{\alpha-1}{2}}=1\end{cases},$$

Отсюда

$$\frac{2}{1+\alpha}x_0=x_0-1\Leftrightarrow 2x_0=(1+\alpha)x_0-(1+\alpha)\Leftrightarrow x_0=\frac{\alpha+1}{\alpha-1}=1+\frac{2}{\alpha-1}.$$

Следовательно,

$$C(0)=\left(1+\frac{2}{\sqrt{1+\frac{8}{\sigma^2}}-1}\right)R(0).$$

Ч.Т.Д.

Теорема 3.3. *Если* $r=R$ *и* $\sigma(R)=\sigma R^{5/2}dW$*, где* W *– винеровский процесс, то ставка купона* C *по кредиту с возможностью досрочного погашения равна:*

$$C=\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}\frac{e^{2\lambda}-1}{e^{2\lambda}+1}}R\ ,$$

где $\lambda=\dfrac{\sqrt{2}}{\sigma R(0)}$.

Доказательство. Уравнение (3.1.1) принимает вид:

$$y''=\frac{2}{\sigma^2C^2}y.$$

Легко видеть, что общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y(x)=c_1e^{\frac{\sqrt{2}}{C\sigma}x}+c_2e^{-\frac{\sqrt{2}}{C\sigma}x}.$$

Из условия (3.1.4) следует, что $c_1=c_2$. Условия (3.1.2) и (3.1.3) приводят к системе

$$\begin{cases} c_1\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{C(0)\sigma}x_0}-e^{-\frac{\sqrt{2}}{C(0)\sigma}x_0}\right)=x_0-1 \\ c_2\dfrac{\sqrt{2}}{C\sigma}\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{C(0)\sigma}x_0}+e^{-\frac{\sqrt{2}}{C(0)\sigma}x_0}\right)=1 \end{cases},$$

что эквивалентно:

$$\begin{cases} c_1\left(e^{\lambda}-e^{-\lambda}\right)=x_0-1 \\ c_2\dfrac{\sqrt{2}}{C\sigma}\left(e^{\lambda}+e^{-\lambda}\right)=1 \end{cases},$$

где $\lambda=\dfrac{\sqrt{2}}{\sigma R(0)}$.

Откуда с учетом того, что $c_1=c_2$, получаем

$$\frac{e^{2\lambda}-1}{e^{2\lambda}+1}=\left(x_0-1\right)\frac{\sqrt{2}}{C(0)\sigma}=\left(x_0-1\right)\frac{\lambda}{x_0},$$

$$x_0=\frac{1}{1-\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{e^{2\lambda}-1}{e^{2\lambda}+1}}.$$

Ч.Т.Д.

Как можно видеть, в обоих случаях при фиксированном $R(0)$, величина $C(0)$ является возрастающей функцией от σ, чего можно было ожидать, поскольку стоимость опциона всегда положительно зависит от волатильности.

3.4. Алгоритм численного решения системы (5)

Пусть нам заданы следующие параметры: $R(0),\sigma(\cdot)$. Требуется предъявить алгоритм, который сможет определить $C(0)$, удовлетворяющее системе (3.1).

Введем функцию $\pi\left(C(0)\right)$. Для этого для фиксированного $C(0)$ найдем решение $y_{C(0)}(x)$ системы

$$\begin{cases} \frac{1}{2} y''(x) \frac{x^5}{C^3(0)} \sigma^2 (\frac{C(0)}{x}) - y(x) = 0 \\ y(\frac{C(0)}{R(0)}) = \frac{C(0)}{R(0)} - 1 \\ y'(\frac{C(0)}{R(0)}) = 1 \end{cases}.$$

Тогда пусть $\pi(C(0)) = y_{C(0)}(0)$. Искомое $C(0)$ является решением уравнения $\pi(C(0)) = 0$. Это решение можно найти с помощью простого метода дихотомии (деления отрезка пополам) после того, как будет найден отрезок, которому принадлежит решение системы (3.1). Это также сделать очень просто: мы знаем, что решение находится на промежутке $[R(0), +\infty]$, тогда последовательным расширением отрезка вида $[R(0), A]$ находим такое A, что $\pi(R(0))\pi(A) < 0$. Суммируя все вышесказанное получаем следующий алгоритм численного решения системы (3.1):

1. Определяем функцию $\pi(C(0))$ как было описано выше
2. Перебирая $A = 2R(0), 4R(0), 8R(0), ...$ находим A: $\pi(R(0))\pi(A) < 0$, тогда искомое $C(0)$ принадлежит отрезку $[R(0), A]$.
3. Методом дихотомии находим $C(0)$: $\pi(C(0)) = 0$.

3.5. Степенные модели волатильности

В данном параграфе мы будем рассматривать рынки кредитных инструментов, в которых функция волатильности процентной ставки по кредиту без возможности досрочного погашения имеет вид степенной функции, т.е. $\sigma(R) = \sigma R^{\alpha}$, где σ - константа. Отметим, что при этом нас пока совершенно не интересует вид функции $m(R)$, поскольку, как показано было в Следствии 3.1, ее вид не влияет на значение $C(0)$. Мы решили сосредоточить свое внимание на изучении именно степенных функций волатильности на том основании, что функции такого вида являются наиболее часто встречающимися в экономико-финансовой литературе. В частности, в таких распространенных моделях процентных ставок, как моделях Vasiceck, Hull, и др. функции волатильности представляют собой именно степенные функции.

В этом случае уравнение (3.1.1) принимает следующий вид:

$$y''(x)x^{5-2\alpha}\sigma^{2\alpha} = 2C^{3-2\alpha}y(x).$$

Воспользовавшись алгоритмом численного решения системы (3.1), описанного в предыдущем разделе, мы можем изучить некоторые свойства поставленной задачи, например, зависимость значений $C(0)$ от параметров системы.

На рис. 3.1 представлен результат расчета**4** зависимости значения $C(0)$ от показателя степени α при следующих значениях остальных параметров: $R(0) = 0.1$, $\sigma = 1$.

---

[4] Все расчеты сделаны с помощью программного обеспечения MATLAB

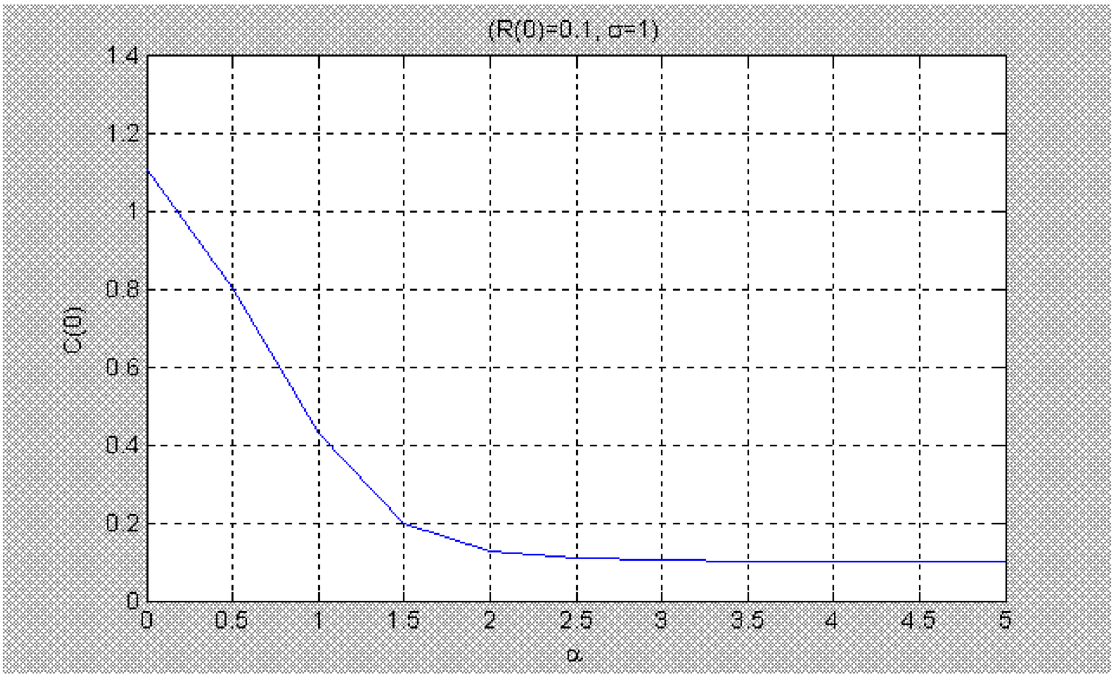
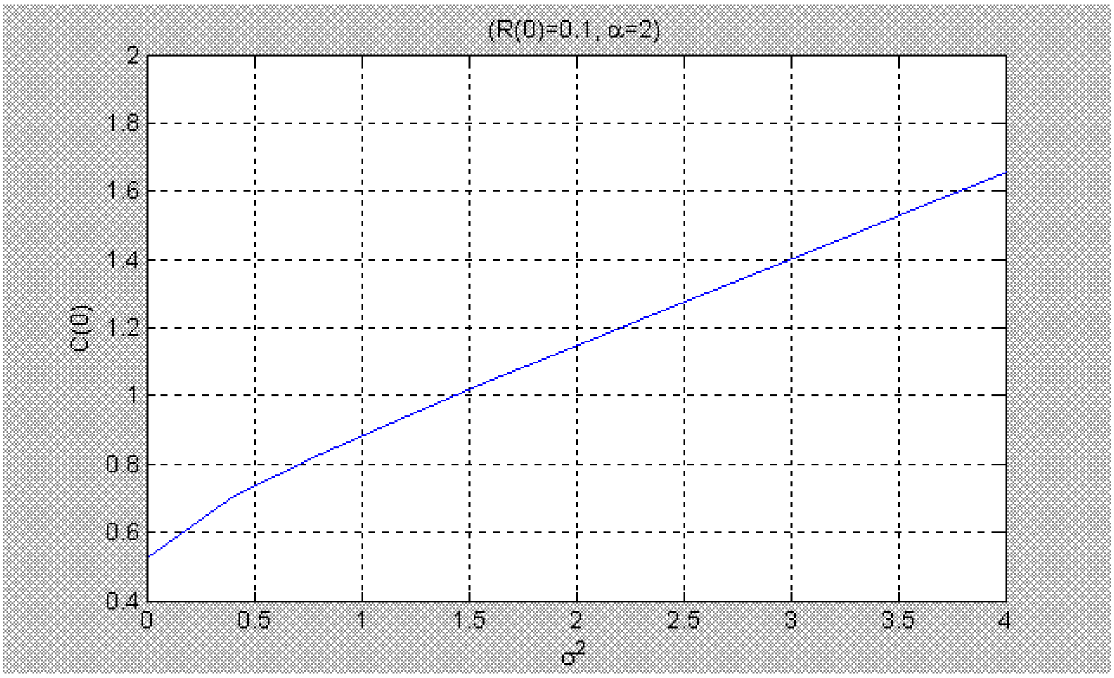
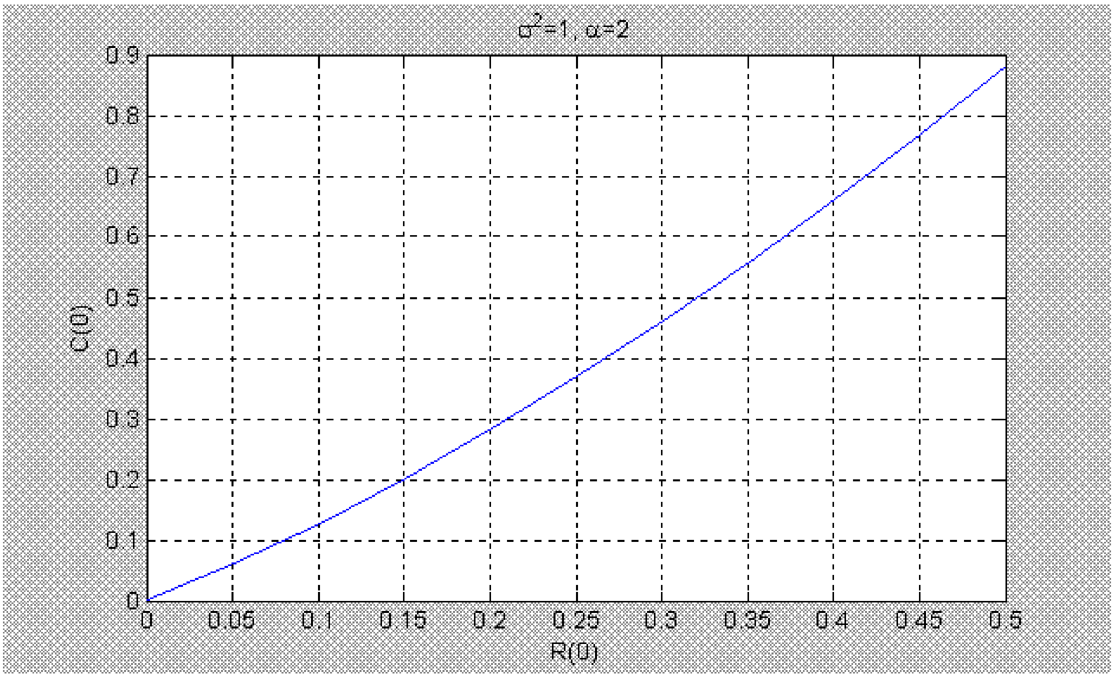


рис. 3.1

Как можно видеть, зависимость $C(0)$ от α отрицательная, что вполне объяснимо с экономической точки зрения. Вероятность того, что $R(t)>1$ весьма мала, поскольку процентная ставка превышает значение 1 только в исключительных ситуациях. Поэтому при прочих равных чем выше α, тем меньше волатильность, а значит меньше стоимость вложенного опциона и величина $C(0)$.

На следующих двух графиках представлены зависимости значения $C(0)$ соответственно от σ и от $R(0)$ при фиксированных значениях остальных параметров.





3.6. Оценка параметров модели и численный пример

Для применения полученных результатов на практике, которое может представлять собой, например, конкретные численные рекомендации кредитным организациям по вопросу величины процентной ставки по ипотечному кредиту, нам необходимо научиться оценивать параметры используемых моделей на основании реальных исторических данных.

Например, в случае степенных моделей, рассмотренных в п.4, в качестве входных данных при оценке параметров может выступать временной ряд исторических значений процентных ставок по кредитам без возможности досрочного погашения за определенный период времени, взятых с определенной частотой (годовые, квартальные, ежемесячные, еженедельные или ежедневные). Выходные данные при оценке параметров модели представляют собой величину σ, если значения показателя α известно, или пару (α,σ) при неизвестном α. После того, как эти параметры определены, мы сможем определить для каждого текущего значения $R(0)$ справедливую величину $C(0)$.

В данном разделе мы продолжим рассматривать степенные модели динамики процентных ставок. Однако нам придется наложить некоторые дополнительные ограничения на эти модели. Как мы уже не раз отмечали, значение опциона при известных параметрах модели не зависит от вида функции дрейфа, вместе с тем, для калибровки модели, вид такой функции, как несложно понять становится критичным. Например, если говорить о тех же степенных моделях, то при заданных входных исторических временных рядах значения (α,σ) будут сильно зависеть от того, каков предполагаемый вид функции дрейфа.

С целью упрощения задачи будем считать, что функция дрейфа нулевая, а значение α - известно. Пусть мы имеем в наличии исторические данные по процентным ставкам R за некоторый промежуток времени с частотой Δt. Т.е. у нас есть последовательность исторических значений $\{R_n\}_{n=1}^{N}$, причем промежуток между двумя моментами времени, когда фиксировались значения соседних элементов этой последовательности, составляет Δt. Опишем методику, с помощью которой мы можем оценить σ. Для этого прежде всего найдем закон распределения $R(T)$.

Из стохастического дифференциального уравнения $dR = \sigma R^{\alpha} dW$ несложно получить, что:

$R(t)^{1-\alpha} - R(t+\Delta t)^{1-\alpha} = (\alpha - 1)\sigma W(\Delta t)$, при $\alpha \neq 1$,

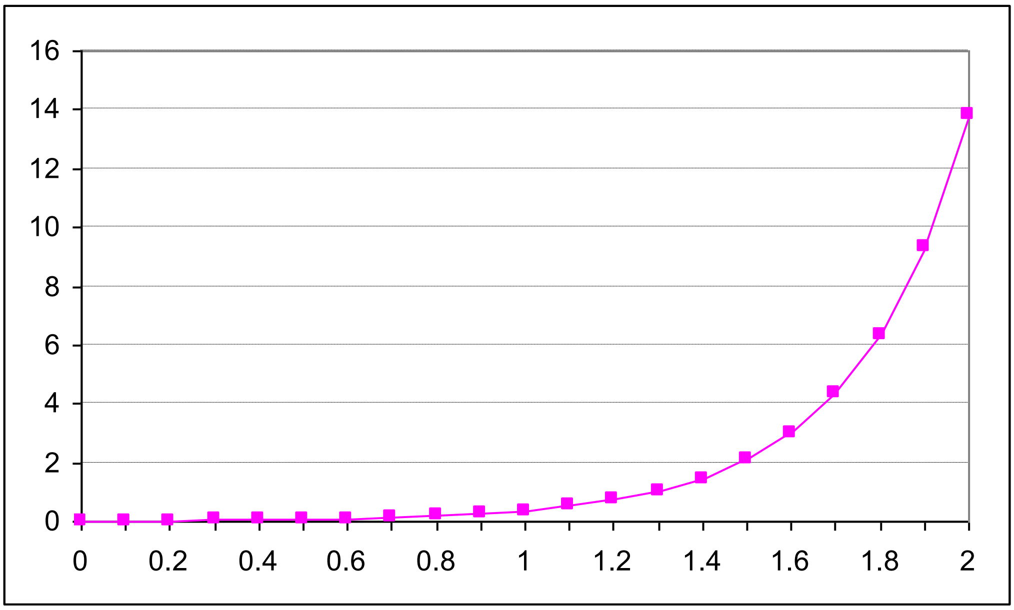
$\ln\left(R(t)\right) - \ln\left(R(t+\Delta t)\right) = \sigma W(\Delta t)$, при $\alpha = 1$.

Это означает, что члены последовательности (выборки) $\left\{ a_n = \begin{cases} R_n^{1-\alpha} - R_{n+1}^{1-\alpha}, \alpha \neq 1 \\ \ln\left(R_n\right) - \ln\left(R_{n+1}\right), \alpha = 1 \end{cases} \right\}_{n=1}^{N-1}$ распределены нормально с дисперсией $|\alpha - 1|\sigma\sqrt{\Delta t}$ (при $\alpha \neq 1$) или $\sigma\sqrt{\Delta t}$ (при $\alpha = 1$). Мы пришли к стандартной задаче математической статистики. Легко может быть показано, что следующая оценка является наиболее эффективной: $\hat{\sigma}^2 = \frac{\xi}{\sqrt{\Delta t}} \frac{1}{N-2} \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - \bar{a})^2$, где $\xi = \begin{cases} |1-\alpha|, \alpha \neq 1 \\ 1, \alpha = 1 \end{cases}$ и $\bar{a} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} a_n$.

Применим описанную методику к расчету процентной ставки по ипотечному кредиту с учетом реальных колебаний процентных ставок, которые наблюдались в банковском секторе РФ в пост-кризисный период.

На следующем рисунке изображен график зависимости получаемого значения оценки волатильности от параметра α. В качестве исторических значений взяты данные по ставкам московского рынка межбанковских кредитов MIBOR с ежедневной частотой за период 1999-2005 гг.

График зависимости коэффициента волатильности от α



Источник: Банк России

Как можно видеть, значение коэффициента волатильности σ является возрастающей функций от α, что легко объяснимо с интуитивной точки зрения. Для калибровки моделей в каждом случае (т.е. для каждого α) используются одни и те же исторические данные. Естественно, предположить, что в среднем величина волатильности σR^{α} не должна существенно отличаться для всех моделей. Поскольку с высокой долей вероятности $R<1$, то чем выше α, тем выше должна быть величина σ, для того чтобы соблюдался «паритет». Понятно, что это чисто эвристическое доказательство. Тем не менее, в связи с вышесказанным, можно также ожидать, что различные степенные модели не должны давать существенно различающихся результатов и при определении $C(0)$, если при калибровке будут использоваться одни и те же исторические данные.

Данные следующей таблицы подтверждают данное предположение. В ней представлены результаты вычисления величины $C(0)$ в зависимости от α при фиксированном значении $R(0)=0.1$ (значения σ при этом являются для каждого α эндогенными и справочно указаны в соответствующем столбце в таблице – это те самые данные, на основе которых построен предыдущий график). В качестве исторических данных взят тот же ряд процентных ставок MIBOR.

α	$\hat{\sigma}^2$ (справочно)	$C(0)$
0	0.0160	0.3013
0.1	0.0216	0.2987
0.2	0.0293	0.2968
0.3	0.0398	0.2937
0.4	0.0543	0.2913
0.5	0.0741	0.2889
0.60	0.1015	0.2857
0.7	0.1395	0.2840
0.80	0.1923	0.2809
0.9	0.2663	0.2784

1	0.3703	0.2761
1.1	0.5174	0.2738
1.20	0.7268	0.2712
1.30	1.0266	0.2690
1.40	1.4587	0.2674
1.5	2.0857	0.2662
1.60	3.0020	0.2653
1.70	4.3503	0.2653
1.80	6.3481	0.2656
1.90	9.3289	0.2664
2.00	13.8058	0.2676
2.50	108.2757	0.2817

Таким образом, мы видим, что процентная ставка по кредиту с возможностью досрочного погашения, колеблется в пределах 26,5% – 30%, т.е. разброс составляет порядка 10%. Точное значение процентной ставки по кредиту с возможностью досрочного погашения будет зависеть от того, какую степенную модель процентных ставок мы считаем наиболее подходящей для описания рассматриваемого рынка, однако это – уже предмет отдельного исследования.

3.7. Альтернативный способ вывода системы уравнений по определению ставки по кредиту с возможностью досрочного погашения

Лемма 3.3. *Если* $r = R$ *и* $m_R(r,R) = m_к(r,R) = m(R)$, $\sigma_R(r,R) = \sigma_r(r,R) = \sigma(R)$ *то безарбитражное значение ставки купона C(0) по кредиту с возможностью досрочного погашения находится из следующего алгебраического уравнения:*

$$y\left(\frac{C(0)}{R(0)}\right) = \frac{C(0)}{R(0)} - 1, \qquad (3.4)$$

где функция $y(x)$ *является, в свою очередь, решением следующего ОДУ:*

$$\frac{1}{2} y'' \frac{x^5}{C(0)^2} \sigma^2 \left(\frac{C(0)}{x}\right) - y = 0 \qquad (3.5)$$

с граничными условиями в виде:

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y(x^*) = x^* - 1, \end{cases} \qquad (3.6\ )$$

где параметр x^* *находится из задачи максимизации значения* $y_{x'}\left(\frac{C}{R(0)}\right)$.

Доказательство. Снова обозначим через $x = \dfrac{C(0)}{R}$ – стоимость кредита с купоном $C = C(0)$ без возможности досрочного погашения. Тогда стохастический закон изменения x, как уже было показано, имеет вид:

$$dx = \left(\frac{x^3}{C^2}\sigma^2 - m\frac{x^2}{C}\right)dt - \frac{x^2}{C}\sigma dW .$$

Выведем уравнение стохастической динамики на $y(x)$. Согласно формуле Ито:

$$dy = y'dx + \frac{1}{2}y''(dx)^2 = y'\left[\left(\frac{x^3}{C^2}\sigma^2 - m\frac{x^2}{C}\right)dt - \frac{x^2}{C}\sigma dW\right] + \frac{1}{2}y''\frac{x^4}{C^2}\sigma^2 dt$$

или

$$dy = \left(y'\left(\frac{x^3}{C^2}\sigma^2 - m\frac{x^2}{C}\right) + \frac{1}{2}y''\frac{x^4}{C^2}\sigma^2\right)dt - y'\frac{x^2}{C}\sigma dW\ ,$$

$$dx = \left(\frac{x^3}{C^2}\sigma^2 - m\frac{x^2}{C}\right)dt - \frac{x^2}{C}\sigma dW\ .$$

Рассмотрим *самофинансируемый* портфель Π, составленный из (y,x) с весами $(1,-y')$. Т.е. инвестирование в портфель Π означает приобретение одной единицы опциона и одновременное получение агентом y' единиц кредитов без права досрочного погашения с купонами в размере C. Приобретая опцион, агент зарабатывает на изменении его стоимости, однако инвестирование в портфель Π сопряжено также с потерями от изменения стоимости кредита и выплатами по кредиту в сумме $Cy'dt = Rxy'dt$ за промежуток времени dt. В итоге за промежуток времени dt изменение стоимости портфеля Π составляет:

$$d\Pi = dy - y'dx - Ry'xdt =$$

$$= \left[y'\left(\frac{x^3}{C^2}\sigma^2 - m\frac{x^2}{C}\right) + \frac{1}{2}y''\frac{x^4}{C^2}\sigma^2 - y'\left(\frac{x^3}{C^2}\sigma^2 - m\frac{x^2}{C}\right) - Ry'x\right]dt\ .$$

Мы видим, что у портфеля Π отсутствует стохастическая составляющая. Т.к. мы считаем, что на рассматриваемом рынке нет арбитражных возможностей, то скорость роста стоимости портфеля Π должна равняться r. Иными словами

$$d\Pi = r\Pi dt,$$

$$\left[y'\left(\frac{x^3}{C^2}\sigma^2 - m\frac{x^2}{C}\right) + \frac{1}{2}y''\frac{x^4}{C^2}\sigma^2 - y'\left(\frac{x^3}{C^2}\sigma^2 - m\frac{x^2}{C}\right) - Ry'x \right] = ry - ry'x,$$

$$\frac{1}{2}y''\frac{x^5}{C^2}\sigma^2 - y = 0.$$

Теперь необходимо поговорить о граничных условиях для функции $y(x)$. Одно из них очевидно: $y(0) = 0$. Действительно, если $x = 0$, что означает, что $C = 0$, то в безарбитражном рынке опцион ничего не должен стоить, поскольку при $C = 0$ величина $x = \frac{C}{R}$ всегда будет оставаться нулевой и опцион никогда не будет исполнен. Таким образом, продавец опциона заведомо не несет никаких обязательств перед его покупателем. Если бы при этом цена опциона была бы строго положительной, то на рынке существовали бы арбитражные возможности, заключавшиеся в продаже опциона.

Второе граничное условие получается не столь тривиально, как первое. Для его вывода заметим, что оптимальное исполнение опциона должно произойти в тот момент, когда цена опциона совпадает с выплатой опциона. Действительно, если цена опциона выше выплаты опциона, то предъявлять опцион к исполнению не является не рационально, если же цена опциона опускается ниже выплаты опциона, то, напротив, не оптимальным становиться держать его, не предъявляя к исполнению. Это означает, что оптимальной стратегией владельца опциона является предъявление опциона к исполнению, когда x достигнет своего критического значения x^*, при котором $y(x^*) = x^* - 1$. При этом у владельца опциона существует произвол в выборе x^*, поэтому он выбирает такое значение x^*, максимизирует значение функции $y(x(0))$, т.е. стоимость опциона в начальный момент времени.

Таким образом, в итоге получаем, что граничные условия для $y(x)$ имеют вид:

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y(x^*) = x^* - 1 \end{cases},$$

где $x^* = \arg\max_{x^*} y_{x^*}(x(0))$.

Ч.Т.Д.

Обозначим через $y(x, x^*)$ - решение уравнения (3.5) с граничными условиями (3.6).

Обозначим $y(x^*, x^*) = f(x^*)$. Тогда

$$y(x^*, x^*) = x^* - 1$$

и

$$f'(x^*) = 1 = y_1(x^*, x^*) + y_2(x^*, x^*).$$

Пусть $x^{**} = \arg\max y(\frac{C}{R(0)}, x^*)$. Из (3.4) и (3.6) следует, что $\frac{C}{R(0)} = x^{**}$.

Найдем условие на x^{**}.

$\frac{\partial y(\frac{C}{R(0)}, x^{**})}{\partial x^{**}} = 0$, т.к. $\frac{C}{R(0)} = x^{**}$, то это означает, что $y_2(x^{**}) = 0$, поэтому

$y_1(x^{**}) = 1$.

Это доказывает Теорему 3.1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящий момент мировой рынок капитала развит настолько, что число возможных финансовых инструментов, которые существуют или могут быть спроектированы, по крайней мере, теоретически, не поддается счету. В связи с этим множество потенциально интересных инструментов оказывается пока неисследованными, а одной из основных задач участников рынка капитала становится как раз проектирование и нахождение оценок новых финансовых инструментов, с помощью которых могли бы быть те или иные инвестиционные идеи.

Российский рынок находится в начальной стадии развития, большинство финансовых инструментов, которые можно встретить на мировых торговых площадках, на российском рынке пока не доступны. Вместе с тем потребность в подобных инструментах растет и появление всевозможных экзотических финансовых продуктов и услуг можно ожидать в самое ближайшее время. Более того, методология, применяемая при оценке «нестандартных» финансовых инструментов, такая как теория оценки опционов, может применяться для исследования совершенно стандартных, на первый взгляд, финансовых инструментов (например, кредитов с возможностью досрочного погашения).

При этом если говорить об исследованиях, посвященных оценке таких инструментов, которые уже присутствуют или могут в ближайшее время появиться на российском рынке капитала, то таковые практически отсутствуют.

В настоящей диссертационной работе приведена попытка восполнить указанный пробел в исследовании российского рынка и одновременно предъявить оценки новых финансовых инструментов, которые могут быть интересны и для участников мирового рынка.

В первой части диссертации была рассмотрена модель HJM рынка облигаций в применении к оценке опциона на спрэд между двумя форвардными процентными ставками. Параметры модели были оценены на основе российских данных, вследствие чего результаты исследования можно применять на постепенно набирающем обороты российском рынке производных финансовых инструментов. Был проведен качественный анализ зависимости стоимости опциона от различных параметров модели и параметров самого опционного контракта.

В качестве направления для дальнейших исследований можно предложить рассмотреть аналогичный опционный контракт американского типа, т.е. контракт на спрэд между двумя форвардными процентными ставками, но без фиксированной даты исполнения. Оценка стоимости подобных опционов также представляет большой интерес, однако аналитическое решение соответствующей задачи, скорее всего, будет отсутствовать.

Во второй части работы был рассмотрен вопрос определения безарбитражного значения процентной ставки по кредиту с возможностью досрочного погашения на основе данных о динамике бессрочных кредитов без возможности досрочного погашения. Задача была решена с применением теории опционов. Более подробно был рассмотрен класс так называемых степенных моделей (моделей, в которых волатильность процентных ставок по бессрочным кредитам представлена степенной функцией). С применением численных методов были проанализирован ряд качественных аспектов, в том числе зависимость решения задачи (т.е. безарбитражного значения процентной ставки по кредиту с возможностью досрочного погашения) от параметров модели.

В рамках численного исследования с использованием реальных исторических российских данных было выявлено, что процентная ставка по кредиту с возможностью досрочного погашения может существенно превышать процентную ставку по бессрочному кредиту. Например, при процентной ставке по бессрочному кредиту в размере 10% годовых, оценка процентной ставки по кредиту с возможностью досрочного погашения может достигать 30% годовых. Столь высокое значение может быть объяснено тем, что мы рассматриваем кредитные инструменты с бесконечным сроком действия, в связи с чем полученные результаты можно рассматривать как верхние оценки для моделей с более реалистичными условиями.

Полученные результаты можно применять к исследованию рынка ипотечного кредитования РФ, поскольку одной из основных особенностей ипотеки является возможность досрочного погашения, предоставляемая заемщику.

Отметим, что аналогичным образом можно рассмотреть задачу нахождения справедливой величины процентной ставки по кредиту, в которой право досрочного погашения принадлежит кредитору. Данное исследование может позволить получить информацию о тои, как должны соотносится процентные ставки по срочным депозитам и счетам до востребования, которые представляют собой именно кредиты с возможностью досрочного погашения (а точнее, отзыва) со стороны кредитора.

В качестве направлений для дальнейших исследований можно также предложить рассмотреть вариант с конечным сроком действия как для кредитов с возможностью досрочного погашения и так и для кредитов без возможности досрочного погашения. Кроме того, условие совпадения долго- и краткосрочной процентных ставок существенно облегчает рассматриваемую задачу, однако для описания реальных кредитных рынков лучше может подойти случай с $r \neq R$.

Можно надеяться, что результаты подобных исследований помогут сделать правильный выбор как инвесторам, так и лицам, привлекающим капитал, в том числе, для приобретения недвижимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Abel A. B., Dixit A. K., Eberly J. C., Pindyck R.S.* Options, the Value of Capital, and Investment // The Quarterly Journal of Economics, Vol. 111, No. 3. (Aug., 1996), 753-777;

[2] Black F., Scholes M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities – *The Journal of Political Economy, Vol. 81, No 3 (Mar-Jun., 1973), 637-654*

[3] Broadie M., Detemple J.: American Options on Dividend-Paying Assets – *CIRANO Scientific Series, 96s-15, 1996*

[4] *Buser S., Hendershott P.* Pricing Default-Free Fixed-Rate Mortgages // Housing Finance Review, Volume 3 (1984) 405-429;

[5] Courtadon G.: The Pricing of Options on Default-Free Bonds – *Journal of Financial and Quantitative Analysis 17 (Mar., 1982) 75-100*.

[6] Cox J. C., Ingersoll J.E., Jr., Ross S.A.: A Theory of the Term Structure of Interest Rates - *Econometrica, Vol. 53, No 2 (Mar.,1985), 385-408*.

[7] *Dixit A, Pindyck R.* Investment under Uncertainty // Princeton University Press (1994);

[8] *Dixit A.* Entry and Exit Decisions under Uncertainty // Journal of Political Economy. 1989. Vol. 97, no. 3, 620-638.

[9] *Dothan U., Williams J.* Education as an Option // The Journal of Business, Vol. 54, No. 1. (Jan., 1981), 117-139;

[10] Fu Q.: On the Valuation of an Option to Exchange one interest rate for another – *Journal of Banking and Finance 20 (1996) 645-653*.

[11] *Harrison J. M., Pliska S.* Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. - *Stochastic processes and their applications, 11 (1981)*.

[12] Heath D., Jarrow R., Morton A.: Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation. – *Econometrica, Vol. 60* (1992).

[13] Jamshidian F.: An Exact Bond Option Formula – *The Journal of Finance, Vol. 44, No 1 (Mar.,1989), 205-209*.

[14] *Jarrow R.* Modelling Fixed Income Securities and Interest Rate Options // Stanford University Press; 2nd edition (August 2002);

[15] *Kau J.B., Keenan D.C.* An Overview of the Option-theoretic Pricing of Mortgages // Journal of Housing Research, Volume 6, Issue 2 (1995) 217-244;

[16] Lonfstaff F. A., Schwartz E.S.: Interest Rate Volatility and the Term Structure – *Journal of Financial Economics 20 (1996) 645-653*.

[17] *Margrabe W.* The Value of an Option to Exchange one asset for another // Journal of Finance 33 (1978) 177-186;

[18] Merton R. C.: Theory of rational option pricing, - The Bell Journal of Economics and Management Science, Vol.2, No.1 (Spring, 1973),141-183.

[19] *Poitras G.* Spread Options, Exchange Options and Arithmetic brownian motion // Journal of Futures Markets, 18 (1998) 487-517;

[20] *Randall J. Pozdena R.J.* Pricing mortgages: an options approach // Economic Review (1984) 39-55.

[21] Shiller R.J.: The Term Structure of Interest Rates – The Handbook of Monetary Economics.

[22] Sobol I. M.: On Systematic Search in a Hypercube – *SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol. 16, No 5 (Oct., 1979), 790-793.*

[23] Vasicek O.A.: An Equilibrium Characterization of the Term Structure – *Journal of Financial Economics, 5 (1977), 177-188.*

[24] *Wilmott W.* Paul Wilmott on Quantitative Finance – *John Wiley & Sons, 2000*

[25] Оксендаль: Введение в стохастические дифференциальные уравнения и приложения // Мир (2003);

[26] Хорев К.П.: Выпуск облигаций – намек рынку на хорошие перспективы – *Финансовый аналитик, 3-4 2004*

[27] Хорев К.П.: Динамика корпоративных облигаций: то взлет, то посадка – *Финансовый аналитик, 7-8 2004*

[28] Хорев К.П.: Рынок региональных и муниципальных облигаций – *Бюджет, сентябрь 2004*

[29] *Ширяев А. Н., Кабанов Ю.М, Крамков Д. О., Мельников А. В.* К теории расчетов опционов европейского и американского типов.

II. Непрерывное время // Теория верооятностей и ее применения, 39 (1994),80-129;

[30] *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики // научное и издательское объединение ФАЗИС, 2004;