

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
“Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова”

На правах рукописи

Камбарбаева Гаухар Сабикановна

Математическое моделирование
оптимальных стратегий инвестирования в
линейной модели рынка

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент О.С. Розанова

Москва — 2011

Оглавление

Введение	4
0.1 Обзор имеющихся результатов	4
0.2 Основные результаты диссертации	9
0.3 Краткое содержание работы	11
1 Общие определения и понятия	21
1.1 Проблема выбора инвестиционного портфеля	21
1.2 Задача составления эффективного портфеля	23
1.3 Стохастическая модель рынка	25
1.4 Оптимальная стратегия инвестирования Белецкого и Плиски	26
2 О некоторых подходах к решению задачи нахождения условных математических ожиданий случайных величин	35
2.1 Постановка задачи и два подхода к построению решения	35
2.2 Сведение задачи к решению системы ОДУ	37
2.3 Представление в терминах интегралов от преобразования Фурье	40
3 Задача составления эффективного портфеля в фиксированный момент времени	43

3.1	Постановка задачи	43
3.2	Алгоритм решения задачи	45
3.3	Случай линейной процентной ставки	48
3.3.1	Пример портфеля из двух активов	48
3.3.2	Сравнение со стратегией Белецкого-Плиски	61
3.3.3	Асимптотики долей капитала портфеля	69
3.3.4	Влияние различных параметров модели на оптимальную стратегию на малых временах	72
3.4	Случай нелинейной процентной ставки	83
3.4.1	Задача нахождения среднего	83
3.4.2	Пример портфеля из двух активов, зависящих от процентной ставки Кокса-Ингерсолла-Росса	87
3.5	Сравнение стратегий вложения для случаев линейной и нелинейной процентных ставок	89
4	Програмный продукт для расчета оптимальной стратегии	93
4.1	Описание программы	93
4.2	Интерфейс программы	94
4.2.1	Рабочее окно	94
4.2.2	Задание исходных данных	95
4.3	Режим прогнозирования	96
4.4	Режим анализа	96
A	Приложение (формулы, используемые в тексте)	104

Введение

0.1 Обзор имеющихся результатов

Со времени начала существования фондового рынка задача управления портфелем инвестиций (то есть рассредоточения капитала по различным видам ценных бумаг в условиях неопределенности) является чрезвычайно актуальной. Под инвестиционным портфелем понимается набор реальных или финансовых инвестиций. В узком смысле это совокупность ценных бумаг разного вида, разного срока действия и разной степени ликвидности, принадлежащих одному инвестору и управляемых как единое целое. Основная идея портфельной теории заключается в поиске компромисса между риском и ожидаемой доходностью портфеля, в поиске наилучших стратегий диверсификации.

Начало современных исследований в области моделей портфельного инвестирования было положено Г. Марковицем в 1950 – 1952 годах. Он ввел понятие эффективного портфеля. Доходность портфеля рассматривается как случайная величина и портфели оцениваются по математическому ожиданию и среднеквадратичному отклонению этой случайной величины. Портфель был назван эффективным, если из тех же ценных бумаг и при тех же ограничениях на их пропорции нельзя составить другой портфель, который имел бы такое же математическое ожидание доходности и меньшее среднеквадратичное отклонение либо такое же

среднеквадратичное отклонение и большее математическое ожидание доходности. В 1959 году Г. Марковиц издал книгу “Portfolio selection: Efficient Diversification of Investments” [1], которая до сих пор остается важным учебником по портфельной теории. Существенный вклад в эту теорию был сделан Дж. Тобином, который установил существование оптимального портфеля среди множества эффективных. Оптимальный портфель выбирается среди множества эффективных портфелей с учетом отношения инвестора к риску и ожидаемой доходности портфеля, мерами которых являются соответственно стандартное отклонение и математическое ожидание доходности портфеля. Работы Г. Марковица привлекли внимание многих математиков и специалистов по ценным бумагам и вызвали большое число обсуждений и публикаций. В какой-то степени итогом бурного периода развития портфельной теории было появление в 1970 году знаменитой монографии еще одного из создателей портфельной теории У.Ф. Шарпа “Portfolio Theory and Capital Markets” [2]. Все три упомянутых математика были удостоены за свои работы Нобелевской премии по экономике.

Практическое значение теории эффективных портфелей, которая позволяет увеличить прибыль и снизить риск инвестирования, очень велико. Однако, в то же время эта теория подвергается критике как слишком идеализированная и неспособная охватить все особенности практической ситуации. В частности, вызывает критику тот факт, что в теории эффективных портфелей не учитывается либо учитывается очень упрощенно влияние рыночных факторов, которые могут быть весьма разнообразными и часто играют ведущую роль при формировании стоимостей активов. Это, в первую очередь, процентная ставка по банковским вкладам, стоимость сырья, рыночные индексы, уровень безработицы и т.д. Кроме того, кри-

теории оптимальности портфеля могут быть самыми разнообразными. Они могут учитывать при составлении портфеля не только объективные факторы, такие как его доходность и рискованность, но также и предпочтения инвестора, его склонность к риску. Последнее дает инвестору свободу выбора рыночного поведения и поэтому более привлекательно с практической точки зрения.

Ряд эмпирических исследований М.Н. Pesaran, А. Timmermann [3], А.Д. Patelis [4], А. Пманен [5] подтвердили обоснованность рассмотрения модели рынка, в которой активы зависят от рыночных факторов. К примеру, М.Н. Pesaran и А. Timmermann проверяли зависимость стоимостей американских акций от следующих факторов: дивидендной доходности, уровня инфляции, стоимости сырья, ставки по казначейским векселям и других. Исследуя исторические данные о стоимости акций, они показали, что зависимость от факторов имела место на рынке акций 1970-х годов. А.Д. Patelis заключил, что прибыль американской фондовой биржи зависит от факторов валютной политики, дивидендной доходности, маржи сверх процентных ставок и месячной реальной процентной ставки. А. Пманен показал, что прибыль по долгосрочным казначейским облигациям США зависит от структуры процентных ставок по срочности ссуд, реальной (скорректированной на темпы роста цен) доходности, фактического уровня благосостояния и психологии инвестора. Существует огромное количество исследований на эту тему.

В то же время развивалась стохастическая теория рынка и в некоторых случаях учитывалось влияние рыночных факторов. В знаменитой работе R.E. Lucas [6] рассмотрена следующая модель: активы являются дискретными стохастическими процессами и зависят от рыночных факторов, описываемых марковскими процессами. Решается задача максимизации ожидаемой дисконтированной полез-

ности потребления на бесконечном горизонте времени. R.C. Merton [7], I. Karatzas [8] и другие исследователи использовали модель стохастического управления для построения непрерывной по времени стратегии управления портфелем активов, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями, но без учета рыночных факторов. Принимая во внимание важность этих моделей в теории финансовой математики, было естественным рассмотреть расширенную стохастическую модель с учетом рыночных факторов. Расширенная модель была рассмотрена впервые в работе R.C. Merton 1973 года [9], но факторы учитывались в очень общей и абстрактной форме. В работе M.J. Brennan, E.S. Schwartz, R. Lagnado [10] идея состояла в том, чтобы моделировать факторы как диффузионные процессы и активы как соответствующие геометрические броуновские движения с коэффициентами сдвига и диффузии в виде заданных функций от факторов. Их целью было максимизировать ожидаемую полезность капитала портфеля к конкретному моменту времени в будущем. Продолжая методологию стохастического управления, они показали, что максимум ожидаемой полезности — это функция от времени и факторов, которая может быть получена при помощи решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана. Они рассмотрели частный случай модели, когда коэффициенты сдвига и диффузии процесса стоимости актива являются афинными функциями факторов, и протестировали на примере портфеля из трех активов (наличные, биржевой индекс и долгосрочные облигации) с учетом трех факторов (краткосрочной процентной ставки, долгосрочной процентной ставки и дивидендной доходности биржевого индекса). Основное ограничение подхода Brennan-Schwartz-Lagnado состоит в том, что невозможно получить явную формулу для оптимальных стратегий. Более того, на практике возникают ограничения на ко-

личество факторов, связанные с тем, что уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана приходится решать численно.

В последнее десятилетие большую известность приобрели работы Т.Р. Белецкого и С.Р. Плиски (первая из них появилась в 1999 году). В их модели активы также зависят от факторов, которые моделируются в виде стохастических процессов аналогично модели Brennan-Schwartz-Lagnado [11],[12]. Т.Р. Белецкий и С.Р. Плиски максимизируют некоторый достаточно сложного вида функционал, зависящий от параметра риска, выбираемого инвестором, и таким образом строят рискочувствительную оптимальную стратегию инвестирования на бесконечном горизонте времени. Авторы называют свой функционал темпом роста капитала в долгосрочной перспективе с некоторыми оговорками [11]. Предельный переход по времени позволяет им получить оптимальные стратегии более простого вида (так как нет зависимости от времени), которые могут быть посчитаны для любого количества факторов. Отметим, что классическим примером во всех их работах является случай одного рыночного фактора, линейной процентной ставки. Есть также работы Т.Р. Белецкого, С.Р. Плиски и их последователей [13], в которых рассматривается одна из возможных моделей нелинейной процентной ставки (Кокса-Ингерсолла-Росса), однако здесь получены лишь частичные результаты.

Отметим, что рискочувствительные критерии также рассматривались в работах М. Lefebvre и Р. Montulet [14], W.H. Fleming [15], D.R. Carino [16] в различных моделях портфельного инвестирования.

Мы, отталкиваясь от модели Белецкого-Плиски, строим рискочувствительную стратегию в любой выбранный момент времени, фиксируя при этом значения факторов. А именно, рассматриваем разницу между математическим ожиданием

доходности капитала портфеля и величиной дисперсии этой доходности с коэффициентом, являющимся параметром риска, и максимизируем этот функционал над классом допустимых стратегий управления. Такой функционал аналогичен первым двум членам при разложении функционала Белецкого-Плиски в ряд Тейлора по малому рискочувствительному параметру.

Таким образом, наш способ управления портфелем скорее относится к тактическим (Tactical Asset Allocation, см., например, [17]) в отличие от стратегического (Strategic Asset Allocation, [10]), когда наибольшая выгода достигается к некоторому заданному в достаточно далеком будущем моменту времени. В диссертации приводятся явные формулы для полученной стратегии управления в случае однофакторной модели, когда фактор — процентная ставка. Нами были рассмотрены различные способы моделирования процентной ставки, и явные формулы получены как для линейной процентной ставки Васичека, так и для нелинейной ставки Кокса-Ингерсолла-Росса.

Мы сравниваем нашу зависящую от времени стратегию управления с той, которая предлагалась в работах Т.Р. Белецкого и С.Р. Плиски, и заключаем, что при небольших временах управления при определенных значениях параметров наша стратегия дает явное преимущество.

0.2 Основные результаты диссертации

Все результаты диссертации являются новыми. Среди них можно выделить следующие наиболее важные:

1. Предложен новый метод построения инвестиционного портфеля в любой фиксированный момент времени. Предложенный метод рассматривается в стоха-

стической модели рынка активов, зависящих от любого числа стохастических рыночных факторов.

2. Получены явные формулы для предложенной стратегии в случае рыночного фактора, описываемого линейным стохастическим дифференциальным уравнением (модель процентной ставки Васичека). При этом рассмотрены различные начальные распределения величины процентной ставки: гауссовское и равномерное.
3. Получены явные формулы для предложенной стратегии в случае рыночного фактора, являющегося процессом квадратного корня (модель процентной ставки Кокса-Ингерсолла-Росса) с равномерным начальным распределением.
4. Получены явные формулы для вычисления условных математических ожиданий одних случайных величин по другим (при фиксированном значении последних) для частных случаев стохастических систем, возникающих в экономических приложениях. При этом рассмотрены два подхода к построению решения: сведение к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и представление в терминах преобразования Фурье.
5. Проведено сравнение полученной стратегии со стратегией Белецкого-Плиски. Показано, что полученная стратегия при нулевом параметре риска при всех временах дает большее математическое ожидание доходности при фиксированном значении фактора, чем стратегия Белецкого-Плиски. Если параметр риска отличен от нуля, то при определенных значениях параметров модели такая ситуация сохраняется до некоторого момента $t > 0$. Этот момент, как показывают вычисления для реальных данных, может быть порядка несколь-

ких лет.

0.3 Краткое содержание работы

Во **введении** кратко приводятся основные сведения о предмете исследования, характеризуется тема, цели и задачи диссертации. Дано общее описание изучаемых проблем, основные направления исследования. Представлены полученные в диссертации результаты.

В **первой главе** отражена методология исследования задачи оптимального управления инвестиционным портфелем как основного объекта исследования представленной диссертации.

В **первом и втором пунктах** описаны основные определения, используемые в финансовой математике при рассмотрении рынков ценных бумаг. Приводятся определения таких понятий, как эффективный портфель, стохастический рынок активов.

В **третьем пункте** подробно описана стохастическая модель рынка согласно Т.Р. Белецкому и С.Р. Плиске.

Пусть $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство. Обозначим через S_i , $i = 1, \dots, m$, стоимости активов, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями с трендами, зависящими от совокупности рыночных факторов X_j , $j = 1, \dots, n$, каждый из которых также описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{dS_i(t)}{S_i(t)} &= (A_i + \sum_{p=1}^n \alpha_{ip} X_p(t)) dt + \sum_{k=1}^{m+n} \sigma_{ik} dW_k(t), \\ S_i(0) &= s_i > 0, i = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{0.3.1}$$

$$dX_j(t) = (B_j + \sum_{p=1}^n \beta_{jp} X_p(t)) dt + \sum_{k=1}^{m+n} \lambda_{jk} dW_k(t), \quad (0.3.2)$$

$$X_j(0) = x_j, j = 1, \dots, n,$$

где $W(t)$ — $(m+n)$ -мерное броуновское движение с независимыми компонентами $W_k(t)$; $X(t)$ — n -мерный процесс с компонентами $X_j(t)$; $A_i, B_j, \alpha_{ip}, \beta_{jp}, \sigma_{ik}, \lambda_{jk}$ — некоторые константы, являющиеся параметрами модели.

Пусть $\mathcal{G}_t := \sigma((S(s), X(s)), 0 \leq s \leq t)$, где $S(t) = (S_1(t), \dots, S_m(t))$ является процессом стоимостей активов. Обозначим через $h(t) = (h_1(t), \dots, h_m(t))$ m -мерный инвестиционный процесс, или стратегию инвестирования, где $h_i(t)$ — доля капитала, инвестированная в i -й актив в момент времени t . Будем называть стратегию $h(t)$ *допустимой*, если она удовлетворяет следующим условиям¹:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \sum_{i=1}^m h_i(t) = 1; \\ (ii) \quad & h(t) \text{ прогрессивно измерим по } \mathcal{G}_t; \\ (iii) \quad & \mathbf{P}\left[\int_0^t h^T(s)h(s)ds < \infty\right] = 1 \text{ для всех конечных } t \geq 0. \end{aligned} \quad (0.3.3)$$

Класс допустимых стратегий инвестирования будем обозначать через \mathcal{H} . Тогда процесс капитала $V(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dV(t) = \sum_{i=1}^m h_i(t)V(t) \left[(A_i + \sum_{p=1}^n \alpha_{ip} X_p(t)) dt + \sum_{k=1}^{m+n} \sigma_{ik} dW_k(t) \right], \quad (0.3.4)$$

$$V(0) = v > 0.$$

В **четвертом пункте** подробно рассмотрена одна из возможных методик оптимальной стратегии инвестирования — модель Белецкого-Плиски на бесконечном горизонте времени.

¹ $(\cdot)^T$ — оператор транспонирования

Задача сводится к задаче максимизации функционала над классом допустимых стратегий \mathcal{H}^1 :

$$J_\theta := \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{Q_\theta(t)}{t}, \text{ где } Q_\theta(t) := \frac{-2}{\theta} \ln \mathbf{E}(e^{(-\theta/2) \ln V(t)}), \theta > -2, \theta \neq 0,$$

где $V(t)$ - капитал портфеля, составленного из m активов.

Возникновение этого функционала у Т.Р. Белецкого и С.Р. Плиски обусловлено методом, им приходится искать решение уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана. Подробный алгоритм отыскания оптимальной стратегии инвестирования H_θ и соответствующего максимального значения функционала J_θ приводится в работах Т.Р. Белецкого, С.Р. Плиски [11], [12].

Согласно разложению в ряд Тейлора в окрестности точки $\theta = 0$ (см. [11],[12]), имеем²

$$Q_\theta(t) = \mathbf{E}(\ln V(t)) - \frac{\theta}{4} \mathbf{Var}(\ln V(t)) + O(\theta^2), \quad (0.3.5)$$

поэтому функционал J_θ был интерпретирован исследователями как ожидаемый темп роста капитала портфеля с учетом дисперсии с точностью до θ^2 .

Вторая глава носит технический характер, результаты ее используются в главе 3. Глава состоит из трех пунктов.

В **первом пункте** описывается постановка задачи нахождения условного математического ожидания и условной дисперсии случайной величины F при фиксированном значении величины X , когда случайные величины описываются сто-

¹ $\mathbf{E}(\cdot)$ — математическое ожидание в вероятностном пространстве $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$

² $\mathbf{Var}(\cdot)$ дисперсия в вероятностном пространстве $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$

хастическими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} dF &= A(t, F, X)dt + \sigma(t, F, X)dW_1, \\ dX &= B(t, F, X)dt + \lambda(t, F, X)dW_2, \\ F(0) &= f, X(0) = x, t \geq 0, f \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (0.3.6)$$

где $W = (W_1, W_2)$ - двумерное броуновское движение с независимыми компонентами, A, B, σ, λ — заданные функции. В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда A, B — линейные функции от F и X .

При построении оптимальной стратегии управления, описываемой в главе 3, под F будем понимать логарифм капитала портфеля, под X - рыночный фактор.

Совместная плотность распределения $P(t, f, x)$ случайных величин F и X описывается уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова (см., например, [18]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t, f, x)}{\partial t} &= -\frac{\partial A(t, F, X)P(t, f, x)}{\partial f} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma^2(t, F, X)P(t, f, x)}{\partial f^2} \\ &\quad - \frac{\partial B(t, F, X)P(t, f, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda^2(t, F, X)P(t, f, x)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (0.3.7)$$

с начальными данными

$$P(0, f, x) = P_0(f, x), \quad (0.3.8)$$

определенными начальными распределениями F и X .

Если $P(t, f, x)$ известна, то можно найти условное математическое ожидание (среднее) величины F при фиксированном значении X в момент времени t , определенное формулой, согласно, например, [19]:

$$\bar{f}(t, x) := \mathbf{E}(F(t)|X(t) = x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} f P(t, f, x) df}{\int_{\mathbb{R}} P(t, f, x) df}. \quad (0.3.9)$$

Условная дисперсия величины F при фиксированном значении X в момент времени t задается формулой

$$\bar{v}(t, x) := \mathbf{Var}(F(t)|X(t) = x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} f^2 P(t, f, x) df}{\int_{\mathbb{R}} P(t, f, x) df} - \bar{f}^2(t, x). \quad (0.3.10)$$

Во **втором и третьем пунктах** приводятся алгоритмы вычисления условных математических ожиданий и условных дисперсий одних случайных величин при фиксированных значениях других случайных величин.

Для отыскания фундаментального решения уравнения (0.3.7) существуют громоздкие алгоритмы с точностью до решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений для матричных уравнений Риккати (например, в работах S. Yau [20], R. Cordero-Soto, R.M. Lopez, E. Suazo, S.K. Suslov [21]). Однако, для некоторого простого, но важного для приложений выбора начальных данных задача (0.3.7), (0.3.8) имеет явное решение в элементарных функциях.

В случае, когда A и B — линейные функции от X и F (могут быть с коэффициентами, зависящими от времени), а σ и λ не зависят от X и F , то уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова относится к так называемым “уравнениям второго порядка” — уравнениям параболического типа, у которых сумма степеней производных по пространственным переменным и степеней многочленов, стоящих в качестве коэффициентов при этих производных, равна двум. В этом случае при выборе специальных начальных данных задача (0.3.7), (0.3.8) сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Есть классы уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова (кроме уравнений второго порядка), решение которых может также быть сведено к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений. К ним приводят так называемые “афинные модели” [32].

Также отметим, что иногда преобразование Фурье по переменным f, x функции $P(t, f, x)$ находится гораздо проще, чем сама эта функция. В этом случае условное математическое ожидание и условную дисперсию можно выразить в тер-

минах преобразования Фурье.

Мы используем следующий результат. Предположим, что $\hat{P}(t, \mu, \xi)$ – преобразование Фурье по переменным f, x функции $P(t, f, x)$, являющейся решением задачи (0.3.7), (0.3.8). Пусть $\hat{P}(t, 0, \xi)$ и $\partial_\mu \hat{P}(t, 0, \xi)$ являются по ξ убывающими на бесконечности быстрее всякой степени функциями. Тогда величина $\bar{f}(t, x)$, определяемая формулой (0.3.9), может быть найдена как

$$\bar{f}(t, x) = \frac{iF_\xi^{-1} [\partial_\mu \hat{P}(t, 0, \xi)](t, x)}{F_\xi^{-1} [\hat{P}(t, 0, \xi)](t, x)}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Условная дисперсия величины F при фиксированном значении X в момент времени t , определенная формулой (0.3.10), также может быть найдена в терминах преобразования Фурье от совместной плотности распределения $P(t, f, x)$:

$$\bar{v}(t, x) = \frac{(F_\xi^{-1} [\partial_\mu \hat{P}(t, 0, \xi)])^2 - F_\xi^{-1} [\partial_\mu^2 \hat{P}(t, 0, \xi)] F_\xi^{-1} [\hat{P}(t, 0, \xi)]}{(F_\xi^{-1} [\hat{P}(t, 0, \xi)])^2}(t, x).$$

В **третьей главе** построена стратегия инвестирования, применяя которую инвестор может управлять портфелем инвестирования и максимизировать доход от портфеля в каждый выбранный момент времени.

В **первом пункте** приведена постановка задачи. Рассмотрен рынок активов (0.3.1), (0.3.2) и портфель инвестирования (0.3.4), определенные в рамках модели стохастического рынка согласно Т.Р. Белецкому и С.Р. Плиске. Если положить $\ln V(t) = F(t)$, то согласно формуле Ито

$$dF(t) = \left[\sum_{i=1}^m (h_i A_i - \frac{1}{2} h_i^2 \sum_{k=1}^{m+n} \sigma_{ik}^2) + \sum_{i=1}^m h_i \sum_{p=1}^n \alpha_{ip} X_p(t) \right] dt + \sum_{i=1}^m h_i \sum_k^{m+n} \sigma_{ik} dW_k(t).$$

Решается задача: при фиксированном t найти $\max_{h=(h_1, \dots, h_m)} \bar{Q}_\gamma(t, x; h)$ над классом допустимых стратегий инвестирования h , заданных в (0.3.3) в рамках модели

Белецкого-Плиски, при фиксированных значениях факторов $X_1(t) = x_1, \dots, X_n(t) = x_n$ в заданный момент времени t , где

$$\bar{Q}_\gamma(t, x; h) := \bar{f}(t, x; h) - \gamma \bar{v}(t, x; h), \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

и $\gamma = \frac{\theta}{4} > 0$ — коэффициент риска, подобный параметру θ в модели Белецкого-Плиски. Функционал \bar{Q}_γ аналогичен первым двум членам разложения в ряд Тейлора по малому рискочувствительному параметру θ функционала Q_θ в модели Белецкого-Плиски (0.3.5).

Решение задачи экстремума дает нам стратегию, позволяющую получить максимальный доход портфеля с учетом потерь, возникающих из-за случайности, описываемой дисперсией. Меняя параметр γ , мы можем преувеличивать или уменьшать роль случайности, либо вовсе ее не учитывать, устремляя γ к нулю.

Во **втором пункте** приведен алгоритм решения задачи экстремума для однофакторного случая ($n = 1$):

- сначала вычисляются условное математическое ожидание и условная дисперсия по одному из алгоритмов, приведенных в главе 2;
- затем выписывается функционал $\bar{Q}_\gamma(t, x; h)$ в явном виде, это будет квадратичная функция по h ;
- далее применяется метод Лагранжа для отыскания экстремума функции.

Предложенная модель рассмотрена в случаях, когда фактор моделируется двумя различными способами — в качестве линейной процентной ставки (процентной ставки спот или модель Васичека, [22]):

$$dR(t) = (B + \beta R(t))dt + \lambda dW(t),$$

$$R(0) = r, B > 0, \beta < 0, \lambda > 0,$$

и нелинейной ставки, когда волатильность ее пропорциональна квадратному корню от значения ставки (модель Кокса-Ингерсолла-Росса, [23]):

$$dR(t) = (B + \beta R(t))dt + \lambda\sqrt{R(t)}dW(t),$$

$$R(0) = r > 0, B > 0, \beta < 0, \lambda > 0, -2\beta B > \lambda^2.$$

Отметим, что Т.Р. Белецкий и С.Р. Плиски построили свою стратегию лишь для случая линейной процентной ставки Васичека. Ставку Кокса-Ингерсолла-Росса они также рассматривали, но получили лишь частичные качественные результаты.

В **третьем пункте** описан случай линейной процентной ставки. Приведен важнейший пример портфеля из двух активов, когда один из активов банковский счет, а фактор — процентная ставка.

Рассмотрены случаи первоначального гауссовского распределения процентной ставки (со средним x_0 и дисперсией s^2), в том числе и предельные случаи $s = 0, s \rightarrow \infty$, а также случай начального равномерного распределения. Выяснено, что в случае гауссовского распределения, как правило, возникает ограничение сверху на время применимости стратегии.

На основе данного примера портфеля из двух активов проведено сравнение полученной стратегии управления со стратегией Белецкого-Плиски в случае равномерного начального распределения величины процентной ставки. Сравнение проведено в смысле условного математического ожидания капитала портфеля при фиксированном значении текущей процентной ставки. Показано, что при этом способе сравнения при любом значении t полученная нами стратегия дает лучший результат, если параметр риска γ принимается равным нулю. Если параметр

риска γ отличен от нуля, то при определенных значениях параметров модели наша стратегия дает лучший результат до некоторого момента $t > 0$.

Также изучены асимптотики долей капитала и влияние различных параметров модели на стратегию управления. Детальный анализ проводился на примере портфелей из 2-х и 3-х активов для случая равномерного начального распределения величины процентной ставки. Были получены следующие результаты:

1. Предельные значения асимптотик стратегий вложения на бесконечности в случае двух активов зависят только от значений параметров α_i , если $\alpha_1 \neq \alpha_2$. В случае $\alpha_1 = \alpha_2$ предельное поведение стратегий зависит и от остальных параметров. В случае трех активов предельные стратегии зависят от всех параметров модели. В этом смысле случай двух активов является вырожденным. При времени, стремящемся к бесконечности, предпочтительным оказывается тот актив, который зависит от фактора наименьшим образом (соответствующее α_i меньше всего по модулю);
2. В случае трех активов выявлены следующие закономерности:
 - (a) Увеличение параметра шума соответствующего актива (σ_{ik}) приводит к уменьшению доли этого актива в портфеле;
 - (b) Если разница между $\alpha_i, i = 1, \dots, 3$, не велика, то влияние параметра A_i при больших временах мало. Однако при малых временах влияние A_i определяющее. Это приводит к резко отличающейся стратегии вложения при больших и малых временах;
 - (c) Влияние параметра риска γ аналогично влиянию параметра β . Увеличение того и другого по модулю влечет более быстрый выход стратегий на

асимптотику.

В **четвертом пункте** описан случай нелинейной процентной ставки, когда фактор является процентной ставкой Кокса-Интерсолла-Росса. Явные формулы оптимальных стратегий удастся получить только для случая равномерного начального распределения величины процентной ставки.

В **пятом пункте** приводится сравнение стратегий вложения для случаев линейной и нелинейной процентных ставок.

В **четвертой главе** приводится описание программного продукта, разработанного для нахождения оптимальной стратегии согласно методу, описанному в диссертации, на примере реальных данных (индекса NASDAQ и эффективной процентной ставки по федеральным фондам за 2009-2011 годы). Практические расчеты показали, что при равномерном и гауссовском распределениях линейной процентной ставки в общем случае получаются близкие стратегии.

При помощи программного продукта также были проанализированы различные случаи применения предложенной стратегии: разные значения параметра риска, разные периоды выборки исторических данных, разные интервалы пересчета стратегии.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доценту Розановой О.С. за помощь, оказанную при работе над диссертацией.

Глава 1

Общие определения и понятия

1.1 Проблема выбора инвестиционного портфеля

Понятие инвестиционного процесса связано с тем, каким образом инвестор принимает решение при выборе ценных бумаг, в которые осуществляются инвестиции, объемов и сроков инвестирования. Коротко опишем особенности формирования инвестиционного портфеля на практике. Инвестиционный процесс, согласно [24], состоит из пяти основных этапов:

- Выбор инвестиционной политики;
- Анализ рынка ценных бумаг;
- Формирование портфеля ценных бумаг;
- Пересмотр портфеля ценных бумаг;
- Оценка эффективности ценных бумаг.

Выбор инвестиционной политики включает определение цели инвестора и объема инвестируемых средств. Цели инвестирования должны формулироваться с учетом уровня ожидаемой доходности от инвестиций и степени допустимого риска потерять вложения. Этот этап завершается выбором потенциальных видов финан-

совых активов для включения в основной портфель. Затем осуществляется анализ рынка ценных бумаг - изучение отдельных видов ценных бумаг, выбранных для инвестирования. По результатам анализа рынка осуществляется формирование портфеля ценных бумаг - определение конкретных активов для вложения средств, а также распределение долей инвестируемого капитала между активами.

Описанные этапы инвестиционного процесса периодически повторяются. Это связано с тем, что с течением времени изменяются курсы ценных бумаг, в результате чего некоторые первоначально выбранные активы перестают быть привлекательными для инвестора. Также могут измениться цели инвестирования, и текущий портфель перестает быть оптимальным. Все это становится основанием для пересмотра портфеля. Отметим, что решение о пересмотре портфеля зависит помимо прочих факторов от размера транзакционных издержек и ожидаемого роста доходности пересмотренного портфеля. Периодическая оценка эффективности портфеля позволяет контролировать процесс управления и делать его более эффективным. Таким образом, каждый инвестор сталкивается с проблемой управления инвестиционным портфелем в течение всего периода инвестирования.

Способы размещения средств по активам делятся на стратегические (Strategic Asset Allocation в терминологии M.J. Brennan et al. [10]) и тактические (Tactical Asset Allocation, иногда их называют близорукими). Стратегические способы инвестирования максимизируют выгоду к конкретному моменту времени в будущем (в частности, это время может быть бесконечным). Предполагается, что отношение инвестора к риску, а также значение ожидаемой доходности портфеля постоянны в течение долгосрочного периода. В этом случае портфель пересматривается эпизодически, скажем, раз в три года. Однако, если портфель принадлежит, на-

пример, хедж-фонду, который создается, как правило, на короткий промежуток времени, управление должно учитывать изменение параметров активов в прямом времени и подразумевать возможность “выхода из игры” с наименьшими потерями в любой момент (см., например, [17]). В этом случае приходится использовать тактический способ размещения средств по активам, когда портфель пересматривается регулярно (например, каждые три месяца).

Уже давно предпринимаются попытки дать математическую формализацию задач, с которыми приходится иметь дело инвестору. Мы коротко остановимся на некоторых.

1.2 Задача составления эффективного портфеля

Идея, лежащая в основе оценки эффективности, заключается в сравнении доходностей активно управляемого портфеля с доходностями альтернативного так называемого “эталонного” портфеля. Подходящий эталонный портфель должен быть сопоставимым, достижимым, и кроме того, его уровень риска должен быть близким к уровню риска активно управляемого портфеля.

Поскольку портфель представляет собой набор различных ценных бумаг, то проблема выбора инвестиционного портфеля эквивалентна проблеме выбора оптимального портфеля из набора возможных портфелей. Основой теории формирования портфеля является фундаментальная работа Г. Марковица 1952 года [25]. Г. Марковиц отмечает, что при выборе инвестиционного портфеля инвестор стремится одновременно максимизировать меру ожидаемой доходности портфеля и минимизировать риск неверной оценки этой меры. Поскольку инвестор не знает каким будет уровень доходности большинства возможных портфелей, то он дол-

жен считать уровень доходности, связанный с любым из этих портфелей, случайной переменной. Такие переменные имеют свои характеристики - среднее значение и среднеквадратичное отклонение ожидаемой доходности портфеля. Среднее значение может быть представлено как мера потенциального вознаграждения, связанная с конкретным портфелем, а среднеквадратичное отклонение - как мера риска, связанная с данным портфелем. После того, как каждый портфель был исследован в смысле потенциального вознаграждения и риска, можно составить множество эффективных портфелей. Портфель был назван *эффективным*, если из тех же ценных бумаг и при тех же ограничениях на их пропорции нельзя составить другой портфель, который имел бы такое же среднее значение ожидаемой доходности и меньшее среднеквадратичное отклонение либо такое же среднеквадратичное отклонение и большее среднее значение. Затем инвестор должен выбрать портфель который является для него подходящим. Подход Г. Марковица основывается на использовании кривых безразличия, которые отражают отношение инвестора к риску и доходности.

В настоящее время существует множество различных методов выбора эффективного портфеля, основанных на различных математических аппаратах. Одним из наиболее распространенных подходов является моделирование уровня доходности портфеля в качестве стохастической случайной величины. В таком случае говорят о *стохастической модели рынка*. В следующем разделе мы опишем стохастическую модель рынка согласно Т.Р. Белецкому и С.Р. Плиске.

1.3 Стохастическая модель рынка

Т.Р. Белецкий и С.Р. Плискин в связи с задачей оптимального управления портфелем ценных бумаг исследовали следующую модель рынка, состоящего из $m \geq 2$ активов и $n \geq 1$ факторов (см., например, [11],[12]).

Пусть $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство. Обозначим через S_i , $i = 1, \dots, m$, стоимости активов, подчиняющихся стохастическим дифференциальным уравнениям (СДУ) с трендами, зависящими от совокупности рыночных факторов X_j , $j = 1, \dots, n$, каждый из которых также подчинен линейному СДУ:

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = (A_i + \sum_{p=1}^n \alpha_{ip} X_p(t)) dt + \sum_{k=1}^{m+n} \sigma_{ik} dW_k(t), \quad (1.3.1)$$

$$S_i(0) = s_i > 0, i = 1, \dots, m,$$

$$dX_j(t) = (B_j + \sum_{p=1}^n \beta_{jp} X_p(t)) dt + \sum_{k=1}^{m+n} \lambda_{jk} dW_k(t), \quad (1.3.2)$$

$$X_j(0) = x_j, j = 1, \dots, n,$$

где $W(t)$ — $(m+n)$ -мерное броуновское движение с независимыми компонентами $W_k(t)$; $X(t)$ — n -мерный фактор-процесс с компонентами $X_j(t)$; параметры модели $A := [A_i]$, $B := [B_j]$, $\alpha := [\alpha_{ip}]$, $\beta := [\beta_{jp}]$, $\Sigma := [\sigma_{ik}]$, $\Lambda := [\lambda_{jk}]$ — матрицы коэффициентов соответствующей размерности. Согласно [26] (глава 5) существует единственное сильное решение системы (1.3.1), (1.3.2), и процессы $S_i(t)$ положительны с вероятностью 1.

Пусть $\mathcal{G}_t := \sigma((S(s), X(s)), 0 \leq s \leq t)$, где $S(t) = (S_1(t), \dots, S_m(t))$ является процессом стоимостей активов. Обозначим через $h(t) = (h_1(t), \dots, h_m(t))$ m -мерный инвестиционный процесс, или стратегию инвестирования, где $h_i(t)$ — доля капитала, инвестированная в i -й актив в момент времени t . Дадим определение

допустимой стратегии инвестирования, согласно [11].

Определение 1.3. Будем называть стратегию $h(t)$ *допустимой*, если она удовлетворяет следующим условиям¹:

- (i) $\sum_{i=1}^m h_i(t) = 1$;
- (ii) $h(t)$ прогрессивно измерим по \mathcal{G}_t ;
- (iii) $\mathbf{P}\left[\int_0^t h^T(s)h(s)ds < \infty\right] = 1$ для всех конечных $t \geq 0$.

Класс допустимых стратегий инвестирования будем обозначать через \mathcal{H} .

Пусть $h(t)$ допустимая стратегия инвестирования. Тогда существует единственное, сильное, почти всегда положительное решение $V(t)$, удовлетворяющее СДУ

$$dV(t) = \sum_{i=1}^m h_i(t)V(t) \left[(A_i + \sum_{p=1}^n \alpha_{ip}X_p(t))dt + \sum_{k=1}^{m+n} \sigma_{ik}dW_k(t) \right], \quad (1.3.3)$$

$$V(0) = v > 0.$$

Процесс $V(t)$ соответствует капиталу портфеля в момент времени t , где $h_i(t)$ — доля капитала, инвестированная в i -й актив.

1.4 Оптимальная стратегия инвестирования Белецкого и Плиски

В работе [12] для модели (1.3.1), (1.3.2) решается одна из возможных задач оптимального инвестирования капитала $V(t)$ для портфеля, составленного из $m \geq 2$ активов, зависящих от $n \geq 1$ рыночных факторов. А именно, вводится функцио-

¹ $(\cdot)^T$ - оператор транспонирования

нал¹

$$J_\theta := \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{Q_\theta(t)}{t}, \text{ где } Q_\theta(t) := \frac{-2}{\theta} \ln \mathbf{E}(e^{(-\theta/2) \ln V(t)}), \quad \theta > -2, \quad \theta \neq 0.$$

Согласно разложению в ряд Тейлора в окрестности точки $\theta = 0$, имеем²

$$Q_\theta(t) = \mathbf{E}(\ln V(t)) - \frac{\theta}{4} \mathbf{Var}(\ln V(t)) + O(\theta^2), \quad (1.4.1)$$

поэтому функционал J_θ может быть интерпретирован как ожидаемый темп роста капитала портфеля в долгосрочной перспективе с учетом отклонений от среднего значения с точностью до θ^2 . Вторая компонента, учитывающая отклонения от среднего, пропорциональна θ , поэтому параметр θ был принят за параметр риска, где $\theta > 0$ соответствует нерискующему инвестору, $\theta < 0$ — рискующему инвестору и $\theta = 0$ — безрисковый случай.

Для решения проблемы оптимального инвестирования в [12] предложено решить следующую задачу, обозначаемую (P_θ) :

для $\theta \in (0, \infty)$ максимизировать функционал

$$J_\theta(v, x; h(\cdot)) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{-2}{\theta} t^{-1} \ln \mathbf{E}[e^{(-\theta/2) \ln V(t)} | V(0) = v, X(0) = x]$$

над классом допустимых стратегий инвестирования $h(\cdot)$, заданных в определении 1.3, где $V(t), X(t)$ описываются уравнениями (1.3.3), (1.3.2).

Эта задача была интерпретирована авторами как предупреждение о больших отклонениях между реальной и ожидаемой ставкой для инвестора, заинтересованного в максимизации дохода от портфеля инвестирования в долгосрочной перспективе, с учетом отношения инвестора к риску.

¹ $\mathbf{E}(\cdot)$ — математическое ожидание в вероятностном пространстве $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$

² $\mathbf{Var}(\cdot)$ дисперсия в вероятностном пространстве $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.1. Для $\theta < 0$ задача (P_θ) может быть решена аналогично случаю $\theta > 0$. Случай $\theta = 0$ рассматривается отдельно как предельный при $\theta \rightarrow 0$.

В [12] был предложен алгоритм отыскания оптимальной стратегии инвестирования H_θ и соответствующего максимального значения функционала J_θ , обозначаемого $\rho(\theta)$. Для того, чтобы сформулировать основные результаты было введено следующее обозначение для $\theta \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$

$$K_\theta(x) := \inf_{h \in \chi, 1^T h = 1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{2} + 1 \right) h^T \Sigma \Sigma^T h - h(A + \alpha x) \right], \quad (1.4.2)$$

где $(A + \alpha x)$ — вектор с компонентами $(A + \alpha x)_i = (A_i + \sum_{p=1}^n \alpha_{ip} x_p)$.

Также были приняты следующие условия:

УСЛОВИЕ 1.4.1. $\chi = \mathbb{R}^n$

УСЛОВИЕ 1.4.2. $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} K_\theta(x) = -\infty$ для $\theta > 0$. Здесь $\|\cdot\|$ — норма в \mathbb{R}^n .

УСЛОВИЕ 1.4.3. Матрица $\Lambda \Lambda^T$ — положительно-определенная.

УСЛОВИЕ 1.4.4. Матрица $\Sigma \Lambda^T = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.2. (i) Если $\Sigma \Sigma^T$ — положительно-определенная матрица, то условие 1.4.2 вытекает из условия 1.4.1

(ii) Условия 1.4.1-1.4.4 достаточны для справедливости приводимых далее результатов, но условие 1.4.2 не является необходимым в общем случае (как показывает пример из раздела 4, [12]).

Следующие две теоремы представляют основные результаты, касающиеся решения задачи (P_θ) .

ТЕОРЕМА 1.4.1. Пусть выполняются условия 1.4.1-1.4.4. При фиксированном $\theta > 0$ обозначим через $H_\theta(x)$ точку, в которой достигается инфимум (1.4.2), то есть

$$K_\theta(x) := \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{2} + 1 \right) H_\theta(x)^T \Sigma \Sigma^T H_\theta(x) - H_\theta(x)(A + \alpha x) \right].$$

Тогда стратегия инвестирования h_θ является оптимальной для задачи (P_θ) , где $\forall t \geq 0$

$$h_\theta(t) = H_\theta(X(t)). \quad (1.4.3)$$

ТЕОРЕМА 1.4.2. Пусть выполняются условия 1.4.1-1.4.3. Рассмотрим задачу (P_θ) для фиксированного $\theta > 0$. Пусть $h_\theta(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.4.1. Тогда

(a) Для всех $v > 0$ и $x \in R^n$ выполняется

$$\begin{aligned} J_\theta(v, x; h_\theta(\cdot)) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-2}{\theta} \right) t^{-1} \ln \mathbf{E}[e^{(-\theta/2) \ln V(t)} | V(0) = v, X(0) = x] \\ &:= \rho(\theta). \end{aligned}$$

(b) Постоянная $\rho(\theta)$ — это единственная неотрицательная постоянная, являющаяся частью решения $(\rho(\theta), v(x; \theta))$ следующего уравнения:

$$\begin{aligned} \rho &= (B + \beta x)^T \text{grad}_x v(x) - \frac{\theta}{4} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} \sum_{k=1}^{n+m} \lambda_{ik} \lambda_{jk} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^{n+m} \lambda_{ik} \lambda_{jk} - K_\theta(x), \quad (1.4.4) \\ v(x) &\in \mathbf{C}^2(R^n), \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} v(x) = \infty, \quad \rho = \text{const}. \end{aligned}$$

Отдельно рассматривается случай $\theta = 0$, соответствующий классической задаче максимизации ожидаемого темпа роста капитала портфеля с логарифмической функцией полезности (см., например, [8]). Эта задача обозначается через (P_0) и формулируется следующим образом:

максимизировать функционал

$$J_0(v, x; h(\cdot)) = \liminf_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \mathbf{E}[\ln V(t) | V(0) = v, X(0) = x]$$

над классом допустимых стратегий инвестирования $h(\cdot)$, заданных в определении 1.3, где $V(t)$, $X(t)$ описываются уравнениями (1.3.3), (1.3.2).

Для решения задачи (P_0) дополнительно необходимо предположить, что выполняются следующие условия:

УСЛОВИЕ 1.4.5. Для любого $\theta \geq 0$ функция $K_\theta(x)$, определенная в (1.4.2), является квадратичной функцией и имеет следующий вид:

$$K_\theta(x) = \frac{1}{2} x^T K_1(\theta) x + K_2(\theta) x + K_3(\theta),$$

где $K_1(\theta)$, $K_2(\theta)$ и $K_3(\theta)$ — функции соответствующей размерности, зависящие только от θ .

УСЛОВИЕ 1.4.6. Для любого $\theta \geq 0$ матрица $K_1(\theta)$ — симметричная и отрицательно-определенная.

УСЛОВИЕ 1.4.7. Матрица β размерности $n \times n$ с компонентами β_{jr} из (1.3.2) является устойчивой.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.3. (i) Условие 1.4.5 выполняется, если, например, матрица $\Sigma \Sigma^T$ невырожденная и $\chi = R^n$. При этом невырожденность матрицы $\Sigma \Sigma^T$ не является необходимым условием в общем случае.

(ii) В условии 1.4.5 $\lim_{\theta \rightarrow 0} K_i(\theta) = K_i(0)$ для $i = 1, 2, 3$, согласно [27].

Для того, чтобы установить связь между задачами (P_0) и (P_θ) , $\theta > 0$, рассмот-

рим уравнение:

$$\rho(0) = (B + \beta x)^T \text{grad}_x v_0(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 v_0(x)}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^{n+m} \lambda_{ik} \lambda_{jk} - K_0(x), \quad (1.4.5)$$

$$v_0(x) \in C^2(R^n), \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} v_0(x) = \infty, \quad \rho(0) = \text{const.}$$

Справедливы следующие две теоремы:

ТЕОРЕМА 1.4.3. *Пусть выполняются условия 1.4.3-1.4.7. Тогда оптимальная стратегия для задачи (P_0) та же, что и в теореме 1.4.1 при условии $\theta = 0$, и $\rho(0) = \rho(\theta)$ из теоремы 1.4.2 при условии $\theta = 0$. Более того, постоянные $\rho(\theta), \theta > 0$, являющиеся частью решений (1.4.4), стремятся к постоянной $\rho(0)$ при $\theta \rightarrow 0$.*

Следующая теорема характеризует ожидаемый темп роста капитала при оптимальной стратегии инвестирования для параметра риска $\theta > 0$. Будем обозначать эту величину через ρ_θ , отличную от $\rho(\theta)$ из теоремы 1.4.1.

ТЕОРЕМА 1.4.4. *Пусть выполняются условия 1.4.3-1.4.7. Для фиксированного $\theta > 0$ положим, что $H_\theta(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.4.1 и является линейной функцией. Пусть $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} [\frac{1}{2} H_\theta(x)^T \Sigma \Sigma^T H_\theta(x) - H_\theta(x)^T (A + \alpha x)] = -\infty$.*

Рассмотрим уравнение

$$\rho_\theta = (B + \beta x)^T \text{grad}_x v_{\theta,0}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 v_{\theta,0}(x)}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^{n+m} \lambda_{ik} \lambda_{jk} -$$

$$- [\frac{1}{2} H_\theta(x)^T \Sigma \Sigma^T H_\theta(x) - H_\theta(x)^T (A + \alpha x)], \quad (1.4.6)$$

$$v_{\theta,0}(x) \in C^2(R^n), \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} v_{\theta,0}(x) = \infty, \quad \rho_\theta = \text{const.}$$

Тогда существует решение $(\rho_\theta, v_{\theta,0})$ этого уравнения такое, что постоянная ρ_θ единственна и

$$J_0(v, x; h_\theta(\cdot)) = \rho_\theta$$

для всех $(v, x) \in (0, \infty) \times R^n$, где $h_\theta(\cdot)$ задается уравнением (1.4.3).

Доказательства теорем приведены в [11]. Ключевым результатом Т.Р. Белецкого и С.Р. Плиски является тот факт, что задача нахождения оптимальной стратегии сводится к решению уравнения с частными производными (1.4.4). Пример решения уравнения (1.4.4), а также явные формулы для оптимальной стратегии и максимального значения функционала $\rho(\theta)$, авторы приводят для классического портфеля из двух активов, когда один из них — банковский счет, а фактор — линейная процентная ставка. Мы приведем этот пример.

Пусть рисковый актив, скажем, биржевой индекс, описывается СДУ:

$$\frac{dS_1(t)}{S_1(t)} = (A_1 + \alpha_1 R(t))dt + \sigma_1 dW_1(t), \quad S_1(0) = s > 0,$$

где линейная процентная ставка Васичека $R(t)$ в свою очередь тоже описывается СДУ:

$$dR(t) = (B + \beta R(t))dt + \lambda dW_2(t), \quad R(0) = r.$$

Здесь $A_1, \alpha_1, B, \beta, \sigma_1, \lambda$ — заданные константы, причем $B > 0, \beta < 0$, а W_1, W_2 — два независимых броуновских движения.

Будем считать, что инвестор может занять длинную или короткую позицию по отношению к биржевому индексу, а также занимать или одалживать деньги с непрерывным процентным начислением по действующей ставке. Последнее представим в виде процесса, описывающего банковский счет:

$$\frac{dS_2(t)}{S_2(t)} = R(t)dt.$$

Здесь $S_2(t)$ — баланс сберегательного счета в момент времени t при условии, что $S_2(0) = 1$ (одна денежная единица была размещена на счет в нулевой момент времени).

Поскольку рассматривается портфель из двух активов, то стратегию инвестирования удобно записывать следующим образом: $h_1 = H_\theta$ — доля капитала, инвестированная в биржевой индекс, и соответственно $h_2 = 1 - H_\theta$ — доля капитала, размещенная на банковском счете.

Таким образом, будем решать задачу (P_θ) в модели рынка (1.3.1), (1.3.2) при $m = 2$, $n = 1$, полагая $(h_1, h_2) = (H_\theta, 1 - H_\theta)$, $X(t) = R(t)$, $B = B$, $\beta = \beta$, $\Lambda = (0, 0, \lambda)^T$, $A = (A_1, 0)^T$, $\alpha = (\alpha_1, 1)^T$,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 1.4.1

$$K_\theta(R) = \inf_{h \in \mathbb{R}} [(1/2)(\theta/2 + 1)(h, 1 - h)\Sigma\Sigma^T(h, 1 - h)^T - (h, 1 - h)(A + \alpha R)],$$

и тогда

$$H_\theta := H_\theta(R) = \frac{A_1 + (\alpha_1 - 1)R}{(1 + \frac{\theta}{2})\sigma_1^2}, \quad (1.4.7)$$

$$K_\theta(R) = -R - \frac{(A_1 + (\alpha_1 - 1))^2 R^2}{(\theta + 2)\sigma_1^2}.$$

Согласно теореме 1.4.2 $\rho(\theta)$ является частью решения (ρ, v) уравнения

$$\rho = \frac{1}{2}\lambda^2 v''(R) + (B + \beta R)v'(R) - \frac{\theta}{4}\lambda^2 (v'(R))^2 - K_\theta(R),$$

и, согласно [12], равно

$$\rho(\theta) = \lambda^2 N_1 + B N_2 - \frac{\lambda^2 \theta N_2^2}{4} + \frac{A_1^2}{(\theta + 2)\sigma_1^2}, \quad (1.4.8)$$

где

$$N_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + \frac{\theta\lambda^2(\alpha_1-1)^2}{(\theta+2)\sigma_1^2}}}{\lambda^2\theta}, \quad N_2 = \frac{1 - \frac{2A_1(\alpha_1-1)}{(\theta+2)\sigma_1^2} + 2BN_1}{\sqrt{\beta^2 + \frac{\theta\lambda^2(\alpha_1-1)^2}{(\theta+2)\sigma_1^2}}}.$$

Согласно теореме 1.4.4, решив уравнение

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{1}{2}\lambda^2 v''(R) + (B + \beta R)v'(R) - \\ & - \left[\frac{1}{2}(H_\theta(R), 1 - H_\theta(R))\Sigma\Sigma^T(H_\theta(R), 1 - H_\theta(R))^T - \right. \\ & \left. - (H_\theta(R), 1 - H_\theta(R))(A + \alpha R) \right], \end{aligned}$$

получим

$$\rho_\theta = -\frac{B}{\beta} + \frac{2(\theta + 1)}{(\theta + 2)^2\sigma^2} \left[\left[A_1 - \frac{B}{\beta}(\alpha_1 - 1) \right]^2 - \frac{\lambda^2(\alpha_1 - 1)^2}{2\beta} \right]. \quad (1.4.9)$$

Отметим, что Т.Р. Белецкий и С.Р. Плиски предлагают инвестору оптимальную стратегию для получения максимального дохода от портфеля инвестирования на бесконечности (при $t \rightarrow \infty$). В настоящей работе предлагается иная стратегия, применяя которую инвестор может управлять портфелем инвестирования и максимизировать доход от портфеля в каждый выбранный момент времени. Описание стратегии в фиксированный момент времени и сравнение ее со стратегией Белецкого-Плиски приводится в главе 3. Для построения стратегии инвестирования в фиксированный момент времени потребуется решить задачу нахождения условных математических ожиданий и условных дисперсий одних случайных величин при фиксированных значениях других. Алгоритмы решения задачи приводятся в главе 2.

Глава 2

О некоторых подходах к решению задачи нахождения условных математических ожиданий случайных величин

2.1 Постановка задачи и два подхода к построению решения

Рассмотрим систему СДУ достаточно общего вида

$$\begin{aligned}dF &= A(t, F, X)dt + \sigma(t, F, X)dW_1, \\dX &= B(t, F, X)dt + \lambda(t, F, X)dW_2, \\F(0) &= f, X(0) = x, t \geq 0, f \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R},\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

где $W = (W_1, W_2)$ - двумерное броуновское движение с независимыми компонентами, A, B, σ, λ - заданные функции.

Совместная плотность распределения $P(t, f, x)$ случайных величин F и X описывается уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) (см., например, [19],

[28])

$$\frac{\partial P(t, f, x)}{\partial t} = -\frac{\partial A(t, F, X)P(t, f, x)}{\partial f} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma^2(t, F, X)P(t, f, x)}{\partial f^2} - \frac{\partial B(t, F, X)P(t, f, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda^2(t, F, X)P(t, f, x)}{\partial x^2} \quad (2.1.2)$$

с начальными данными

$$P(0, f, x) = P_0(f, x), \quad (2.1.3)$$

определенными начальными распределениями F и X .

Если $P(t, f, x)$ известна, то можно найти условное математическое ожидание (среднее) величины F при фиксированном значении X в момент времени t , определенное формулой (согласно, например, [19], [29])

$$\bar{f}(t, x) := \mathbf{E}(F|X = x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} fP(t, f, x)df}{\int_{\mathbb{R}} P(t, f, x)df}. \quad (2.1.4)$$

Заметим, что если мы выберем $P_0(f, x) = \delta(f - f_0)g(x)$, где $f_0 \in \mathbb{R}$ и $g(x)$ - произвольная функция, $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 1$, то $\bar{f}(0, x) = f_0$. Некоторые свойства величины (2.1.4) изучены в [30], [31].

Условная дисперсия величины F при фиксированном значении X в момент времени t задается формулой

$$\bar{v}(t, x) := \mathbf{Var}(F|X = x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} f^2 P(t, f, x)df}{\int_{\mathbb{R}} P(t, f, x)df} - \bar{f}^2(t, x). \quad (2.1.5)$$

Для отыскания фундаментального решения уравнения (2.1.2) существуют громоздкие алгоритмы с точностью до решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для матричных уравнений Риккати [20], [21]. Однако, для некоторого простого, но важного для приложений выбора начальных данных задача (2.1.2), (2.1.3) имеет явное решение в элементарных функциях.

Также отметим, что иногда преобразование Фурье по переменным f, x функции $P(t, f, x)$ находится гораздо проще, чем сама эта функция. Далее мы представим два подхода к решению задачи.

2.2 Сведение задачи к решению системы ОДУ

Пусть случайные величины F и X описываются СДУ:

$$\begin{aligned} dF(t) &= (A + \alpha_1 X(t) + \alpha_2 F(t))dt + \sigma_1 dW_1(t) + \sigma_2 dW_2(t), \\ dX(t) &= (B + \beta_1 X(t) + \beta_2 F(t))dt + \lambda_1 dW_1(t) + \lambda_2 dW_2(t), \\ F(0) &= f, X(0) = x, t \geq 0, f, x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

где $W(t) = (W_1(t), W_2(t))$ — двумерное броуновское движение; $A, B, \alpha_i, \beta_i, \sigma_i, \lambda_i$ — заданные гладкие функции от t , $i = 1, 2$.

Тогда совместная плотность распределения $P(t, f, x)$ случайных величин F и X описывается уравнением ФПК

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t, f, x)}{\partial t} &= -(A(t) + \alpha_1(t)x) \frac{\partial P(t, f, x)}{\partial f} - \\ &- \alpha_2(t) \left(P(t, f, x) + f \frac{\partial P(t, f, x)}{\partial f} \right) - (B(t) + \beta_2(t)f) \frac{\partial P(t, f, x)}{\partial x} - \\ &- \beta_1(t) \left(P(t, f, x) + x \frac{\partial P(t, f, x)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} (\sigma_1^2(t) + \sigma_2^2(t)) \frac{\partial^2 P(t, f, x)}{\partial f^2} + \\ &+ (\sigma_1(t)\lambda_1(t) + \sigma_2(t)\lambda_2(t)) \frac{\partial^2 P(t, f, x)}{\partial f \partial x} + \frac{1}{2} (\lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t)) \frac{\partial^2 P(t, f, x)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

с заданными начальными данными

$$P(0, f, x) = P_0(f, x) = \delta(f - f_0)g(x). \quad (2.2.3)$$

Выполним преобразование Фурье функции $P(t, f, x)$ по переменной f . Тогда

уравнения (2.2.2) и (2.2.3) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{P}(t, \mu, x)}{\partial t} = & -(A(t) + \alpha_1(t)x)\mu \hat{P}(t, \mu, x) - \\
& -\alpha_2(t) \left(\hat{P}(t, \mu, x) - \mu \frac{\partial \hat{P}(t, \mu, x)}{\partial \mu} \right) - (B(t) + \beta_1(t)x) \frac{\partial \hat{P}(t, \mu, x)}{\partial x} - \\
& -\beta_1(t) \hat{P}(t, \mu, x) - \beta_2(t) \frac{\partial^2 \hat{P}(t, \mu, x)}{\partial x \partial \mu} - \\
& -\frac{1}{2}(\sigma_1^2(t) + \sigma_2^2(t))\mu^2 \hat{P}(t, \mu, x) + \frac{1}{2}(\lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t)) \frac{\partial^2 \hat{P}(t, \mu, x)}{\partial x^2} + \\
& + (\sigma_1(t)\lambda_1(t) + \sigma_2(t)\lambda_2(t))\mu \frac{\partial \hat{P}(t, \mu, x)}{\partial x},
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

$$\hat{P}(0, \mu, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\mu f_0} g(x). \tag{2.2.5}$$

Для получения явных формул мы ограничимся случаем:

$$g(x) = \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2s^2}}}{s\sqrt{2\pi}}, \tag{2.2.6}$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}_+$, причем x_0 — среднее значение величины X в нулевой момент времени, s^2 — дисперсия. Тогда решение задачи (2.2.4), (2.2.5) будем искать в форме:

$$\hat{P}(t, \mu, x) = \frac{e^{\gamma_1(t)+\gamma_2(t)\mu+\gamma_3(t)x+\gamma_4(t)\mu^2+\gamma_5(t)x\mu+\gamma_6(t)x^2}}{s\sqrt{2\pi}}. \tag{2.2.7}$$

Подставим выражение (2.2.7) в уравнения (2.2.4), (2.2.5) с учетом (2.2.6). Затем, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях μ и x , получим систему ОДУ для $\gamma_j(t)$, $j = 1, \dots, 6$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \gamma_1(t)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \lambda_1^2(t) \gamma_3^2(t) + \lambda_2^2(t) \gamma_6(t) + \frac{1}{2} \lambda_2^2(t) \gamma_3^2(t) - \alpha_2(t) - \beta_1(t) - \\
&\quad - B(t) \gamma_3(t) - i \beta_2(t) \gamma_5(t) + \lambda_1^2(t) \gamma_6(t) - i \beta_2(t) \gamma_2(t) \gamma_3(t), \\
\frac{\partial \gamma_2(t)}{\partial t} &= (\lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t)) \gamma_3(t) \gamma_5(t) - B(t) \gamma_5(t) + \alpha_2(t) \gamma_2(t) - \\
&\quad - 2i \beta_2(t) \gamma_4(t) \gamma_3(t) + (\sigma_1(t) \lambda_1(t) + \sigma_2(t) \lambda_2(t)) \gamma_3(t) i - \\
&\quad - i A(t) - i \beta_2(t) \gamma_2(t) \gamma_5(t), \\
\frac{\partial \gamma_3(t)}{\partial t} &= -\beta_1(t) \gamma_3(t) - i \beta_2(t) \gamma_5(t) \gamma_3(t) - 2B(t) \gamma_6(t) - \\
&\quad - 2i \beta_2(t) \gamma_2(t) \gamma_6(t) + 2(\lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t)) \gamma_3(t) \gamma_6(t), \\
\frac{\partial \gamma_4(t)}{\partial t} &= \frac{1}{2} (\lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t)) \gamma_5^2(t) - 2i \beta_2(t) \gamma_4(t) \gamma_5(t) + 2\alpha_2(t) \gamma_4(t) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \sigma_1^2 - \frac{1}{2} \sigma_2^2(t) + (\sigma_1(t) \lambda_1(t) + \sigma_2(t) \lambda_2(t)) \gamma_5(t) i, \\
\frac{\partial \gamma_5(t)}{\partial t} &= -\beta_1(t) \gamma_5(t) - i \beta_2(t) \gamma_5^2(t) + \alpha_2(t) \gamma_5(t) - i \alpha_1(t) - \\
&\quad - 4i \beta_2(t) \gamma_4(t) \gamma_6(t) + 2(\lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t)) \gamma_5(t) \gamma_6(t) + \\
&\quad + 2i(\sigma_1(t) \lambda_1(t) + \sigma_2(t) \lambda_2(t)) \gamma_6(t), \\
\frac{\partial \gamma_6(t)}{\partial t} &= -2\beta_1(t) \gamma_6(t) - 2i \beta_2(t) \gamma_5(t) \gamma_6(t) + 2(\lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t)) \gamma_6^2(t),
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned}
\gamma_1(0) &= -\frac{x_0^2}{2s^2}, \quad \gamma_2(0) = -if_0, \quad \gamma_3(0) = \frac{x_0}{s^2}, \\
\gamma_4(0) &= 0, \quad \gamma_5(0) = 0, \quad \gamma_6(0) = -\frac{1}{2s^2}.
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Если задачу (2.2.8), (2.2.9) удастся явно решить, то подставим в (2.2.7) полученные выражения $\gamma_j(t)$, $j = 1, \dots, 6$, и найдем $\hat{P}(t, \mu, x)$. Далее выполним обратное преобразование Фурье и найдем функцию $P(t, f, x)$. Подставим полученное значение в (2.1.4), проинтегрируем выражение и таким образом получим искомое значение $\bar{f}(t, x)$ при заданных начальных значениях (2.2.6).

Если в (2.2.3) положить

$$g(x) = \frac{1}{2L} \chi_{[-L,L]}(x) = \frac{1}{2L}, \quad x \in [-L, L],$$

что соответствует равномерному начальному распределению случайной величины X на отрезке $[-L, L]$, то величину $\bar{f}(t, x)$ будем понимать как:

$$\bar{f}(t, x) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\int_{[-L,L]} f P(t, f, x) df}{\int_{[-L,L]} P(t, f, x) df}. \quad (2.2.10)$$

Соответственно,

$$\bar{v}(t, x) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\int_{[-L,L]} f^2 P(t, f, x) df}{\int_{[-L,L]} P(t, f, x) df} - \bar{f}^2(t, x). \quad (2.2.11)$$

Тогда задача нахождения $\hat{P}(t, \mu, x)$ сводится к решению системы ОДУ (2.2.8) с начальными условиями $\gamma_1(0) = 0, \quad \gamma_2(0) = -if_0, \quad \gamma_3(0) = 0, \quad \gamma_4(0) = 0, \quad \gamma_5(0) = 0, \quad \gamma_6(0) = 0$.

В разделе 3 главы 3 мы приведем частные случаи системы (2.2.1), возникающие в экономических приложениях, когда функцию $\hat{f}(t, x)$ удастся получить в явном виде. Отметим, что в данном случае уравнение ФПК явно интегрируется, так как оно относится к “уравнениям второго порядка” — уравнениям параболического типа, у которых сумма степеней производных по пространственным переменным и степеней многочленов, стоящих в качестве коэффициентов при этих производных, равна двум.

2.3 Представление в терминах интегралов от преобразования Фурье

Далее мы приведем общую формулу, позволяющую выразить $\bar{f}(t, x)$ в терминах преобразования Фурье от $P(t, f, x)$.

Предположим, что $\hat{P}(t, \mu, \xi)$ — преобразование Фурье по переменным (f, x) функции $P(t, f, x)$, являющейся решением задачи (2.1.2), (2.1.3). Пусть $\hat{P}(t, 0, \xi)$ и $\partial_\mu \hat{P}(t, 0, \xi)$ являются по ξ убывающими на бесконечности быстрее всякой степени функциями. Тогда величина $\bar{f}(t, x)$, определяемая формулой (2.1.4), может быть найдена как

$$\bar{f}(t, x) = \frac{iF_\xi^{-1}[\partial_\mu \hat{P}(t, 0, \xi)](t, x)}{F_\xi^{-1}[\hat{P}(t, 0, \xi)](t, x)}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.3.1)$$

Здесь и ниже под F_μ^{-1} и F_ξ^{-1} понимается обратное преобразование Фурье по переменным μ и ξ , соответственно, $(\cdot, \cdot)_\mu$ означает действие обобщенной функции на основную по переменной μ . Под $(e^{i\mu f}, 1)_f$ понимается $\lim_{L \rightarrow \infty} (e^{i\mu f}, \omega_\varepsilon(f) * \chi_{[-L, L]})_f$, где χ_Ω — характеристическая функция множества Ω , а $\omega_\varepsilon(f)$ — стандартная сглаживающая функция.

Справедливость формулы покажем непосредственным вычислением. Вычислим знаменатель (2.1.4), формально выполнив выкладки (преобразование Фурье понимается в смысле обобщенных функций):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} P(t, f, x) df &= \int_{\mathbb{R}} F_\mu^{-1}[F_\xi^{-1}[\hat{P}(t, \mu, \xi)]] df = \\ &= F_\xi^{-1}\left[\left(F_f^{-1}[1](\mu), \hat{P}(t, \mu, \xi)\right)_\mu\right] = \sqrt{2\pi} F_\xi^{-1}\left[\left(\delta(\mu), \hat{P}(t, \mu, \xi)\right)_\mu\right] = \\ &= \sqrt{2\pi} F_\xi^{-1}[\hat{P}(t, 0, \xi)]. \end{aligned}$$

Аналогично находится числитель:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f P(t, f, x) df &= \int_{\mathbb{R}} f F_\mu^{-1}[F_\xi^{-1}[\hat{P}(t, \mu, \xi)]] df = \\ &= F_\xi^{-1}\left[\left(F_f^{-1}[f](\mu), \hat{P}(t, \mu, \xi)\right)_\mu\right] = -\sqrt{2\pi} i F_\xi^{-1}\left[\left(\delta'(\mu), \hat{P}(t, \mu, \xi)\right)_\mu\right] = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2\pi}i F_{\xi}^{-1} \left[\left(\delta(\mu), \partial_{\mu} \hat{P}(t, \mu, \xi) \right)_{\mu} \right] = i\sqrt{2\pi} F_{\xi}^{-1} [\partial_{\mu} \hat{P}(t, 0, \xi)].$$

Условная дисперсия величины F при фиксированном значении X в момент времени t , определенная формулой (2.1.5), также может быть найдена в терминах преобразования Фурье от совместной плотности распределения $P(t, f, x)$:

$$\bar{v}(t, x) = \frac{(F_{\xi}^{-1} [\partial_{\mu} \hat{P}(t, 0, \xi)])^2 - F_{\xi}^{-1} [\partial_{\mu}^2 \hat{P}(t, 0, \xi)] F_{\xi}^{-1} [\hat{P}(t, 0, \xi)]}{(F_{\xi}^{-1} [\hat{P}(t, 0, \xi)])^2} (t, x). \quad (2.3.2)$$

В разделе 4 главы 3 мы применим полученные формулы для случая, когда волатильность фактора X пропорциональна квадратному корню от значения фактора. Такая модель относится к так называемой “аффинной” модели [32], поэтому уравнение ФПК явно интегрируется.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.1. Аффинные модели получили распространение в финансовой математике, так как с их помощью удается решать многие задачи в аналитической форме. В частности, к аффинным моделям относятся модели процентных ставок Мертона, Васичека и Кокса-Ингерсолла-Росса (см., например, [33], [34], [35]).

Глава 3

Задача составления эффективного портфеля в фиксированный момент времени

3.1 Постановка задачи

Напомним, что рассмотренная в главе 1 оптимальная стратегия Белецкого-Плиски строится на бесконечности по времени. В настоящей главе предлагается иная стратегия, применяя которую инвестор может управлять портфелем инвестирования и максимизировать доход от портфеля в каждый выбранный момент времени.

Рассмотрим рынок активов (1.3.1), (1.3.2) и портфель инвестирования (1.3.3), определенные в рамках модели Белецкого-Плиски. Обозначим $\ln V(t) = F(t)$.

Тогда, согласно формуле Ито, из (1.3.3) получим

$$\begin{aligned}
dF(t) &= \left[\sum_{i=1}^m (h_i A_i - \frac{1}{2} h_i^2 \sum_{k=1}^{m+n} \sigma_{ik}^2) + \sum_{i=1}^m h_i \sum_{p=1}^n \alpha_{ip} X_p(t) \right] dt + \\
&+ \sum_{i=1}^m h_i \sum_k^{m+n} \sigma_{ik} dW_k(t), \\
F(0) &= \ln V(0) = f.
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Зададим функционал $\bar{Q}_\gamma(t, x; h)$ аналогичный первым двум членам разложения в ряд Тейлора по малому рискочувствительному параметру θ функционала $Q_\theta(t)$ в модели Белецкого-Плиски (1.4.1), а именно

$$\bar{Q}_\gamma(t, x; h) = \bar{f}(t, x; h) - \gamma \bar{v}(t, x; h), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \tag{3.1.2}$$

где $\gamma = \frac{\theta}{4} \geq 0$ — коэффициент риска, подобный параметру θ в модели Белецкого-Плиски, $\bar{f}(t, x; h)$ и $\bar{v}(t, x; h)$ — условное математическое ожидание и условная дисперсия величины $F(t)$ при фиксированных значениях факторов $X_1(t) = x_1, \dots, X_n(t) = x_n$. Мы решаем следующую задачу:

при фиксированном t найти $\max_{h=(h_1, \dots, h_m)} \bar{Q}_\gamma(t, x; h)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, над классом допустимых стратегий инвестирования h , заданных в определении 1.3, при фиксированных значениях факторов $X_1(t) = x_1, \dots, X_n(t) = x_n$.

Определение 3.1. Мы будем называть стратегию \bar{H}_γ *оптимальной*, если на ней реализуется максимум функционала $\bar{Q}_\gamma(t, x; h)$ при фиксированных значениях факторов $X_1(t) = x_1, \dots, X_n(t) = x_n$ в заданный момент времени t .

Отыскав максимум этого выражения относительно класса указанных стратегий, мы найдем стратегию, позволяющую получить максимальный доход портфеля с учетом потерь, возникающих из-за случайности, описываемой дисперсией.

Меняя параметр γ , мы можем преувеличивать или преуменьшать роль случайности, либо вовсе ее не учитывать, выбирая $\gamma = 0$. Предложенную модель можно интерпретировать следующим образом. Допустим, инвестор намерен вложить начальный капитал в активы S_i , $i = 1, \dots, m$, стоимости которых зависят от совокупности рыночных факторов X_j , $j = 1, \dots, n$. Стоимости активов и значения факторов изменяются во времени и подчинены СДУ (1.3.1), (1.3.2). Задача инвестора — составить оптимальный портфель, т. е. выбрать доли капитала, вкладываемые в различные активы, так, чтобы максимально увеличить свой ожидаемый доход. Предположим, что инвестору становятся известны явные значения факторов в фиксированный момент времени. Теперь задача инвестора заключается в составлении оптимального портфеля инвестирования с учетом информации о факторах, что и описывает задача нахождения $\max_{h=(h_1, \dots, h_m)} \bar{Q}_\gamma(t, x; h)$. Отметим, что инвестор в любой момент может изменить стратегию инвестирования, например, если ему станут известны новые значения факторов. Таким образом, предложенная модель более гибкая и может применяться, а при необходимости и актуализироваться на протяжении всего времени инвестирования. Такая стратегия инвестирования относится к тактическим (см., например, [17]).

3.2 Алгоритм решения задачи

Приведем алгоритм решения задачи экстремума для однофакторной модели. Рассмотрим систему СДУ (3.1.1), (1.3.2) при $n = 1$, причем будем обозначать

$X_1(t) = X(t)$:

$$dF(t) = \left[\sum_{i=1}^m (h_i A_i - \frac{1}{2} h_i^2 \sum_{k=1}^{m+1} \sigma_{ik}^2) + \sum_{i=1}^m h_i \alpha_i X(t) \right] dt + \sum_{i=1}^m h_i \sum_k^{m+1} \sigma_{ik} dW_k(t), \quad F(0) = f, \quad (3.2.1)$$

$$dX(t) = (B + \beta X(t))dt + \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k dW_k(t), \quad X(0) = x. \quad (3.2.2)$$

Алгоритмы нахождения величин $\bar{f}(t, x)$ и $\bar{v}(t, x)$ для однофакторной модели приведены в главе 2. Непосредственные вычисления, сделанные по формулам (2.1.4), (2.1.5), (2.2.10), (2.2.11) или (2.3.1), (2.3.2), дадут нам величины $\bar{f}(t, x; h)$ и $\bar{v}(t, x; h)$ в явном виде. Тогда мы сможем записать функцию $\bar{Q}_\gamma(t, x; h)$ в явном виде, это будет квадратичная функция по $h = (h_1, \dots, h_m)$ (в последующих разделах данной главы для конкретных случаев мы выпишем функцию в явном виде). Для отыскания условного экстремума функции $\bar{Q}_\gamma(t, x, h)$ относительно ограничения $\sum_{i=1}^m h_i - 1 = 0$ можно применить метод Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} L(h, \xi) &= \bar{Q}_\gamma(t, x; h) + \xi \left(\sum_{i=1}^m h_i - 1 \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^m K_{ij}(t, x) h_i h_j + \sum_{i=1}^m (K_i(t, x) + \xi) h_i + K_0(t, x) - \xi, \end{aligned}$$

где K_{ij}, K_i, K_0 — функции от t, x и коэффициентов $A_i, \alpha_i, B, \beta, \sigma_{ik}, \lambda_k, i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, m + 1$.

Составим систему из $m + 1$ уравнений, приравняв к нулю частные производные

функции Лагранжа $L(h, \xi)$ по h_i, ξ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(h, \xi)}{\partial h_i} &= \sum_{j=1}^m (K_{ij}(t, x) + K_{ji}(t, x)) h_j + K_i(t, x) + \xi = 0, \\ \frac{\partial L(h, \xi)}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^m h_i - 1 = 0.\end{aligned}$$

Это неоднородная система линейных уравнений относительно переменных h_1, \dots, h_m, ξ . Отсюда однозначно находятся h_1, \dots, h_m, ξ при условии, что определитель системы отличен от нуля. Если $\lim_{|h| \rightarrow \infty} \bar{Q}_\gamma(t, x; h) = -\infty$ и $\bar{Q}_\gamma(t, x; h)$ является непрерывной по h функцией, то указанная точка является точкой максимума.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.1. Наши рассуждения останутся в силе, если считать $\gamma > \frac{1}{2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.2. Мы ограничились рассмотрением только скалярного уравнения для случайной величины $X(t)$, поскольку в диссертации предложенная стратегия подробно рассматривается только для такого случая. Однако результаты практически без изменения переносятся на случай векторного уравнения с n компонентами — тогда величины $\bar{f}(t, x)$ и $\bar{v}(t, x)$ являются функциями времени и n пространственных переменных. При этом броуновский процесс может иметь и коррелированные компоненты. Вопрос сводится к нахождению решения параболического уравнения ФПК, что может стать трудной задачей. В частности, могут возникнуть проблемы с существованием и единственностью решения.

Далее мы рассмотрим предложенную модель в случае портфеля из двух активов, зависящих от одного рыночного фактора, и приведем явное решение задачи экстремума. При этом фактор моделируется двумя различными способами - в

качестве линейной процентной ставки (процентной ставки спот или модель Васичека) и нелинейной ставки, когда волатильность ее пропорциональна квадратному корню от значения ставки (модель Кокса-Ингерсолла-Росса).

3.3 Случай линейной процентной ставки

3.3.1 Пример портфеля из двух активов

Введем обобщенную запись выражений (3.2.1), (3.2.2):

$$\begin{aligned} dF &= (A + \alpha X)dt + (\sigma, dW), \\ dX &= (B + \beta X)dt + (\lambda, dW), \\ F(0) &= f, \quad X(0) = x, \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^m (h_i A_i - \frac{1}{2} h_i^2 \sum_{k=1}^{m+1} \sigma_{ik}^2), & \alpha &= \sum_{i=1}^m h_i \alpha_i, & \lambda &= (\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}), \\ \sigma &= (\sum_{i=1}^m h_i \sigma_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^m h_i \sigma_{i,m+1}), \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

$W = (W_1(t), \dots, W_{m+1}(t))$ – $(m+1)$ -мерное броуновское движение. Ниже всюду мы будем полагать $\beta < 0$.

В данном случае мы имеем СДУ с постоянными волатильностями, поэтому согласно главе 2 условные математическое ожидание и дисперсию найдем сведением задачи к решению системы ОДУ.

Уравнение ФПК для совместной плотности распределения $P(t, f, x)$ величин F и X таково:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t, f, x)}{\partial t} &= -(A + \alpha x) \frac{\partial P(t, f, x)}{\partial f} - \beta P(t, f, x) - (B + \beta x) \frac{\partial P(t, f, x)}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{2} \Sigma_1 \frac{\partial^2 P(t, f, x)}{\partial f^2} + \frac{1}{2} \Sigma_2 \frac{\partial^2 P(t, f, x)}{\partial x^2} + \Sigma_3 \frac{\partial^2 P(t, f, x)}{\partial f \partial x}, \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

с начальными условиями

$$P(0, f, x) = \delta(f - f_0)g(x),$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sigma\sigma^T = \left(\sum_{i=1}^m h_i \sum_{k=1}^{m+1} \sigma_{ik} \right)^2, & \Sigma_2 &= \lambda\lambda^T = \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k^2, \\ \Sigma_3 &= \sigma\lambda^T = \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k \sum_{i=1}^m h_i \sigma_{ik}. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Гауссовское начальное распределение фактора. Для получения явных формул будем рассматривать гауссовское начальное распределение случайной величины X , поэтому примем $g(x) = \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2s^2}}}{\sqrt{2\pi s}}$, где $x_0 \in \mathbb{R}$ — константа, соответствующая среднему значению случайной величины в нулевой момент времени, константа s^2 , $s \in \mathbb{R}_+$ — дисперсия. Возможно также рассмотреть предельный случай $s \rightarrow 0$, соответствующий фактору в нулевой момент времени, равному x_0 . Таким образом,

$$P(0, f, x) = \delta(f - f_0) \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2s^2}}}{\sqrt{2\pi s}}. \quad (3.3.5)$$

Выполним преобразование Фурье функции $P(t, f, x)$ по переменной f . Тогда уравнения (3.3.3), (3.3.5) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{P}(t, \mu, x)}{\partial t} &= -i\mu(A + \alpha x)\hat{P}(t, \mu, x) - (B + \beta x)\frac{\partial \hat{P}(t, \mu, x)}{\partial x} - \beta\hat{P}(t, \mu, x) - \\ &\quad - \frac{1}{2}\Sigma_1\mu^2\hat{P}(t, \mu, x) + \frac{1}{2}\Sigma_2\frac{\partial^2 \hat{P}(t, \mu, x)}{\partial x^2} + i\mu\Sigma_3\frac{\partial \hat{P}(t, \mu, x)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

$$\hat{P}(0, \mu, x) = \frac{e^{-i\mu f_0} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2s^2}}}{\sqrt{2\pi s}}. \quad (3.3.7)$$

Решение задачи (3.3.6),(3.3.7) будем искать в форме:

$$\hat{P}(t, \mu, x) = \frac{e^{\gamma_1(t)+\gamma_2(t)\mu+\gamma_3(t)x+\gamma_4(t)\mu^2+\gamma_5(t)x\mu+\gamma_6(t)x^2}}{\sqrt{2\pi s}}. \quad (3.3.8)$$

Подставим выражение (3.3.8) в уравнения (3.3.6), (3.3.7), затем, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях μ и x , получим систему ОДУ для $\gamma_j(t)$, $j = 1, \dots, 6$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_1(t)}{\partial t} &= \Sigma_2 \gamma_6(t) + \frac{1}{2} \Sigma_2 \gamma_3^2(t) - \beta - B \gamma_3(t), \\ \frac{\partial \gamma_2(t)}{\partial t} &= \Sigma_2 \gamma_3(t) \gamma_5(t) - B \gamma_5(t) - iA + i \Sigma_3 \gamma_3(t), \\ \frac{\partial \gamma_3(t)}{\partial t} &= 2 \Sigma_2 \gamma_3(t) \gamma_6(t) - 2B \gamma_6(t) - \beta \gamma_3(t), \\ \frac{\partial \gamma_4(t)}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \Sigma_1 + i \Sigma_3 \gamma_5(t) + \frac{1}{2} \Sigma_2 \gamma_5^2(t), \\ \frac{\partial \gamma_5(t)}{\partial t} &= 2i \Sigma_3 \gamma_6(t) - i\alpha + 2 \Sigma_2 \gamma_5(t) \gamma_6(t) - \beta \gamma_5(t), \\ \frac{\partial \gamma_6(t)}{\partial t} &= -2\beta \gamma_6(t) + 2 \Sigma_2 \gamma_6^2(t), \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \gamma_1(0) &= -\frac{x_0^2}{2s^2}, \gamma_2(0) = -if_0, \gamma_3(0) = \frac{x_0}{s^2}, \\ \gamma_4(0) &= 0, \gamma_5(0) = 0, \gamma_6(0) = -\frac{1}{2s^2}. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Решив задачу (3.3.9), (3.3.10), получим $\gamma_j(t)$, $j = 1, \dots, 6$, в явном виде:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= -\frac{2B^2 + \beta\Sigma_2 \ln\left(\frac{2\beta s^2}{-\Sigma_2 + 2e^{2\beta t}\beta s^2 + e^{2\beta t}\Sigma_2}\right)}{2\beta(-\Sigma_2 + 2e^{2\beta t}\beta s^2 + e^{2\beta t}\Sigma_2)} + \\
&\quad + \frac{(\Sigma_2 + 2\beta s^2) \ln\left(\frac{-\Sigma_2 + 2e^{2\beta t}\beta s^2 + e^{2\beta t}\Sigma_2}{2\beta s^2}\right) e^{2\beta t}}{2(-\Sigma_2 + 2e^{2\beta t}\beta s^2 + e^{2\beta t}\Sigma_2)} + \\
&\quad + \frac{2B(B + x_0\beta)e^{\beta t} + (B + x_0\beta)^2 e^{2\beta t}}{\beta(-\Sigma_2 + 2e^{2\beta t}\beta s^2 + e^{2\beta t}\Sigma_2)}, \\
\gamma_2(t) &= -if_0 - i\frac{(2B\alpha + x_0\beta\alpha + \beta B\alpha t - \beta^2 At)\Sigma_2 - 2B\Sigma_3\beta}{(2\beta s^2 + \Sigma_2)\beta^2 e^{2\beta t} - \Sigma_2\beta^2} - \\
&\quad - i\frac{e^{\beta t}((-4B\alpha - 2x_0\beta\alpha)\Sigma_2 + (4B\beta + 2\beta^2 x_0)\Sigma_3 - 2s^2\beta B\alpha)}{(2\beta s^2 + \Sigma_2)\beta^2 e^{2\beta t} - \Sigma_2\beta^2} - \\
&\quad - i\frac{e^{2\beta t}((B\alpha(2 - \beta t) + \beta^2 At + x_0\beta\alpha)\Sigma_2 - 2\beta(B + \beta x_0)\Sigma_3)}{(2\beta s^2 + \Sigma_2)\beta^2 e^{2\beta t} - \Sigma_2\beta^2} - \\
&\quad - i\frac{e^{2\beta t}(-2B\beta^2 s^2\alpha t + 2s^2\beta B\alpha + 2s^2\beta^3 At)}{(2\beta s^2 + \Sigma_2)\beta^2 e^{2\beta t} - \Sigma_2\beta^2}, \tag{3.3.11} \\
\gamma_3(t) &= \frac{2(-B + e^{\beta t}x_0\beta + e^{\beta t}B)}{-\Sigma_2 + 2e^{2\beta t}\beta s^2 + e^{2\beta t}\Sigma_2}, \\
\gamma_4(t) &= \frac{\Sigma_1 t}{2} + \frac{-2(\Sigma_2\alpha - \Sigma_3\beta)^2 + \Sigma_2\alpha\beta(2\Sigma_3\beta t - \alpha s^2 - \Sigma_2\alpha t)}{(2\beta s^2 + \Sigma_2)\beta^3 e^{2\beta t} - \Sigma_2\beta^3} + \\
&\quad + \frac{4e^{\beta t}(\Sigma_2\alpha - \Sigma_3\beta)(\Sigma_2\alpha - \Sigma_3\beta + \alpha\beta s^2)}{(2\beta s^2 + \Sigma_2)\beta^3 e^{2\beta t} - \Sigma_2\beta^3} + \\
&\quad + \frac{e^{2\beta t}((2s^2\beta^2 t + (\Sigma_2 t - 3s^2)\beta - 2\Sigma_2)\Sigma_2\alpha^2)}{(2\beta s^2 + \Sigma_2)\beta^3 e^{2\beta t} - \Sigma_2\beta^3} + \\
&\quad + \frac{e^{2\beta t}2((-2s^2\beta^2 t + (2s^2 - \Sigma_2 t)\beta + 2\Sigma_2)\Sigma_3\alpha - 2\Sigma_3^2\beta)}{(2\beta s^2 + \Sigma_2)\beta^2 e^{2\beta t} - \Sigma_2\beta^2}, \\
\gamma_5(t) &= \frac{2i(\alpha\beta s^2 + \alpha\Sigma_2 - \Sigma_3\beta)e^{\beta t} - i\alpha(\Sigma_2 + 2\beta s^2)e^{2\beta t} - 2\Sigma_3\beta + \alpha\Sigma_2}{((2\beta s^2 + \Sigma_2)e^{2\beta t} - \Sigma_2)\beta}, \\
\gamma_6(t) &= -\frac{\beta}{-\Sigma_2 + 2e^{2\beta t}\beta s^2 + e^{2\beta t}\Sigma_2}.
\end{aligned}$$

Подставим полученные выражения $\gamma_j(t)$, $j = 1, \dots, 6$, в (3.3.8) и найдем $\hat{P}(t, \mu, x)$ в явном виде. Поскольку выражение громоздкое, мы выписали его в приложении (А.0.1). Далее выполним обратное преобразование Фурье

$$P(t, f, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(t, \mu, x) e^{if\mu} d\mu$$

и найдем функцию $P(t, f, x)$

$$P(t, f, x) = \frac{\beta^2 e^{\mathcal{C}_1(t, f, x)}}{\sqrt{\pi s \mathcal{C}_2(t)}},$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2(t) = & \left(2\beta^4 \Sigma_1 t s^2 + (8\Sigma_3 \alpha t s^2 + \Sigma_1 t \Sigma_2) \beta^3 + \right. \\ & + (-4s^2 \Sigma_2 \alpha^2 t + 4\Sigma_3^2 - 8s^2 \alpha \Sigma_3 + 4\alpha \Sigma_3 t \Sigma_2) \beta^2 + \\ & + (-8\alpha \Sigma_2 \Sigma_3 - 2\alpha^2 \Sigma_2^2 t + 6\alpha^2 s^2 \Sigma_2) \beta + 4\alpha^2 \Sigma_2^2 \left. \right) e^{2\beta t} + \\ & + \left((-8\Sigma_3^2 + 8s^2 \alpha \Sigma_3) \beta^2 + (16\alpha \Sigma_2 \Sigma_3 - 8\alpha^2 s^2 \Sigma_2) \beta - 8\alpha^2 \Sigma_2^2 \right) e^{\beta t} - \\ & - \Sigma_1 t \Sigma_2 \beta^3 + (-4\alpha \Sigma_3 t \Sigma_2 + 4\Sigma_3^2) \beta^2 + \\ & + (2\alpha^2 \Sigma_2^2 t - 8\alpha \Sigma_2 \Sigma_3 + 2\alpha^2 s^2 \Sigma_2) \beta + 4\alpha^2 \Sigma_2^2, \end{aligned}$$

$\mathcal{C}_1(t, f, x)$ — функция от переменных t, f, x и параметров $f_0, x_0, s, A, \alpha, B, \beta, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$. Поскольку полученное в явном виде выражение $P(t, f, x)$ громоздкое, мы приводим его в приложении (А.0.2). Отметим, что многократное интегрирование по частям в этой формуле было выполнено с помощью программного пакета Maple.

Для сходимости интеграла должно выполняться следующее условие:

$$\begin{aligned} U := & \left(\left[-4\alpha^2 \Sigma_2^2 - 4\Sigma_3^2 \beta^2 + 8s^2 \alpha \Sigma_3 \beta^2 - 6\alpha^2 s^2 \Sigma_2 \beta + 8\alpha \Sigma_2 \Sigma_3 \beta + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\Sigma_2 + 2\beta s^2)(2\alpha^2 \Sigma_2 - 4\alpha \beta \Sigma_3 - \beta^2 \Sigma_1) \beta t \right] e^{2\beta t} + \right. \\ & \left. + 8 \left[(\Sigma_3 \beta - \Sigma_2 \alpha)^2 - s^2 \alpha \beta (\Sigma_3 \beta - \Sigma_2 \alpha) \right] e^{\beta t} + \right. \tag{3.3.12} \\ & \left. + (\Sigma_1 \beta^2 - 2\alpha^2 \Sigma_2 + 4\alpha \Sigma_3 \beta) \Sigma_2 \beta t - 4\Sigma_3^2 \beta^2 - 4(\Sigma_3 \beta - \Sigma_2 \alpha)^2 - \right. \\ & \left. - 2\alpha^2 s^2 \Sigma_2 \beta \right) \left((2\beta s^2 + \Sigma_2) e^{2\beta t} - \Sigma_2 \right)^{-1} > 0. \end{aligned}$$

Поскольку $U'_t|_{t=0} = -\Sigma_1 \beta^3 > 0$, то $\exists t_* > 0$, такое что при $\forall t \in (0, t_*)$ это условие заведомо выполнено. Однако, $\lim_{t \rightarrow \infty} U$ равен бесконечности, причем знак ее равен $(-\Sigma_1 \beta^3 - 4\alpha \Sigma_3 \beta^2 + 2\Sigma_2 \alpha^2 \beta)$, и в зависимости от параметров может быть как

положительным, так и отрицательным. Поэтому при больших временах условие (3.3.12) может быть не выполненным.

Обозначим

$$\begin{aligned} U_{s_\infty} &:= \lim_{s \rightarrow \infty} U = \\ &= 4\alpha\Sigma_3\beta - 3\Sigma_2\alpha^2 + (2\beta\Sigma_2\alpha^2 - \Sigma_1\beta^3 - 4\beta^2\Sigma_3\alpha)t + \\ &+ (-4\alpha\Sigma_3\beta + 4\Sigma_2\alpha^2)e^{-\beta t} - \alpha^2\Sigma_2e^{-2\beta t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{s_0} &:= \lim_{s \rightarrow 0} U = \\ &= \frac{-4\Sigma_3^2\beta^2 + 8\Sigma_2\alpha\beta\Sigma_3 - 4\alpha^2\Sigma_2^2}{(e^{2\beta t} - 1)\Sigma_2} + \frac{(\Sigma_1\Sigma_2\beta^3 + 4\alpha\Sigma_3\Sigma_2\beta^2 - 2\alpha^2\Sigma_2^2\beta)t}{(e^{2\beta t} - 1)\Sigma_2} + \\ &- \frac{4(\Sigma_3^2\beta^2 - 2\Sigma_2\alpha\beta\Sigma_3 + \alpha^2\Sigma_2^2)e^{2\beta t}}{(e^{2\beta t} - 1)\Sigma_2} + \frac{(2\alpha^2\Sigma_2\beta - \Sigma_1\beta^3 - 4\alpha\Sigma_3\beta^2)e^{2\beta t}t}{(e^{2\beta t} - 1)} + \\ &+ \frac{(8\Sigma_3^2\beta^2 - 16\Sigma_2\alpha\beta\Sigma_3 + 8\alpha^2\Sigma_2^2)e^{\beta t}}{(-1 + e^{2\beta t})\Sigma_2}. \end{aligned}$$

Тогда получим, что при $s \rightarrow \infty$ условие (3.3.12) заведомо не выполнено при больших t , так как $\lim_{t \rightarrow \infty} U_{s_\infty} = -\infty$. Для случая $s \rightarrow 0$ имеем $\lim_{t \rightarrow \infty} U_{s_0}$ такой же, как и при произвольном фиксированном s , то есть условие (3.3.12) заведомо не выполнимо при всех $t > 0$, если $-\Sigma_1\beta^3 - 4\beta^2\Sigma_3\alpha + 2\alpha^2\Sigma_2\beta < 0$.

Далее подставим полученное значение $P(t, f, x)$ (выписанное в приложении (А.0.2)) в (2.1.4), (2.1.5), проинтегрируем выражения и таким образом получим искомые значения условных математического ожидания и дисперсии:

$$\begin{aligned}
\bar{f}(t, x) = & - \left(\left[(2\beta^2 x \alpha + 2B\alpha\beta) e^{\beta t} + \right. \right. \\
& + (-2\beta^2 x \alpha + (-2At - 2f_0)\beta^3 + 2\beta^2 B\alpha t - 2B\alpha\beta) e^{2\beta t} \left. \right] s^2 + \\
& + 2 \left[(\Sigma_2 \alpha - \Sigma_3 \beta) \beta x - \beta^2 x_0 \Sigma_3 + (\Sigma_2 x_0 \alpha - 2B\Sigma_3) \beta + 2\Sigma_2 B\alpha \right] e^{\beta t} + \\
& \left[-\beta x \alpha \Sigma_2 + (2x_0 \Sigma_3 - At \Sigma_2 - f_0 \Sigma_2) \beta^2 + \right. \\
& \left. + ((Bt \Sigma_2 - \Sigma_2 x_0) \alpha + 2B\Sigma_3) \beta - 2\Sigma_2 B\alpha \right] e^{2\beta t} + \\
& + (-\Sigma_2 \beta \alpha + 2\Sigma_3 \beta^2) x + (At \Sigma_2 + f_0 \Sigma_2) \beta^2 + \\
& + ((-\Sigma_2 x_0 - Bt \Sigma_2) \alpha + 2B\Sigma_3) \beta - 2\Sigma_2 B\alpha \Big) \times \\
& \times \left(\beta^2 (-\Sigma_2 + 2e^{2\beta t} \beta s^2 + e^{2\beta t} \Sigma_2) \right)^{-1}, \tag{3.3.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{v}(t, x) = & \left(\left[8(\beta^2 \Sigma_3 \alpha - \Sigma_2 \alpha^2 \beta) e^{\beta t} + 2\Sigma_2 \alpha^2 \beta + \right. \right. \\
& + (2\Sigma_1 t \beta^4 + 8\Sigma_3 \beta^3 \alpha t - 4(2\Sigma_3 \alpha + \Sigma_2 \alpha^2 t) \beta^2 + 6\Sigma_2 \alpha^2 \beta) e^{2\beta t} \left. \right] s^2 + \\
& + 8 \left[2\Sigma_2 \alpha \Sigma_3 \beta - \Sigma_2^2 \alpha^2 - \Sigma_3^2 \beta^2 \right] e^{\beta t} + \left[4(\Sigma_3 \alpha t \Sigma_2 + \Sigma_3^2) \beta^2 - \right. \\
& \left. - 2(4\alpha \Sigma_3 \Sigma_2 + \Sigma_2^2 \alpha^2 t) \beta + 4\Sigma_2^2 \alpha^2 + \Sigma_1 t \beta^3 \Sigma_2 \right] e^{2\beta t} + \\
& - 4(\Sigma_3 \alpha t \Sigma_2 - \Sigma_3^2) \beta^2 - 2(4\alpha \Sigma_3 \Sigma_2 - \Sigma_2^2 \alpha^2 t) \beta + \\
& \left. + 4\Sigma_2^2 \alpha^2 - \Sigma_1 t \beta^3 \Sigma_2 \right) \left(\beta^3 (-\Sigma_2 + 2e^{2\beta t} \beta s^2 + e^{2\beta t} \Sigma_2) \right)^{-1}. \tag{3.3.14}
\end{aligned}$$

Из (3.3.13), (3.3.14), (3.3.2), (3.3.4) получим явную формулу для $\bar{Q}_\gamma(t, x; h)$.

Мы рассмотрим предложенную стратегию управления на примере портфеля из двух активов, зависящих от одного рыночного фактора, линейной процентной ставки. В этом случае стратегию инвестирования удобно записывать следующим образом: $(h_1, h_2) = (h, 1 - h)$, то есть капитал портфеля $V = hS_1 + (1 - h)S_2$. Тогда из (3.3.13), (3.3.14), (3.3.2) и (3.3.4), где $m = 2$, $h_1 = h$, $h_2 = 1 - h$, получим:

$$\bar{Q}_\gamma(t, x; h) = K_2 h^2 + K_1 h + K_0, \tag{3.3.15}$$

где

$$\begin{aligned}
K_2 = & \left(8 \left[(\beta \Sigma_2 s^2 + \Sigma_2^2) (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\beta^2 s^2 + 2\beta \Sigma_2) S_2 (\alpha_1 - \alpha_2) + S_2^2 \beta^2 \right] \gamma e^{\beta t} + \right. \\
& + \left[((-4 + 2\beta t) \Sigma_2^2 + (-6\beta + 4\beta^2 t) s^2 \Sigma_2) (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - \beta^3 t (\Sigma_2 + 2\beta s^2) S_3 + \right. \\
& + 4 \left. \left. \left((2 - \beta t) \beta \Sigma_2 + 2(1 - \beta t) \beta^2 s^2 \right) S_2 (\alpha_1 - \alpha_2) - 4S_2^2 \beta^2 \right] \gamma e^{2\beta t} + \right. \\
& + \left[\beta^3 t (\Sigma_2 + 2\beta s^2) S_1 \right] e^{2\beta t} + \left[-2 \left((2 + \beta t) \Sigma_2^2 + \beta \Sigma_2 s^2 \right) (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \right. \\
& + 4 \left. \left. \left(\beta^2 t + 2\beta \right) S_2 \Sigma_2 (\alpha_1 - \alpha_2) - 4S_2^2 \beta^2 + \beta^3 t S_3 \Sigma_2 \right] \gamma - \beta^3 t S_1 \Sigma_2 \right) \times \\
& \times \left(\beta^3 (2e^{2\beta t} \beta s^2 + (-1 + e^{2\beta t}) \Sigma_2) \right)^{-1},
\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

$$\begin{aligned}
K_1 = & \left(-8\beta^2 (1 - e^{\beta t})^2 \gamma S_5 S_2 + \left[-8\beta \alpha_2 (2\Sigma_2 + \beta s^2) e^{\beta t} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \left(4\beta \alpha_2 (2 - \beta t) \Sigma_2 + 8\beta^2 \alpha_2 (1 - \beta t) s^2 \right) e^{2\beta t} + 4\beta \alpha_2 (2 + \beta t) \Sigma_2 \right] \gamma S_2 + \right. \\
& + \left[2 \left((x_0 + x) \beta + 2B \right) \beta^2 e^{\beta t} - 2(\beta x_0 + B) \beta^2 e^{2\beta t} - 2\beta^2 (\beta x + B) \right] S_2 + \\
& + \left[(2\beta^4 s^2 t + \beta^3 t \Sigma_2) e^{2\beta t} - \beta^3 t \Sigma_2 \right] S_4 + \left[-8(\beta s^2 + 2\Sigma_2) \beta e^{\beta t} + \right. \\
& + \left. \left. \left(4\beta (-\beta t + 2) \Sigma_2 + 8\beta^2 (1 - \beta t) s^2 \right) e^{2\beta t} + 4(\beta t + 2) \beta \Sigma_2 \right] (\alpha_1 - \alpha_2) \gamma S_5 + \right. \\
& + \left[(-2\beta^3 t \Sigma_2 - 4\beta^4 s^2 t) e^{2\beta t} + 2\beta^3 t \Sigma_2 \right] \gamma S_6 + 4\alpha_2 \Sigma_2 \left[4(\Sigma_2 + \beta s^2) e^{\beta t} + \right. \\
& + \left. \left. \left((\beta t - 2) \Sigma_2 + \beta (2\beta t - 3) s^2 \right) e^{2\beta t} - \Sigma_2 (2 + \beta t) - \beta s^2 \right] (\alpha_1 - \alpha_2) \gamma - \right. \\
& - 2 \left((\beta (x + x_0) + 2B) \beta \Sigma_2 + (\beta x + B) \beta^2 s^2 \right) (\alpha_1 - \alpha_2) e^{\beta t} + \\
& + \left((2B - B\beta t + (x + x_0) \beta) \beta \Sigma_2 + 2(B - B\beta t + \beta x) \beta^2 s^2 \right) (\alpha_1 - \alpha_2) e^{2\beta t} + \\
& + (B\beta t + (x + x_0) \beta + 2B) \beta \Sigma_2 (\alpha_1 - \alpha_2) + (A_1 - A_2) (\Sigma_2 (e^{2\beta t} - 1) + 2\beta s^2) \Big) \times \\
& \times \left(\beta^3 ((\Sigma_2 (e^{2\beta t} - 1) + 2\beta s^2)) \right)^{-1},
\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

$$\begin{aligned}
K_0 = & \left(2\Sigma_2 B\alpha_2 + (-2S_5 B + \alpha_2 \Sigma_2(x_0 + x + Bt))\beta + \right. \\
& + (-2S_5 x_0 + \Sigma_2(f_0 - \frac{t}{2}S_4 + \frac{A_2 t}{2}) + 2s^2 \alpha_2(x - Bt))\beta^2 e^{2\beta t} - \\
& - 2(\alpha_2 \Sigma_2(x_0 + x) + B\alpha_2 s^2 - 2BS_5)\beta e^{\beta t} + \\
& + 2(S_5(x_0 + x) - s^2 x \alpha_2)\beta^2 e^{\beta t} + 2s^2(f_0 + \frac{A_2 t}{2} - \frac{t}{2}S_4)e^{2\beta t}\beta^3 + \quad (3.3.18) \\
& + (\Sigma_2(\frac{t}{2}\sum_{k=1}^3 \sigma_{2k}^2 - \frac{A_2 t}{2} - f_0) - 2xS_5)\beta^2 + \\
& + (\alpha_2 \Sigma_2(-Bt + x_0 + x) + 2B\alpha_2 s^2 - 2BS_5)e^{2\beta t}\beta + \\
& \left. + 2B\alpha_2 \Sigma_2(e^{2\beta t} - e^{\beta t}) \right) \left((2e^{2\beta t}\beta s^2 + \Sigma_2(e^{2\beta t} - 1))\beta^2 \right)^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1 = & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 \sigma_{1i}^2 + \sigma_{2i}^2, \quad S_2 = \sum_{i=1}^3 (\sigma_{1i} - \sigma_{2i})\lambda_i, \quad S_3 = \sum_{i=1}^3 (\sigma_{1i} - \sigma_{2i})^2, \\
S_4 = & \sum_{i=1}^3 \sigma_{2i}^2, \quad S_5 = \sum_{i=1}^3 \sigma_{2i}\lambda_i, \quad S_6 = \sum_{i=1}^3 \sigma_{2i}(\sigma_{1i} - \sigma_{2i}).
\end{aligned}$$

Поскольку $K_2 = 0$ при $t = 0$ и $\frac{\partial K_2}{\partial t}|_{t=0} = -\gamma \sum_{i=1}^3 (\sigma_{1i} - \sigma_{2i})^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\sigma_{1i}^2 + \sigma_{2i}^2) < 0$, то $\exists t_* > 0$, такое что при $\forall t \in (0, t_*)$ единственная точка экстремума $\bar{H}_\gamma = \frac{-K_1}{2K_2}$ является максимумом $\bar{Q}_\gamma(t, x; h)$ по h . Эта точка соответствует оптимальной стратегии в смысле определения 3.1.

Таким образом, в любой выбранный момент времени $t \in (0, t_*)$ инвестор, зная значение процентной ставки, может максимизировать доход от инвестиций, применив предложенную стратегию управления портфелем: вложить долю капитала, равную \bar{H}_γ , в первый актив и остаток капитала $(1 - \bar{H}_\gamma)$ — во второй.

Отметим также, что при $s \rightarrow 0$ и $s \rightarrow \infty$ выражение $\bar{Q}_\gamma(t, x; h)$ существенно упрощается:

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow \infty} \bar{Q}_\gamma(t, x; h) = & f_0 + tA - \gamma t \Sigma_1 - \frac{(3 + e^{-2\beta t} - 2\beta t - 4e^{-\beta t})\Sigma_2 \gamma \alpha^2}{\beta^3} - \\
& - \frac{4(\beta t - 1 + e^{-\beta t})\gamma \Sigma_3 \alpha}{\beta^2} - \frac{((\beta x + B)(e^{-\beta t} - 1) + \beta B t)\alpha}{\beta^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} \bar{Q}_\gamma(t, x; h) = & At + f_0 - \gamma t \Sigma_1 + \frac{(2(\beta t - 2)e^{\beta t} + \beta t + 2)\Sigma_2 \gamma \alpha^2}{\beta^3(e^{\beta t} + 1)} - \\
& - 4 \frac{((\beta t - 2)e^{\beta t} + \beta t + 2)\Sigma_3 \gamma \alpha}{\beta^2(e^{\beta t} + 1)} + \\
& + \frac{((-Bt + x_0 + x)\beta + 2B)e^{\beta t} - (x_0 + Bt + x)\beta - 2B)\alpha}{\beta^2(e^{\beta t} + 1)} - \\
& + \frac{4(1 - e^{\beta t})\gamma \Sigma_3^2}{\beta(e^{\beta t} + 1)\Sigma_2} + \frac{2(-(B + \beta x_0)e^{\beta t} + \beta x + B)\Sigma_3}{\beta(e^{\beta t} + 1)\Sigma_2},
\end{aligned}$$

где A, α и $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ заданы в (3.3.2) и (3.3.4) соответственно. В предельных случаях также можно выписать оптимальную стратегию \bar{H}_γ в явном виде.

Равномерное начальное распределение фактора. Будем считать, что X распределена равномерно на отрезке $[-L, L]$, то есть $g(x) = \frac{1}{2L}\chi_{[-L, L]}(x)$. Тогда

$$P(0, f, x) = \frac{\delta(f - f_0)\chi_{[-L, L]}(x)}{2L} = \frac{\delta(f - f_0)}{2L}, \quad x \in [-L, L]. \quad (3.3.19)$$

Выполним преобразование Фурье функции $P(t, f, x)$ по переменной f , и тогда уравнение (3.3.19) примет следующий вид:

$$\hat{P}(0, \mu, x) = \frac{e^{-i\mu f_0}}{2L\sqrt{2\pi}}, \quad x \in [-L, L]. \quad (3.3.20)$$

Решение задачи (3.3.3), (3.3.20) будем искать в форме:

$$\hat{P}(t, \mu, x) = \frac{e^{\gamma_1(t) + \gamma_2(t)\mu + \gamma_3(t)x + \gamma_4(t)\mu^2 + \gamma_5(t)x\mu + \gamma_6(t)x^2}}{2L\sqrt{2\pi}}. \quad (3.3.21)$$

Согласно алгоритму, приведенному в главе 2, сведем решение задачи к решению системы ОДУ (3.3.9) с начальными условиями $\gamma_1(0) = 0, \gamma_2(0) = -if_0, \gamma_3(0) = 0, \gamma_4(0) = 0, \gamma_5(0) = 0, \gamma_6(0) = 0$. Найдем $\gamma_j(t), j = 1, \dots, 6$, в явном виде:

$$\gamma_1(t) = -\beta t, \quad \gamma_2(t) = \frac{\alpha B i t}{\beta} + \frac{\alpha B i e^{-\beta t}}{\beta^2} - \frac{\alpha B i}{\beta^2} - A t i - f_0 i, \quad \gamma_3(t) = 0,$$

$$\gamma_4(t) = \frac{(-4\Sigma_2\alpha^2 + 4\alpha\Sigma_3\beta)}{4\beta^3 \exp(-\beta t)} + \frac{\alpha^2 \Sigma_2 \exp(-2\beta t)}{4\beta^3} + \frac{(4\alpha t \Sigma_3 \beta^2 - 2\Sigma_1 t \beta^3 + 3\Sigma_2 \alpha^2 - 2\alpha^2 t \Sigma_2 \beta - 4\alpha \Sigma_3 \beta)}{4\beta^3},$$

$$\gamma_5(t) = \frac{\alpha i}{\beta}(e^{-\beta t} - 1), \quad \gamma_6(t) = 0.$$

Подставим полученные выражения в (3.3.21) и найдем $\hat{P}(t, \mu, x)$ в явном виде (см. приложение (A.0.3)). Далее выполним обратное преобразование Фурье и найдем функцию $P(t, f, x)$ (см. приложение (A.0.4)).

Отметим, что при выполнении вычислений при $t > 0$ накладываются дополнительные ограничения для сходимости интегралов, а именно

$$-\frac{1}{4\beta^3} \left(\alpha^2 \Sigma_2 e^{-2\beta t} - 4(\alpha^2 \Sigma_2 - \alpha\beta \Sigma_3) e^{-\beta t} - 2\beta^3 \Sigma_1 t - \alpha^2 \Sigma_2 (2\beta t - 3) - 4\alpha\beta \Sigma_3 (1 - \beta t) \right) > 0, \quad (3.3.22)$$

$$\left((2\beta^3 \Sigma_1 - 4\alpha\beta^2 \Sigma_3 + 2\alpha^2 \beta \Sigma_2) t + 4\alpha \Sigma_3 \beta - 3\alpha^2 \Sigma_2 \right) e^{2\beta t} + (-4\alpha\beta \Sigma_3 + 4\alpha^2 \Sigma_2) e^{\beta t} - \alpha^2 \Sigma_2 \geq 0. \quad (3.3.23)$$

Можно показать, что неравенство (3.3.22) имеет место при всех соотношениях параметров, а для выполнения неравенства (3.3.23) требование $\beta < 0$ существенно. А именно рассмотрим левую часть неравенства (3.3.22) как функцию $\phi(t)$. Легко вычислить, что $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) > 0$. Далее, представим $\phi'(t)$ как квадратичную функцию относительно $z = e^{-\beta t}$. Коэффициент при z^2 положителен, а дискриминант $D = 4(\Sigma_3^2 - \Sigma_1 \Sigma_2) \alpha^2 \beta^2 \leq 0$ (где $\Sigma_i, i = 1, \dots, 3$, определены в (3.3.4)). Таким образом, $\phi'(t) \geq 0$, $t > 0$ и (3.3.22) выполнено.

Далее, рассмотрим левую часть неравенства (3.3.23) как функцию $\psi(t)$. Здесь $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) > 0$ при $\beta < 0$, при больших t функция $\psi(t)$ положительна. Однако следует показать, что в возможных точках локального минимума функция $\psi(t)$ неотрицательна. Рассмотрим производную $\psi'(t)$ как функцию от $z = e^{\beta t}$ и обозначим через $z_0(t)$ точку, где производная обращается в нуль. Уравнение $e^{\beta t} = z_0(t)$ может не иметь корней при положительных t , что означает отсутствие точек экстремума у $\psi(t)$. Если же это уравнение имеет положительные корни, подставим в

выражение для $\psi(t)$ вместо $e^{\beta t}$ функцию $z_0(t)$. Получим дробь, знаменатель которой неотрицателен, а числитель — квадратичная функция по t с положительным коэффициентом при t^2 и дискриминантом $D = (\Sigma_3^2 - \Sigma_2\Sigma_1)(\Sigma_2\alpha - \Sigma_3\beta)^2 \leq 0$ (где $\Sigma_i, i = 1, \dots, 3$, определены в (3.3.4)). Таким образом, условие (3.3.23) выполнено.

Далее подставим полученное значение $P(t, f, x)$ (выписанное в приложении (A.0.4)) в (2.2.10), (2.2.11), проинтегрируем выражения и получим искомые значения условных математического ожидания и дисперсии:

$$\bar{f}(t, x) = -\frac{(\beta x + B)\alpha e^{-\beta t}}{\beta^2} - \frac{(B\alpha - A\beta)t}{\beta} + \frac{(\beta x + B)\alpha}{\beta^2} + f_0, \quad (3.3.24)$$

$$\bar{v}(t, x) = -\frac{(-4\Sigma_2\alpha^2 + 4\alpha\Sigma_3\beta)e^{-\beta t}}{2\beta^3} - \frac{\Sigma_2\alpha^2 e^{-2\beta t}}{2\beta^3} - \frac{(4\alpha\beta^2 t\Sigma_3 - 2\Sigma_1 t\beta^3 + 3\Sigma_2\alpha^2 - 2\alpha^2\beta t\Sigma_2 - 4\alpha\Sigma_3\beta)}{2\beta^3}, \quad (3.3.25)$$

где $A, \alpha, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ заданы в (3.3.2), (3.3.4).

Тогда в случае портфеля из двух активов, зависящих от одного фактора, получим

$$Q_\gamma(t, x; h) = K_2 h^2 + K_1 h + K_0,$$

где h — доля капитала, инвестированная в первый актив, соответственно $(1 - h)$ — во второй актив, выражения K_2, K_1, K_0 выписаны в приложении (A.0.5), (A.0.6), (A.0.7). Поскольку старший коэффициент $K_2 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\sigma_{1i}^2 + \sigma_{2i}^2) - \gamma \bar{v}(t, x; h) < 0$, то оптимальная в смысле определения 3.1 стратегия $H_\gamma = -\frac{K_1}{2K_2}$. В следующем разделе мы выпишем оптимальную стратегию в явном виде для одного классического примера портфеля, когда один из активов — банковский счет.

Заметим, что в предельном случае гауссовского распределения при $s \rightarrow \infty$ условное математическое ожидание $\bar{f}_{gauss}(t, x)$ совпадает с условным математиче-

ским ожидаем $\bar{f}(t, x)$ равномерного распределения. Однако дисперсия $\bar{v}_{gauss}(t, x)$ отличается от $\bar{v}(t, x)$. А именно,

$$\bar{v}_{gauss}(t, x) = \frac{(-4\alpha^2\Sigma_2 + 4\beta\alpha\Sigma_3)e^{-\beta t}}{\beta^3} + \frac{\alpha^2\Sigma_2 e^{-2\beta t}}{\beta^3} + \frac{-4\beta\alpha\Sigma_3 + \beta^3\Sigma_1 t + 4\beta^2\Sigma_3\alpha t - 2\beta\alpha^2\Sigma_2 t + 3\alpha^2\Sigma_2}{\beta^3}.$$

Изучим разницу $\bar{v}_{gauss}(t, x) - \bar{v}(t, x)$. Первая производная этого выражения по времени при $t = 0$ равняется нулю. Вторая производная при $t = 0$ равна $6\alpha\Sigma_3$. Это позволяет заключить, что при малых значениях α и Σ_3 (в частности, при реальных значениях параметров) разница $\bar{v}_{gauss}(t, x) - \bar{v}(t, x)$ невелика по крайней мере для малых t . Рис.3.1, 3.2 показывают разницу между значениями дисперсий при разных значениях времени и одинаковых прочих параметрах $\alpha = 0.1, \beta = -1, B = 1, A = .1, \Sigma_1 = 1, \Sigma_2 = 1, \Sigma_3 = 1$.

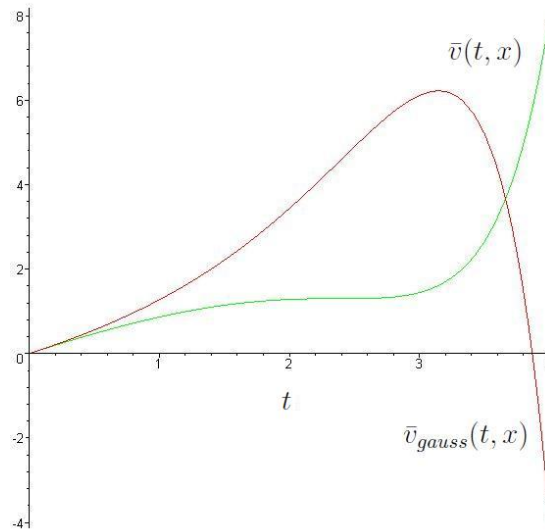


Рис. 3.1: разница поведения дисперсий для предельного гауссовского и равномерного начальных распределений факторов, $t = 4$; отрицательная дисперсия в гауссовском случае связана с невыполнением условия (3.3.12).

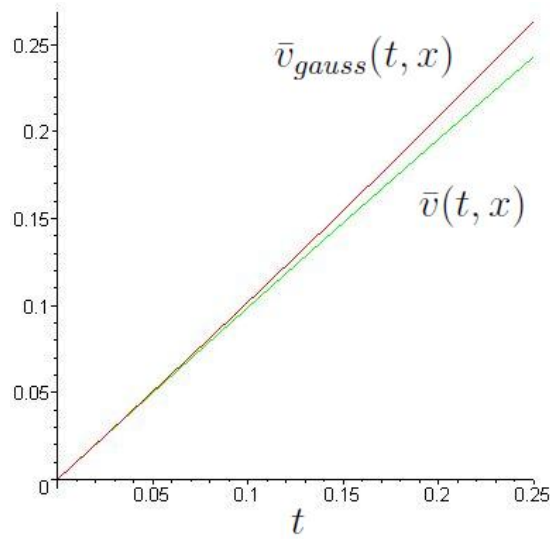


Рис. 3.2: разница поведения дисперсий для предельного гауссовского и равномерного начальных распределений факторов, $t = 0.25$.

3.3.2 Сравнение со стратегией Белецкого-Плиски

Т.Р. Белицкий и С.Р. Плиски всюду в своих работах рассматривают предложенную ими стратегию на одном классическом примере портфеля из двух активов, когда один из активов — банковский счет, а фактор — линейная процентная ставка. Явные формулы для своей оптимальной стратегии H_θ и максимальное значение функционала $\rho(\theta)$ исследователи приводят для этого примера (напомним, что мы выписали эти формулы в главе 1. Для сравнения предложенной нами стратегии со стратегией Белецкого-Плиски, мы также рассмотрим классический пример.

Итак, пусть портфель состоит из двух активов, рискованного актива (например, это может быть биржевой индекс), и банковского счета. Доходности активов описываются СДУ:

$$\frac{dS_1(t)}{S_1(t)} = (A_1 + \alpha_1 R(t))dt + \sigma_1 dW_1(t), \quad S_1(0) = s > 0,$$

$$\frac{dS_2(t)}{S_2(t)} = R(t)dt, \quad S_2(0) = 1,$$

где процентная ставка R в свою очередь тоже описывается СДУ

$$dR(t) = (B + \beta R(t))dt + \lambda dW_2(t), \quad R(0) = r,$$

(модель процентной ставки Васичека). Здесь $A_1, \alpha_1, B, \beta, \sigma_1, \lambda$ — заданные константы, причем $B > 0, \beta < 0$, а W_1, W_2 — два независимых броуновских движения.

Будем считать, что инвестор может занять длинную или короткую позицию по отношению к биржевому индексу, а также занимать или одалживать деньги с непрерывным процентным начислением по действующей ставке.

Запишем уравнение для капитала инвестора в момент времени t :

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = [h_1 A_1 + (h_1 \alpha_1 + h_2) R(t)] dt + h_1 \sigma_1 dW_1(t), \quad V(t) = v > 0.$$

Поскольку мы рассматриваем портфель из двух активов, то стратегию инвестирования удобно описывать следующим образом: $h_1 = h$ — доля капитала, инвестированная в биржевой индекс, и соответственно $h_2 = 1 - h$ — доля капитала, размещенная на банковском счете.

Пусть $\ln V(t) = F(t)$. Тогда

$$dF(t) = \left[h A_1 - \frac{h^2 \sigma_1^2}{2} + (h \alpha_1 + 1 - h) R(t) \right] dt + h \sigma_1 dW_1(t),$$

Мы будем рассматривать случай равномерного начального распределения процентной ставки R . Формулы (3.3.24), (3.3.25) в данном частном случае имеют вид

$$\bar{f}(t, r) = M_2 h^2(t) + M_1 h(t) + M_0, \quad \bar{v}(t, r) = L_2 h^2(t) + L_1 h(t) + L_0, \quad (3.3.26)$$

где

$$\begin{aligned}
M_2 &= -\frac{\sigma_1^2 t}{2}, \quad M_1 = \frac{(\alpha_1 - 1)(\beta r + B)(1 - e^{-\beta t})}{\beta^2} - \frac{(B(\alpha_1 - 1) - \beta A_1)t}{\beta}, \\
M_0 &= \frac{(\beta r + B)(1 - e^{-\beta t})}{\beta^2} - \frac{Bt}{\beta} + f_0, \quad L_2 = -\frac{\lambda^2}{2\beta^3}(\alpha_1 - 1)^2 \phi(t) + \sigma_1^2 t, \\
L_1 &= -\frac{\lambda^2}{\beta^3}(\alpha_1 - 1)\phi(t), \quad L_0 = -\frac{\lambda^2}{2\beta^3}\phi(t), \quad \phi(t) = (e^{-2\beta t} - 4e^{-\beta t} - 2\beta t + 3).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\bar{Q}_\gamma(t, r; h) = (M_2 - \gamma L_2)h^2(t) + (M_1 - \gamma L_1)h(t) + M_0 - \gamma L_0, \quad (3.3.27)$$

Поскольку $L_2(0) = 0$, $\frac{\partial L_2(t)}{\partial t} = \frac{\lambda^2(\alpha_1 - 1)^2(e^{-\beta t} - 1)^2}{\beta^2} + \sigma_1^2 > 0$, то старший коэффициент квадратичной по h функции $\bar{Q}_\gamma(t, r)$ отрицателен, и ее максимум достигается в единственной точке экстремума

$$\bar{H}_\gamma = \frac{M_1 - \gamma L_1}{\sigma_1^2 t + 2\gamma L_2}. \quad (3.3.28)$$

Таким образом, в любой выбранный момент времени инвестор, зная дополнительную информацию о факторе (а именно значение процентной ставки в заданный момент времени), может максимизировать доход от инвестиций, применив оптимальную стратегию инвестирования: вложить долю капитала, равную \bar{H}_γ , в рискованный актив и разместив остаток капитала $1 - \bar{H}_\gamma$ на банковском счете.

Из (3.3.26) следует, что при $t \rightarrow \infty$ условное математическое ожидание $\bar{f}(t, r)$ растет как $e^{-\beta t}$, а условная дисперсия $\bar{v}(t, r)$ — как $e^{-2\beta t}$ (напомним, что $\beta < 0$). Вводя коэффициент риска, мы уменьшаем влияние случайности, описываемой дисперсией, на ожидаемый средний доход портфеля.

На рис.3.3 изображена зависимость $\bar{f}(t, r; \bar{H}_\gamma)$ от $\bar{v}(t, r; \bar{H}_\gamma)$ в различные моменты времени при изменении параметра риска γ и заданных числовых значениях параметров модели $A_1 = 0.15, \alpha_1 = -1, \sigma_1 = 0.2, B = 0.05, \beta = -1, \lambda = 0.02, r =$

0.01, $f_0 = 1$ (числовые значения параметров модели выбраны согласно примеру, приведенному в [12]).

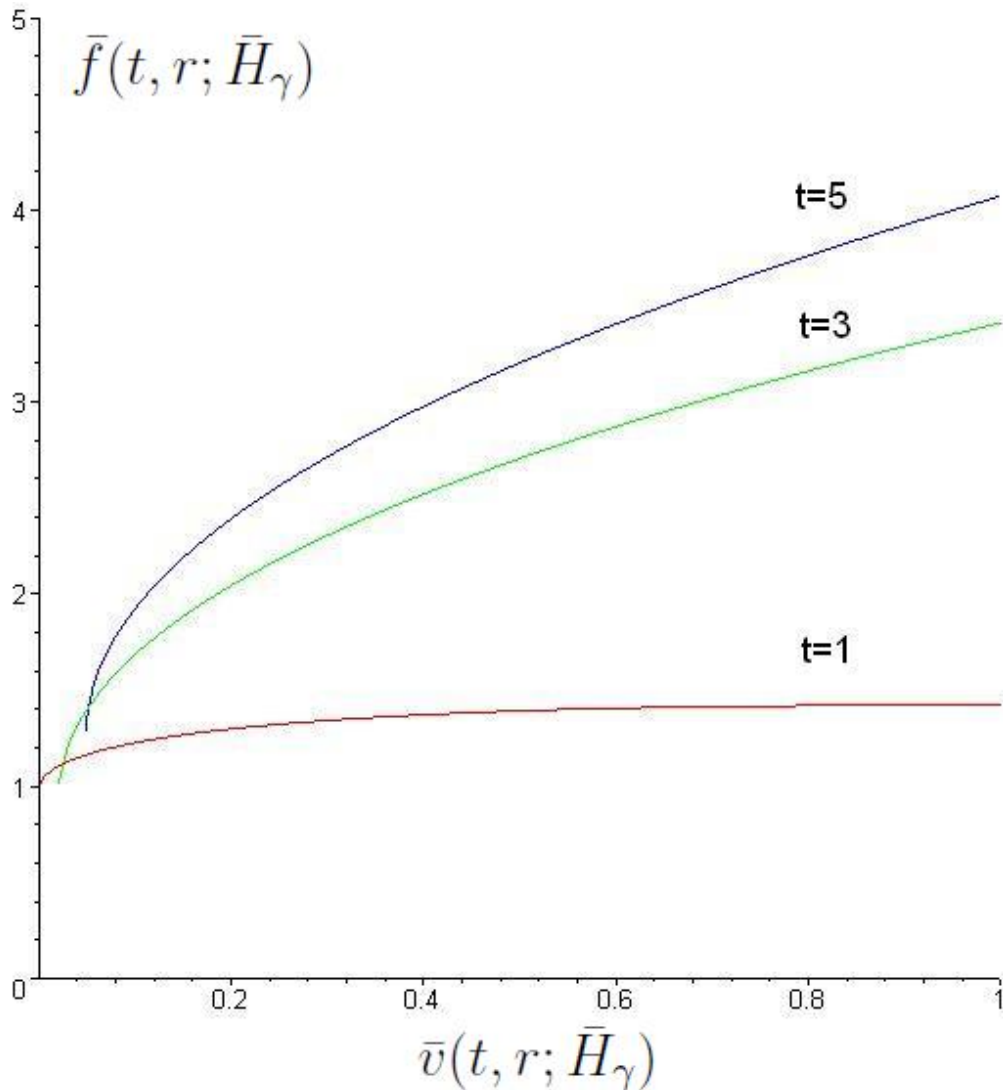


Рис. 3.3: зависимость $\bar{f}(t, r; \bar{H}_\gamma)$ от $\bar{v}(t, r; \bar{H}_\gamma)$ в фиксированные моменты времени при изменении параметра риска γ .

Выполним сравнение результатов нашей стратегии со стратегией Белецкого-Плиски по условному математическому ожиданию при фиксированном значении фактора. Подставим (3.3.28) и (1.4.7) в формулу (3.3.26) для $\bar{f}(t, r)$ и сравним полученные выражения. Справедливы следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3.1. При $\gamma = 0, \theta = 0$, для $\forall t > 0$ справедливо неравенство:

$$(\bar{f}(t, r; \bar{H}_\gamma) - \bar{f}(t, r; H_\theta))|_{\gamma=0, \theta=0} = \frac{(\alpha_1 - 1)^2 (r + \frac{B}{\beta})^2 t (\frac{e^{-\beta t} - 1}{t\beta} + 1)^2}{2\sigma_1^2} > 0.$$

Доказательство следует из непосредственных вычислений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3.2. $\exists t_* > 0$ такое, что $\forall t \in (0, t_*)$ верны следующие утверждения

(a) если $\alpha_1 \neq 1$ и фактор подчинен условию

$$(r + \frac{B}{\beta})(r + \frac{A_1}{(\alpha_1 - 1)}) > 0, \quad (3.3.29)$$

то $\exists \gamma_* > 0$ такое, что $\forall \gamma \in (0, \gamma_*)$ разница $\bar{f}(t, r; \bar{H}_\gamma) - \bar{f}(t, r; H_\theta) > 0$;

(b) если $\alpha_1 = 1$ и $A_1 > 0$, то разница $\bar{f}(t, r; \bar{H}_\gamma) - \bar{f}(t, r; H_\theta) > 0$ при любых $\gamma > 0$.

Доказательство. Будем рассматривать разность $\bar{f}(t, r; \bar{H}_\gamma) - \bar{f}(t, r; H_\theta)$ как функцию от t при прочих фиксированных значениях параметров. Обозначим эту разницу через $q(t)$ (см. приложение А.0.8). Вычисления показывают, что $q'(0) = 0$ и

$$\begin{aligned} q''(0) = & (8r^2\gamma^2\lambda(\alpha_1 - 1)^3 - 2((1 + 2\gamma)\gamma\beta\sigma_1r^2 + \\ & + ((1 + 2\gamma)\gamma B\sigma_1 - 8\gamma^2\lambda A_1)r)(\alpha_1 - 1)^2 - \\ & - 2\left((-2(2\gamma + 1)\gamma^2\lambda\sigma_1^2 + (1 + 2\gamma)\gamma A_1\beta\sigma_1)r + \right. \\ & \left. + (1 + 2\gamma)\gamma A_1 B\sigma_1 - 4\gamma^2\lambda A_1^2\right)(\alpha_1 - 1) + \\ & + 4(2\gamma + 1)\gamma^2\lambda\sigma_1^2 A_1)(\sigma_1^3(1 + 6\gamma + 12\gamma^2 + 8\gamma^3))^{-1}. \end{aligned}$$

Знаменатель этого выражения положителен. Сразу видно, что если $\alpha_1 = 1$ и $A_1 > 0$, то $q''(0) > 0$. Это доказывает вторую часть утверждения.

Если $\alpha_1 \neq 1$, то разложим числитель $q''(0) = q''(0, \gamma)$ в ряд по γ в нуле:

$$q''(0, \gamma) = -2\beta\sigma_1(\alpha_1 - 1)^2 \left(r + \frac{B}{\beta}\right) \left(r + \frac{A_1}{(\alpha_1 - 1)}\right) \gamma + O(\gamma^2).$$

Таким образом, это выражение положительно, если выполнено условие (3.3.29). Утверждение доказано.

На рис.3.4 показано сравнение условных математических ожиданий для двух стратегий при заданных числовых параметрах модели, тех же, что и на рис.3.3. Параметр риска принят равным $4\gamma = \theta = 0.1$. Как показывает пример, предложенная нами стратегия при реальных значениях параметров дает большее математическое ожидание доходности до некоторого момента t^* , и такая ситуация может сохраняться в течение нескольких лет.

В силу построения функции $\bar{Q}_\gamma(t, r; h)$ есть смысл проводить сравнение двух стратегий при $\gamma = \theta/4$ и малых θ . Сначала нам необходимо рассмотреть полученные результаты при $t \rightarrow \infty$. При любом фиксированном x при $t \rightarrow \infty$ получим $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{H}_\gamma(t) = -\frac{1}{\alpha_1 - 1}$, в случае $\alpha_1 \neq 1$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{H}_\gamma(t) = \frac{A_1}{\sigma_1^2}$ в случае $\alpha_1 = 1$. Таким образом, предельное значение $\bar{H}_\gamma(t)$ разрывно как функция по α_1 . Далее введем следующее обозначение:

$$\bar{\rho}(\gamma) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{Q}_\gamma(t, r; \bar{H}_\gamma)}{t}.$$

Вычисляя, получим

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\gamma) &= \frac{A_1}{1-\alpha_1} - \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \frac{\sigma_1^2}{(\alpha_1-1)^2}, \quad \alpha_1 \neq 1, \\ \bar{\rho}(\gamma) &= \frac{A_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{B}{\beta}, \quad \alpha_1 = 1. \end{aligned}$$

Величина $\bar{\rho}(\gamma)$ соответствует ожидаемому темпу роста капитала на бесконечности, то есть аналогична величине $\rho(\theta)$ в модели Белецкого-Плиски, значение которой приведено в (1.4.8). На рис.3.5 эти величины изображены при тех же числовых значениях параметров, что и на рис.3.3, θ меняется от 0 до 1, $\gamma = \frac{\theta}{4}$.

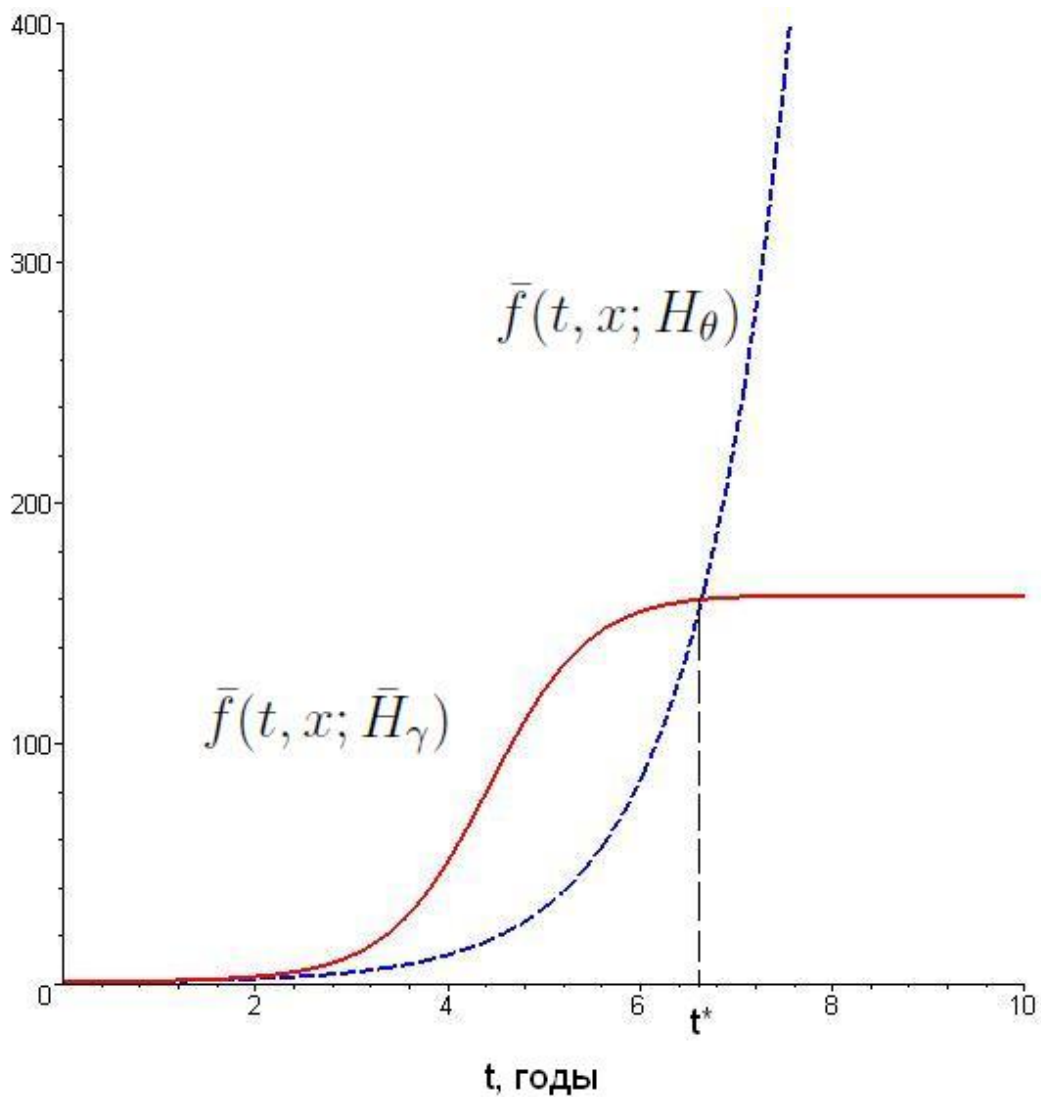


Рис. 3.4: условное математическое ожидание при фиксированном факторе $\bar{f}(t, r; h)$ в случае предложенной нами стратегии \bar{H}_γ (сплошная линия) и в случае стратегии Белецкого-Плиски H_θ (пунктирная линия).

Если выполнить предельный переход при $\theta \rightarrow 0$, то из (1.4.9) получим

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \rho_\theta = -\frac{B}{\beta} + \frac{1}{2\sigma_1^2} \left(A_1 - \frac{B}{\beta} (\alpha_1 - 1) \right)^2 - \frac{\lambda^2 (\alpha_1 - 1)^2}{4\sigma^2 \beta}. \quad (3.3.30)$$

Если непосредственно положить $\gamma = 0$ в $\frac{\bar{Q}_\gamma(t, x; \bar{H}_\gamma)}{t}$, а затем перейти к пределу при $t \rightarrow \infty$, получим величину, равную в точности выражению в (3.3.30) без последнего члена, содержащего λ .

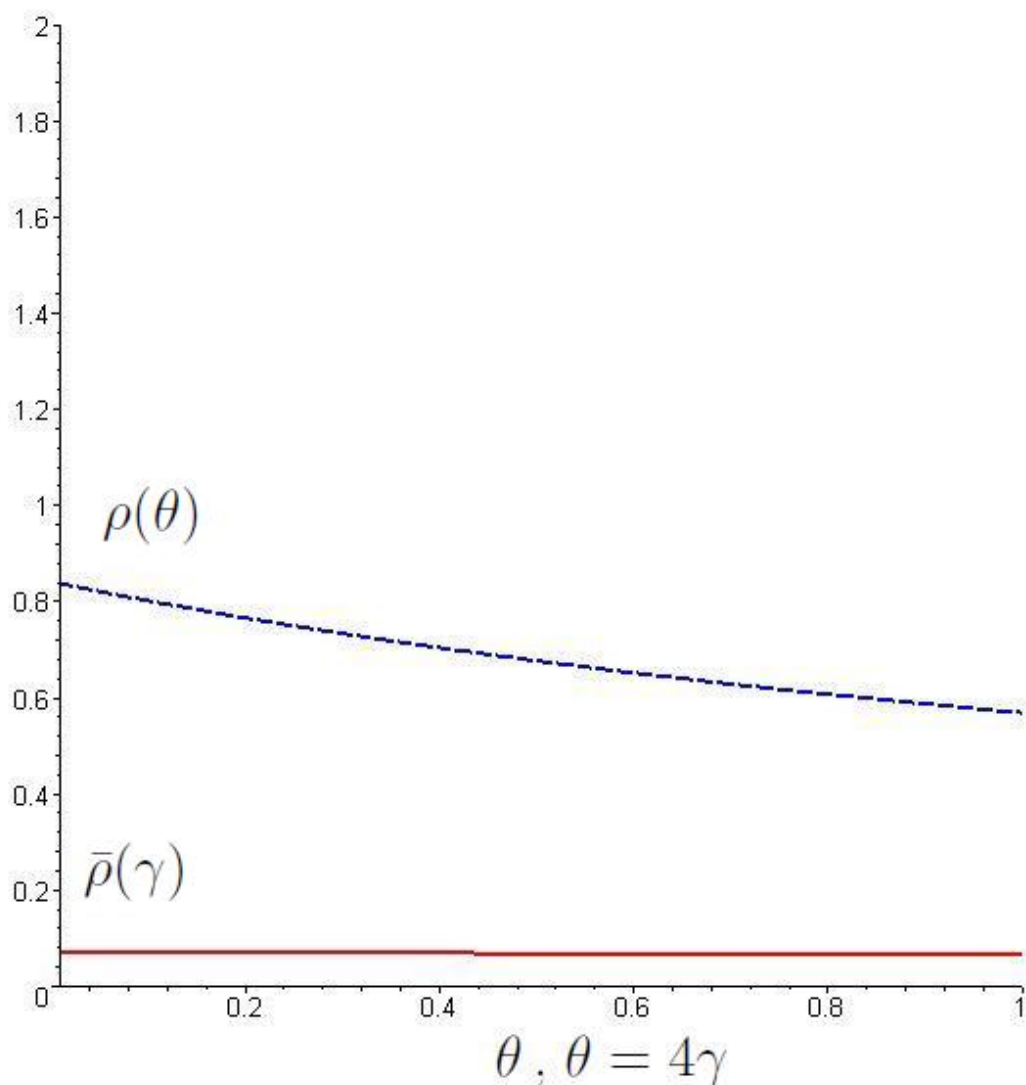


Рис. 3.5: ожидаемый темп роста капитала на бесконечности: $\bar{\rho}(\gamma)$ — в случае предложенной нами стратегии, $\rho(\theta)$ — в случае стратегии Белецкого-Плиски, $\theta = 4\gamma$.

3.3.3 Асимптотики долей капитала портфеля

В данном разделе исследуются асимптотики долей капитала портфеля при стремящемся к бесконечности времени для случаев двух и трех активов, зависящих от фактора с равномерным начальным распределением. Напомним, что при гауссовском распределении, как правило, возникает ограничение на применение стратегии при больших t , поэтому вычисление асимптотик невозможно.

Случаю портфеля из двух активов, зависящих от одного фактора, соответствует система СДУ (3.2.1), (3.2.2) при $m = 2$. Функции, отвечающие долям капитала, вложенным в каждый из активов были найдены в разделе 3.3.1. Их выражения достаточно громоздки, однако зависимость от времени ограничивается лишь степенными и экспоненциальными функциями:

$$H_1(t) = -\frac{K_1}{2K_2}, \quad (3.3.31)$$

$$H_2(t) = 1 + \frac{K_1}{2K_2}, \quad (3.3.32)$$

где K_1, K_2 выписаны в приложении (A.0.5), (A.0.6).

Обозначим асимптотические пределы функций долей капитала следующим образом:

$$H_{1(2)}^\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} (H_1(t)), \quad H_{2(2)}^\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} (H_2(t)).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3.3. Пусть функции долей капитала $H_1(t), H_2(t)$ заданы уравнениями (3.3.31), (3.3.32). Тогда

(a) если $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то $H_{1(2)}^\infty = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$, $H_{2(2)}^\infty = 1 - H_{1(2)}^\infty$;

(b) если $\alpha_1 = \alpha_2$, то $H_{1(2)}^\infty = \mathcal{K}_1 \cdot \infty$,

$$\mathcal{K}_1 = \frac{\gamma \alpha_1 ((\sigma_{11} - \sigma_{12}) \lambda_1 + (\sigma_{21} - \sigma_{22}) \lambda_2 + (\sigma_{31} - \sigma_{32}) \lambda_3)}{(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{23}^2)(2\beta\gamma - 1)};$$

$$(c) \text{ если } \mathcal{K}_1 = 0, \text{ то } H_1(t) \equiv H_{1(2)}^\infty = \frac{(2\beta\gamma - 1)\sigma_2^2 + A_2 - A_1}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(2\beta\gamma - 1)}.$$

Доказательство сводится к вычислению величин $H_{1(2)}^\infty, H_{1(2)}^\infty$.

Итак, предельные значения асимптотик стратегий вложения на бесконечности в случае двух активов зависят только от значений параметров α_1, α_2 , если $\alpha_1 \neq \alpha_2$. В случае $\alpha_1 = \alpha_2$ поведение стратегий зависит и от остальных параметров. При больших временах вне зависимости от его тренда и волатильности предпочтительным оказывается тот актив, который зависит от фактора наименьшим образом (соответствующее α_i меньше всего по модулю).

В случае трех активов, зависящих от одного фактора, ($m = 3, n = 1$) функции долей капитала также могут быть найдены в явном виде согласно алгоритму раздела 3.2 (они выписаны в приложении (A.0.15)).

Введем следующие обозначения пределов по времени функций долей капитала $H_i(t), i = 1, 2, 3$:

$$H_{1(3)}^\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} (H_1(t)), H_{2(3)}^\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} (H_2(t)), H_{3(3)}^\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} (H_3(t)).$$

Выпишем явные формулы для асимптотических пределов:

$$\begin{aligned} H_{1(3)}^\infty = & (2\beta(U_3(\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2) + U_2(\alpha_3^2 - \alpha_1\alpha_3))\gamma + (-A_1 + A_3 - U_3)\alpha_2^2 + \\ & + (-A_1 + A_2 - U_2)\alpha_3^2 + (2A_1 - A_2 - A_3)\alpha_2\alpha_3 + (A_2 - A_3 + U_3)\alpha_1\alpha_2 + (-A_2 + A_3 + U_2)\alpha_1\alpha_3) / \\ & / (2\beta((U_2 + U_3)\alpha_1^2 + (U_1 + U_3)\alpha_2^2 + (U_1 + U_2)\alpha_3^2) + 4\beta(-U_3\alpha_1\alpha_2 - U_2\alpha_1\alpha_3 - U_1\alpha_2\alpha_3))\gamma + \\ & + (-U_2 - U_3)\alpha_1^2 + (-U_1 - U_3)\alpha_2^2 + (-U_1 - U_2)\alpha_3^2 + 2(U_3\alpha_1\alpha_2 + U_2\alpha_1\alpha_3 + U_1\alpha_2\alpha_3)), \end{aligned}$$

$$H_{2(3)}^\infty = (2\beta(U_3(\alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2) + U_1(\alpha_3^2 - \alpha_2\alpha_3))\gamma + (-A_2 + A_3 - U_3)\alpha_1^2 +$$

$$\begin{aligned}
& +(A_1 - A_2 - U_1)\alpha_3^2 + (-A_1 + 2A_2 - A_3)\alpha_1\alpha_3 + (A_1 - A_3 + U_3)\alpha_1\alpha_2 + (-A_1 + A_3 + U_1)\alpha_2\alpha_3) / \\
& / (2\beta((U_2 + U_3)\alpha_1^2 + (U_1 + U_2)\alpha_2^2 + (U_1 + U_2)\alpha_3^2) + 4\beta(-U_3\alpha_1\alpha_2 - U_2\alpha_1\alpha_3 - U_1\alpha_2\alpha_3))\gamma + \\
& + (-U_2 - U_3)\alpha_1^2 + (-U_1 - U_3)\alpha_2^2 + (-U_1 - U_2)\alpha_3^2 + 2(U_3\alpha_1\alpha_2 + U_2\alpha_1\alpha_3 + U_1\alpha_2\alpha_3)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{3(3)}^\infty &= (2\beta(U_2(\alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_3) + U_1(\alpha_2^2 - \alpha_2\alpha_3))\gamma + (A_2 - A_3 - U_2)\alpha_1^2 + \\
& + (A_1 - A_3 - U_1)\alpha_2^2 + (-A_1 - A_2 + 2A_3)\alpha_1\alpha_2 + (A_1 - A_2 + U_2)\alpha_1\alpha_3 + (-A_1 + A_2 + U_1)\alpha_2\alpha_3) / \\
& / (2\beta((U_2 + U_3)\alpha_1^2 + (U_1 + U_2)\alpha_2^2 + (U_1 + U_2)\alpha_3^2) + 4\beta(-U_3\alpha_1\alpha_2 - U_2\alpha_1\alpha_3 - U_1\alpha_2\alpha_3))\gamma + \\
& + (-U_2 - U_3)\alpha_1^2 + (-U_1 - U_3)\alpha_2^2 + (-U_1 - U_2)\alpha_3^2 + 2(U_3\alpha_1\alpha_2 + U_2\alpha_1\alpha_3 + U_1\alpha_2\alpha_3)),
\end{aligned}$$

где

$$U_1 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{14}^2,$$

$$U_2 = \sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{24}^2,$$

$$U_3 = \sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2 + \sigma_{33}^2 + \sigma_{34}^2.$$

Отметим, что предельное поведение зависит в общем случае от всех параметров модели, и такое отличие от случая двух активов может показаться странным. Однако, если параметры α_i у какой-то пары активов совпадают, то ситуация аналогична случаю двух активов. А именно, если, например, $\alpha_2 = \alpha_3$, то при любых значениях остальных параметров $H_{1(3)}^\infty = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}$. При этом $H_{2(3)}^\infty$ и $H_{3(3)}^\infty$ зависят и от остальных параметров модели. Случай совпадения всех α_i , как и ранее, является вырожденным,

$$H_{1(3)}^\infty = \mathcal{K}_1 \cdot \infty, \quad \mathcal{K}_1 = \frac{\gamma\alpha_1(\sum_{l=1}^4 \lambda_l \sum_{i,j,k} (-1)^{i+j-1} \sigma_k^2 (\sigma_{il} - \sigma_{jl}))}{(2\beta\gamma - 1) \sum_{i \neq j, i,j=1}^3 \sigma_i^2 \sigma_j^2},$$

где $\sigma_i^2 = \sum_{k=1}^4 \sigma_{ik}^2$, $i = 1, 2, 3$. Если $\mathcal{K}_1 = 0$, то

$$H_1(t) \equiv H_{1(3)}^\infty = \frac{(2\beta\gamma - 1)\sigma_2^2\sigma_3^2 + (A_2 - A_1)\sigma_3^2 + (A_3 - A_1)\sigma_2^2}{(2\beta\gamma - 1) \sum_{i \neq j, i, j=1}^3 \sigma_i^2\sigma_j^2},$$

где i, j, k – все четные перестановки индексов $(1, 2, 3)$.

3.3.4 Влияние различных параметров модели на оптимальную стратегию на малых временах

Интересно отметить, что на малых временах стратегия вложения зависит от всех параметров и значительно отличается от предельной. Мы провели ряд численных экспериментов для случаев двух и трех активов (численные значения параметров приведены в таблице 3.1 и таблице 3.2 соответственно).

Как выяснилось, для случая двух активов ($n = 2$) предельное значение асимптотик стратегий вложения зависят только от значений параметров α_1, α_2 . Но на малых временах стратегия вложения совсем иная:

- На рис. 3.6 приведены графики функций долей капитала, когда параметр β увеличивается. Он влияет на резкий выход к предельному значению, то есть чем больше β , тем быстрее мы выходим на асимптотику.
- На рис. 3.7 приведены графики функций долей капитала при изменении параметра σ_{11} . На малых временах увеличение параметра σ_{11} приводит к уменьшению доли соответствующего актива в портфеле. То есть, чем меньше волатильность, тем выгодней вкладываться в тот актив, которому соответствует эта волатильность.

- Параметр A_1 на больших временах очень слабо влияет на стратегию вложения, но на малых временах влияние A_1 существенно (рис. 3.8).

Для того, чтобы понять какую долю капитала вкладывать в тот или иной актив в случае трех активов ($n = 3$), проведем анализ функций $H_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, изменяя числовые значения параметров β, σ_{ij}, A_i , где $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4$:

- Для начала взяв все параметры одинаковыми, а α_i близкими, будем изменять значение β , причем $\beta < 0$. Зависимость $H_i(t)$ от β приведена на рис.3.9. Видим, что чем больше β по модулю, тем раньше функции $H_i(t)$ выходят на асимптотику.
- Зафиксировав $\beta = -2$ и остальные параметры оставив прежними, меняем значение параметра σ_{11} , отвечающего волатильности цены актива 1. Зависимость $H_i(t)$ от σ_{11} приведена на рис.3.10 и параметрическая зависимость выглядит так:

$$H_{1(3)}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} H_1(t) = \frac{\Psi_1}{\Psi_2 \sigma_{11}^2 + \Psi_3},$$

где Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 не зависят от σ_{11} . Отсюда следует, что при больших σ_{11} предельное значение $H_1(t)$ будет только уменьшаться, т.е. вкладываться стоит в те активы, которым соответствуют малые шумы.

Как показывают графики функций $H_i, i = 1, \dots, 3$, имеет смысл вкладываться в один короткий промежуток времени в один актив, и в другой короткий промежуток времени в другой актив, пока не выйдем на асимптотику.

- Теперь фиксируем β и σ_{11} и перейдем к изменению числовых значений параметра A_1 . Сгруппируем выражение для $H_{1(3)}^\infty$ по A_1 и получим выражение

вида:

$$H_{1(3)}^\infty = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)^2 A_1}{\Phi_1} + \Phi_2,$$

где Φ_1, Φ_2 не зависят от A_1 .

Приходим к выводу, что на малых временах факторы A_i влияют на объем инвестиций, но на бесконечности зависимость от A_i очень маленькая при условии мало отличающихся α_i (см. рис.3.11).

Также отметим, что согласно наблюдениям влияние параметра риска γ аналогично влиянию параметра β .

Таким образом, мы выявили следующее влияние параметров на характер стратегий, причем это влияние аналогично в случаях двух и трех активов:

1. увеличение модулей параметров β и γ влечет более быстрый выход на асимптотику;
2. при малых временах уменьшение волатильности i -го актива (величины σ_{ik}) влечет увеличение доли этого актива в портфеле;
3. несмотря на то, что тренд A_i не влияет на асимптотику стратегии вложения, на малых временах влияние этого параметра очень значительно (увеличение A_i влечет увеличение доли соответствующего актива);

В предложенной стратегии за ноль может быть выбран любой момент времени. Соответственно, нужно разумным образом определить моменты времени, когда целесообразно время “обнулять” и актуализировать параметры модели. Для каждого набора параметров существует своя “бесконечность”, т. е. время фактического выхода на асимптотику T . Для реальных данных T имеет порядок нескольких лет. Знание этого времени T позволяет разумным образом определить момент

пересчета параметров модели как момент, когда стратегия начинает выходить на асимптотику. Из наших рассмотрений вытекает, в частности, что чем больше рискочувствительный параметр γ , тем T меньше, а значит, актуализировать параметры модели нужно чаще.

Таблица 3.1: численные значения параметров для случая двух активов.

	Рис.3.6	Рис.3.7	Рис.3.8
β	-1;-5	-1	-1
α_1	0.5	0.5	0.5
α_2	0.1	0.1	0.1
γ	1	1	1
A_1	0.1	0.1	0.1;0.5
A_2	0.1	0.1	0.1
B	1	1	1
σ_{11}	0.1	0.1;0.5	0.1
σ_{21}	0.1	0.1	0.1
σ_{12}	0.1	0.1	0.1
σ_{22}	0.1	0.1	0.1
σ_{13}	0.1	0.1	0.1
σ_{23}	0.1	0.1	0.1
λ_1	0.1	0.1	0.1
λ_2	0.1	0.1	0.1
λ_3	0.1	0.1	0.1

Таблица 3.2: численные значения параметров для случая трех активов.

	Рис.3.9	Рис.3.10	Рис.3.11
β	-0.9;-2;-5	-2	-2
α_1	0.13	0.13	0.13
α_2	0.12	0.12	0.12
α_3	0.11	0.11	0.11
γ	1	1	1
A_1	0.1	0.1	0.5;2;5
A_2	0.1	0.1	0.1
A_3	0.1	0.1	0.1
B	1	1	1
σ_{11}	0.1	0.3;1.5;3	0.3
σ_{21}	0.1	0.1	0.1
σ_{31}	0.1	0.1	0.1
$\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{32}$	0.1	0.1	0.1
$\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$	0.1	0.1	0.1
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$	0.1	0.1	0.1

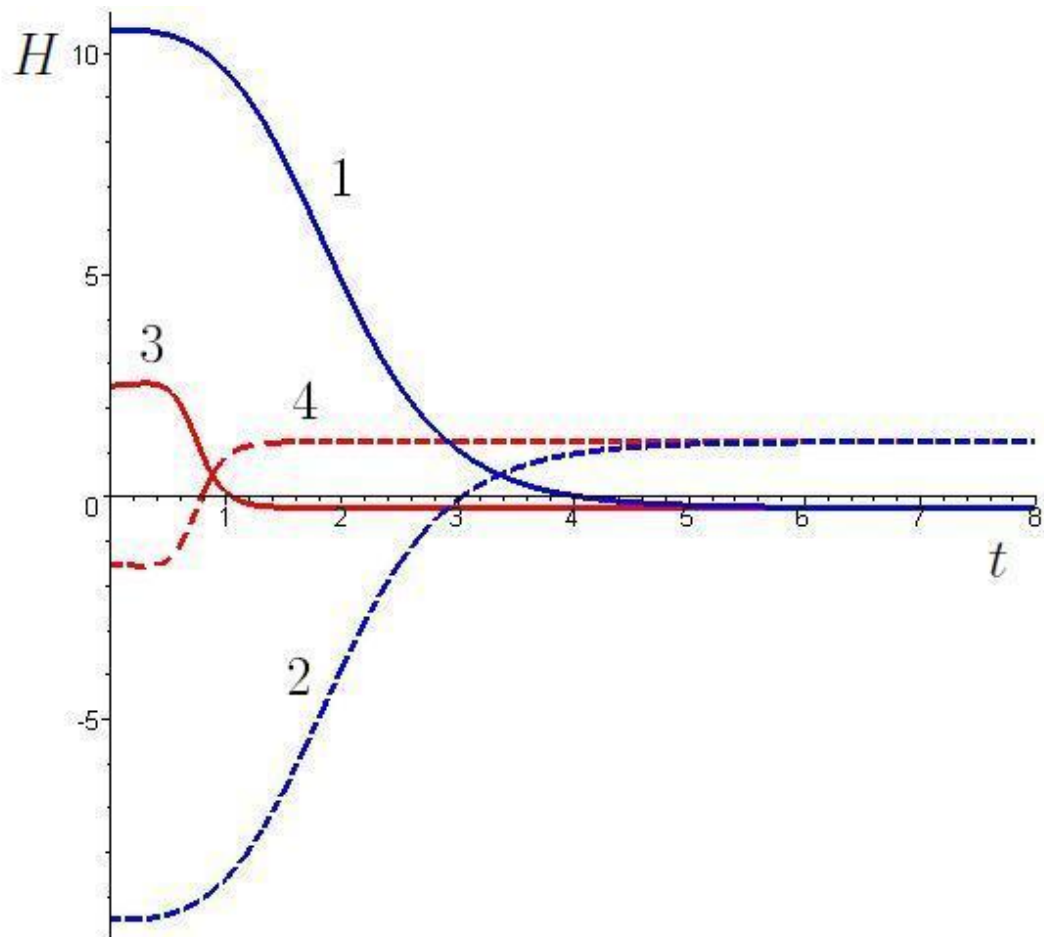


Рис. 3.6: влияние параметра β на поведение стратегии инвестирования $H = (H_1, H_2)$: **1.** H_1 , когда $\beta = -1$; **2.** H_2 , когда $\beta = -1$; **3.** H_1 , когда $\beta = -5$; **4.** H_2 , когда $\beta = -5$.

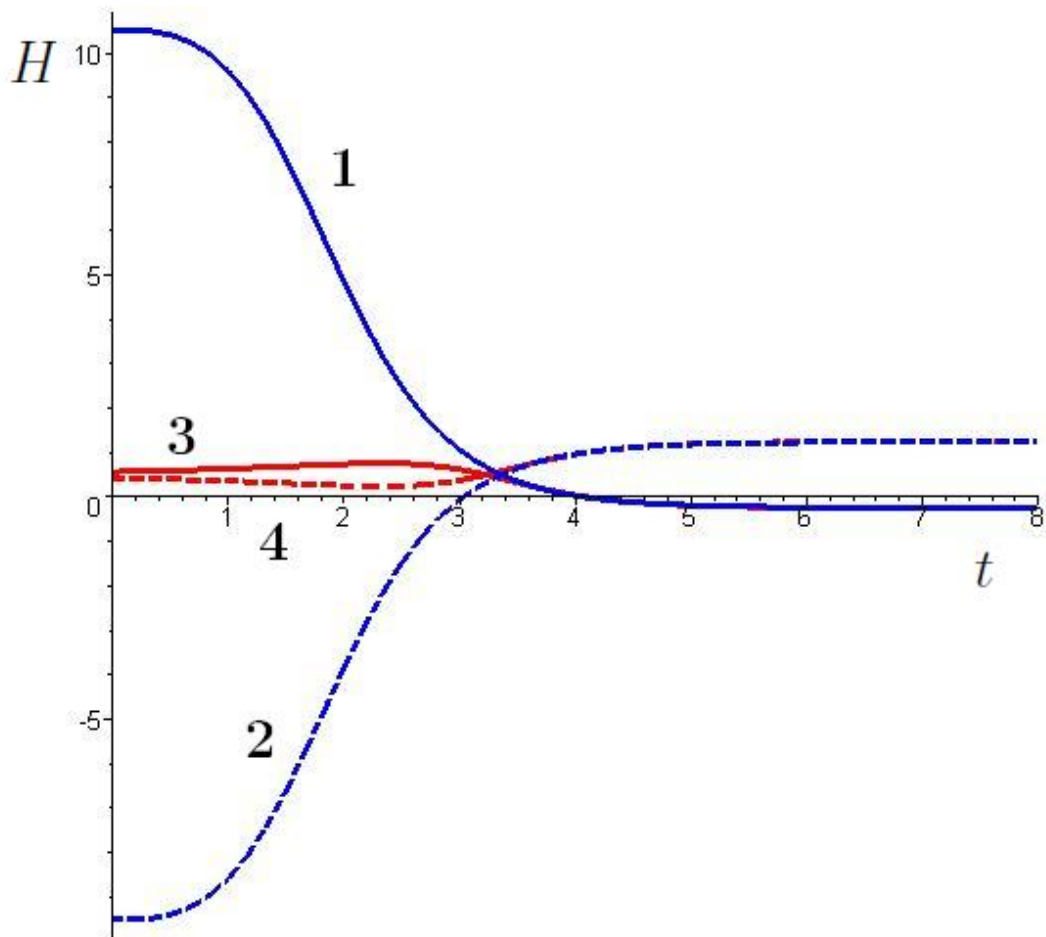


Рис. 3.7: влияние параметра σ_{11} на поведение стратегии инвестирования $H = (H_1, H_2)$: **1.** H_1 , когда $\sigma_{11} = 0.1$; **2.** H_2 , когда $\sigma_{11} = 0.1$; **3.** H_1 , когда $\sigma_{11} = 0.5$; **4.** H_2 , когда $\sigma_{11} = 0.5$.

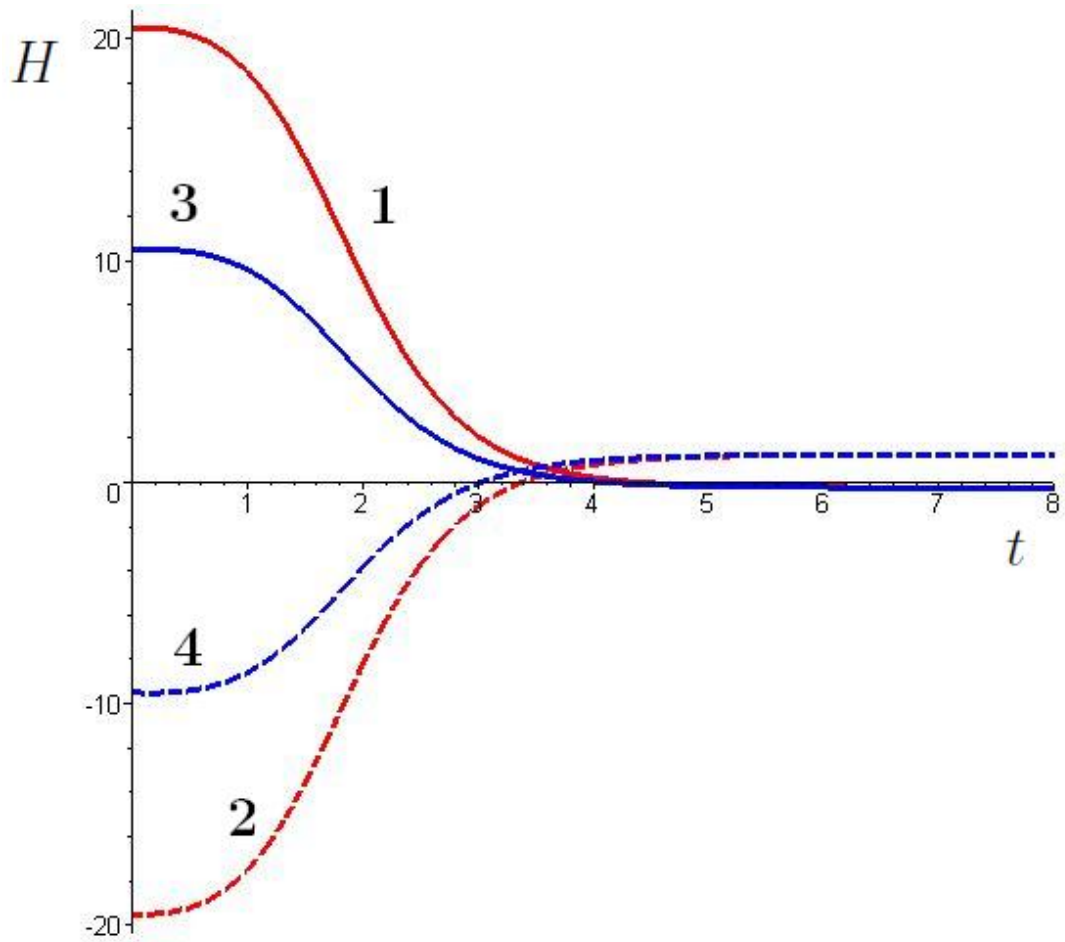


Рис. 3.8: влияние параметра A_1 на поведение стратегии инвестирования $H = (H_1, H_2)$: **1.** H_1 , когда $A_1 = 0.1$; **2.** H_2 , когда $A_1 = 0.1$; **3.** H_1 , когда $A_1 = 0.5$; **4.** H_2 , когда $A_1 = 0.5$.

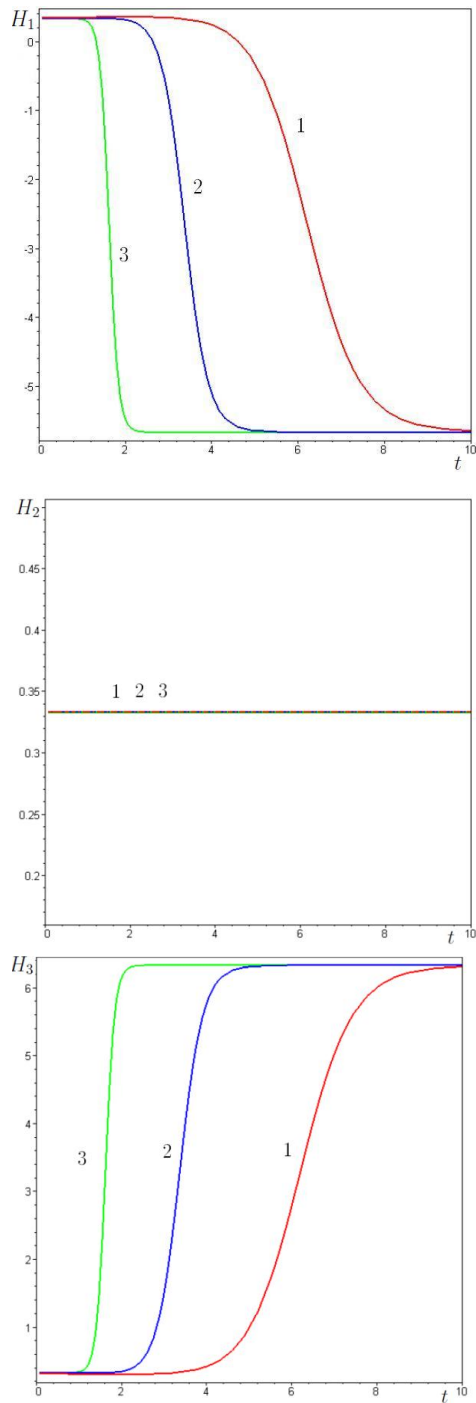


Рис. 3.9: влияние параметра β на поведение стратегии инвестирования $H = (H_1, H_2, H_3)$: **1.** при $\beta = -0.9$; **2.** при $\beta = -2$; **3.** при $\beta = -5$.

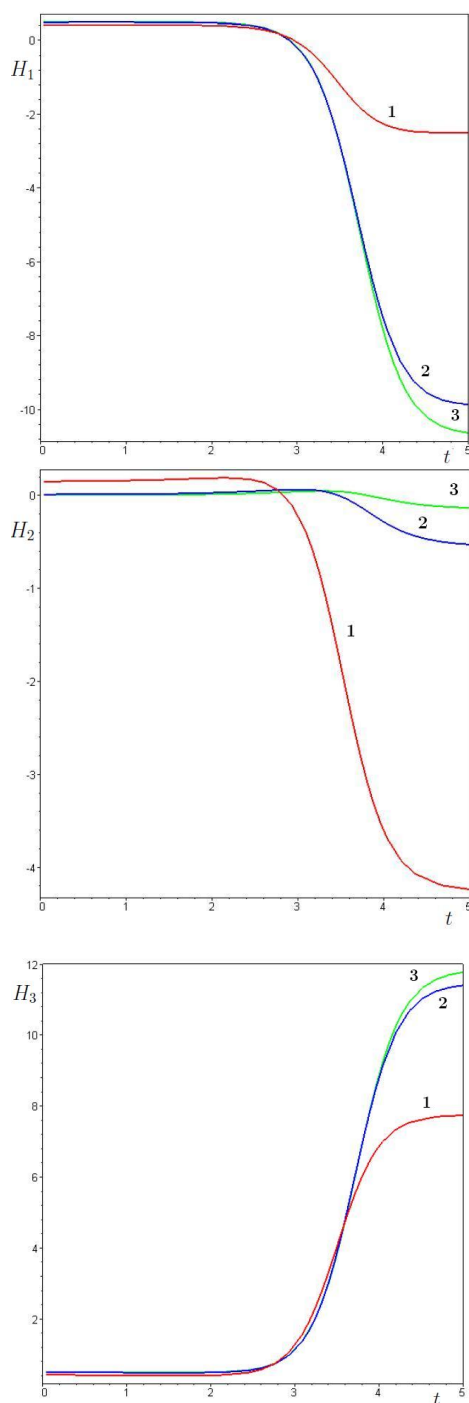


Рис. 3.10: влияние параметра σ_{11} на поведение стратегии инвестирования $H = (H_1, H_2, H_3)$: **1.** при $\sigma_{11} = 0.3$; **2.** при $\sigma_{11} = 1.5$; **3.** при $\sigma_{11} = 3$.

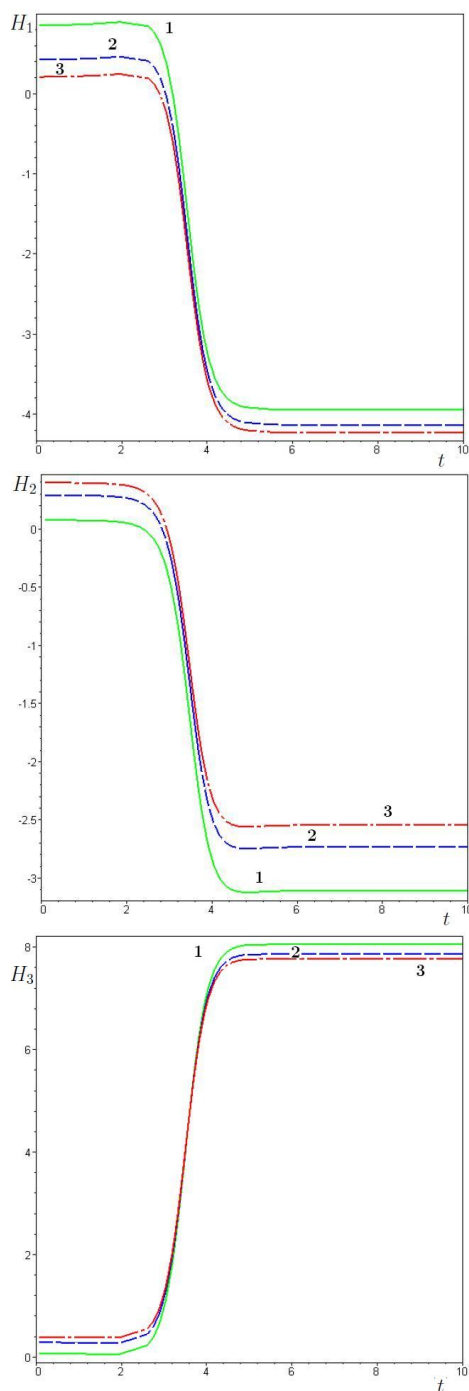


Рис. 3.11: влияние параметра A_1 на поведение стратегии инвестирования $H = (H_1, H_2, H_3)$: **1.** при $A_1 = 5$; **2.** при $A_1 = 2$; **3.** при $A_1 = 0.5$.

3.4 Случай нелинейной процентной ставки

3.4.1 Задача нахождения среднего

Отметим, что в рассмотренной нами задаче моделировался фактор с постоянной волатильностью. Строгая теория, построенная Т.Р. Белецким и С.Р. Плиской, также ограничивается этим случаем. Причина этого в том, что в такой модели уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана сводится к уравнению второго порядка параболического типа (у которого сумма степеней производных по пространственным переменным и степеней многочленов, стоящих в качестве коэффициентов при этих производных, равна двум). В данном разделе мы рассмотрим другую модель процентной ставки, когда волатильность ее пропорциональна квадратному корню от значения ставки, и уравнение ФПК не относится к указанному типу. Тем не менее задачу нахождения среднего можно решить в случае специального начального распределения процентной ставки.

Рассмотрим частный случай системы (2.1.1):

$$dF = (A + \alpha R)dt + \sigma dW_1, \quad (3.4.1)$$

$$dR = (B + \beta R)dt + \lambda\sqrt{R}dW_2. \quad (3.4.2)$$

Здесь $B > 0, \beta < 0, \sigma > 0, \lambda > 0, A, \alpha$ - некоторые константы.

Первое уравнение описывает изменение доходности F актива, тренд которого линейным образом зависит от процентной ставки R , изменяющейся по закону Кокса-Ингерсолла-Росса [23]. Чтобы обеспечить положительность случайного процесса, описывающего процентную ставку, достаточно потребовать, чтобы выполнялось неравенство $-2\beta B > \lambda^2$ [36]. Процентная ставка вида (3.4.2) в роли фактора рассматривалась, в частности, в работе Т.Р. Белецкого и С.Р. Плиски

[13], но ими были получены лишь частичные качественные результаты, конкретный вид оптимальной стратегии не найден.

Предположим, что первоначально процентная ставка R может принимать с равной вероятностью любое значение на интервале $(0, L)$, $L > 0$. Отметим, что если в случае модели Васичека можно было получить явные формулы и для любого гауссовского первоначального распределения величины процентной ставки, то в случае модели Кокса-Ингерсолла-Росса мы можем получить явную формулу только для равномерного первоначального распределения.

Уравнение ФПК для совместной плотности распределения случайных величин F и R , подчиняющихся системе (3.4.1), (3.4.2), таково:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P(t, f, r)}{\partial t} + (A + \alpha r) \frac{\partial P(t, f, r)}{\partial f} + \beta P(t, f, r) + \\ & + (B + \beta r - \lambda^2) \frac{\partial P(t, f, r)}{\partial r} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 P(t, f, r)}{\partial f^2} - \frac{1}{2} \lambda^2 r \frac{\partial^2 P(t, f, r)}{\partial r^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

с начальными условиями

$$P(0, f, r) = \delta(f - f_0) \chi_{(0, L)}(r). \quad (3.4.4)$$

Строго говоря, из принятого нами вида начальной функции распределения величины R следует, что для того, чтобы функция $P(0, f, r)$ была плотностью распределения, нужно разделить выражение в (3.4.4) на L . Однако в силу линейности уравнения (3.4.3) и определений (2.3.1) и (2.3.2) этот множитель не влияет на результат вычислений.

Преобразование Фурье по (f, r) , функция $\hat{P}(t, \mu, \xi)$, подчиняется уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \hat{P}(t, \mu, \xi) - \left(\alpha \mu + \beta \xi - i \frac{1}{2} \lambda^2 \xi^2 \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{P}(t, \mu, \xi) + \\ & + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 \mu^2 + A \mu i + B \xi i \right) \hat{P}(t, \mu, \xi) = 0, \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

с начальными условиями

$$\hat{P}(0, \mu, \xi) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\mu f_0} \frac{e^{-i\xi L} - 1}{i\xi} \rightarrow \frac{1}{2\pi} e^{-i\mu f_0} \delta(\xi) \text{ при } L \rightarrow \infty. \quad (3.4.6)$$

Уравнение (3.4.5) имеет первый порядок и может быть проинтегрировано. Решение задачи (3.4.5), (3.4.6) в предельном случае $L \rightarrow \infty$ находится стандартными методами и имеет вид

$$\hat{P}(t, \mu, \xi) = e^{-\frac{2if_0\mu\lambda^2 + 2tA\mu\lambda^2 + 2tB\beta + t\sigma^2\mu^2\lambda^2}{2\lambda^2}} \delta(s(t, \mu, \xi)) \times \left(\frac{\lambda^2(2i\alpha\mu + 2i\beta\xi + \lambda^2\xi^2) \operatorname{ch} \left(\frac{t\sqrt{2i\alpha\mu\lambda^2 + \beta^2}}{2} + i \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda^2\xi + i\beta}{\sqrt{2i\alpha\mu\lambda^2 + \beta^2}} \right) \right)^2}{2i\alpha\mu\lambda^2 + \beta^2} \right)^{-\frac{B}{\lambda^2}},$$

где

$$s(t, \mu, \xi) = -\frac{\left((\beta - \sqrt{2i\alpha\mu\lambda^2 + \beta^2})\xi + 2\alpha\mu \right) e^{-t\sqrt{2i\alpha\mu\lambda^2 + \beta^2}} + \left(-\beta - \sqrt{2i\alpha\mu\lambda^2 + \beta^2} \right) \xi - 2\alpha\mu}{\sqrt{2i\alpha\mu\lambda^2 + \beta^2} + i\lambda^2\xi - \beta + \left(\sqrt{2i\alpha\mu\lambda^2 + \beta^2} - i\lambda^2\xi + \beta \right) e^{-t\sqrt{2i\alpha\mu\lambda^2 + \beta^2}}}.$$

Применим формулы (2.3.1) и (2.3.2), поскольку выполнены условия их применимости (см. раздел 2.3 главы 2). Вычисления показывают, что

$$\hat{P}(t, 0, \xi) = \theta(t, \xi) \delta(s(t, 0, \xi)), \quad (3.4.7)$$

$$\partial_\mu \hat{P}(t, 0, \xi) = \phi(t, \xi) \delta(s(t, 0, \xi)) + \psi(t, \xi) \delta'_\mu(s(t, 0, \xi)), \quad (3.4.8)$$

$$\partial_\mu^2 \hat{P}(t, 0, \xi) = q_1(t, \xi) \delta(s(t, 0, \xi)) + q_2(t, \xi) \delta'_\mu(s(t, 0, \xi)) + q_3(t, \xi) \delta''_\mu(s(t, 0, \xi)), \quad (3.4.9)$$

где

$$s(t, 0, \xi) = \frac{2\beta\xi}{i\xi\lambda^2 + (2\beta - i\xi\lambda^2)e^{-\beta t}},$$

$$\theta(t, \xi) = \left(\frac{-i\lambda^2(i\xi^2\lambda^2 - 2\beta\xi) \operatorname{ch} \left(\frac{\beta t}{2} + i \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda^2\xi + i\beta}{\beta} \right) \right)^2 e^{\beta t}}{\beta^2} \right)^{-\frac{B}{\lambda^2}},$$

$$\phi(t, \xi) = \theta(t, \xi) (L_1 - i(At + f_0)), \quad \psi(t, \xi) = \theta(t, \xi)L_2,$$

$$L_1 = \frac{B\alpha \left((4\beta\lambda^4\xi^2 - i\lambda^6\xi^3 + 4i\beta^2\lambda^2\xi)t + (4\beta^2 - 2\lambda^4\xi^2 - 6i\beta\lambda^2\xi) \right)}{\beta\lambda^2\xi(\lambda^2\xi + 2i\beta)^2} \times \\ \times \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{\beta t}{2} + i \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda^2\xi + i\beta}{\beta} \right) \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{\beta t}{2} + i \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda^2\xi + i\beta}{\beta} \right) \right)} + \frac{2\alpha B(i\lambda^2\xi(\lambda^4\xi^2 - 5\beta^2) - 4\beta\lambda^4\xi^2) + 2\beta^3}{\beta^2\lambda^2\xi(\lambda^2\xi + 2i\beta)^2},$$

$$L_2 = \frac{-\alpha\xi^2\lambda^4e^{2\beta t} + 2((\lambda^2\xi + 2i\beta)\lambda^2\xi t - 2i\lambda^2\xi + 2\beta)\alpha\beta e^{\beta t} + 4i\alpha\beta\lambda^2\xi + \alpha\lambda^2\xi - 4\alpha\beta^2}{i\beta\lambda^2\xi(e^{\beta t} - 1) + 2\beta^2}.$$

Функции $q_i(t, \xi)$, $i = 1, 2, 3$, мы выписали в приложении (A.0.9), (A.0.10), (A.0.11), поскольку они очень громоздкие.

Подстановка выражений (3.4.7), (3.4.8), (3.4.9) в формулы (2.3.1) и (2.3.2) и следующие длинные, но стандартные вычисления и преобразования показывают, что

$$\bar{f}(t, r) = f_0 + \left(A - \frac{\alpha}{\beta} \right) t + \frac{(1 - e^{\beta t})\alpha r}{\beta} - \frac{(2 + \lambda^2)\alpha e^{2\beta t}}{\beta^2} + \\ + \left(\frac{(1 + \lambda^2)\alpha t}{\beta} + \frac{(2 + \lambda^2)\alpha}{\beta^2} \right) e^{\beta t} \quad (3.4.10)$$

$$\bar{v}(t, r) = t\sigma^2 + \left(-\frac{2e^{3\beta t}}{\beta^3} + \frac{(2\beta t + 3)e^{2\beta t}}{\beta^3} - \frac{2e^{\beta t}}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^3} \right) \alpha^2\lambda^2 r + \\ + \left(4e^{4\beta t} - \frac{3(4\beta t + 5)e^{3\beta t}}{2} + (\beta^2 t^2 + 4\beta t + 6)e^{2\beta t} + \frac{(2\beta^2 t^2 - 2\beta t - 5)e^{\beta t}}{2} \right) \frac{\alpha^2\lambda^4}{\beta^4} + \\ + \left(\frac{5Be^{4\beta t}}{2} - 2B(\beta t + 3)e^{3\beta t} + \frac{15Be^{2\beta t}}{2} - 4Be^{\beta t} - B\beta t \right) \frac{\alpha^2\lambda^2}{\beta^4}. \quad (3.4.11)$$

3.4.2 Пример портфеля из двух активов, зависящих от процентной ставки Кокса-Ингерсолла-Росса

Рассмотрим портфель, состоящий из двух активов (один из которых — банковский счет), линейно зависящих от одного случайного фактора, процентной ставки. Такой портфель систематически рассматривается в качестве примера в работах Т.Р. Белецкого и С.Р. Плиски (например, [11], [12], [13]). Предположим, что процесс стоимостей активов подчиняется уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{dS_1(t)}{S_1(t)} &= (A_1 + \alpha_1 R(t))dt + \sigma_1 dW_1(t), \\ \frac{dS_2(t)}{S_2(t)} &= R(t)dt.\end{aligned}$$

Тренды активов линейным образом зависят от процентной ставки $R(t)$, изменяющейся по закону Кокса-Ингерсолла-Росса (3.4.2).

Капитал портфеля $V = hS_1 + (1 - h)S_2$, где $(h, 1 - h)$ — стратегия инвестирования, согласно которой инвестор вкладывает долю капитала h в первый актив и $(1 - h)$ — во второй. Процесс инвестирования $(h, 1 - h)$ предполагается допустимым согласно определению 1.3.

Сразу же отметим, что мы могли бы рассмотреть портфель, состоящий из любого конечного числа активов (как это делалось для случая линейного фактора). Это усложнило бы задачу только технически.

Обозначим $\ln V = F$. Тогда

$$dF = \left(A_1 h - \frac{1}{2} \sigma_1^2 h^2 + \left((h - 1) \alpha_1 + 1 \right) R \right) dt + \sigma_1 h dW_1. \quad (3.4.12)$$

Для системы (3.4.12), (3.4.2) справедливы формулы условного математического

ожидания и условной дисперсии (3.4.10) и (3.4.11) при подстановке в них

$$A = A_1 h - \frac{1}{2} \sigma_1^2 h^2, \quad \alpha = (\alpha_1 - 1)h + 1, \quad \sigma = \sigma_1 h. \quad (3.4.13)$$

Рассмотрим вновь функционал (3.1.2):

$$\bar{Q}_\gamma(t, r; h) = \bar{f}(t, r; h) - \gamma \bar{v}(t, r; h),$$

где γ - коэффициент риска, меняя который, мы можем увеличивать или уменьшать роль случайности (отклонения от ожидаемого среднего). Найдем оптимальную согласно определению 3.1 стратегию, то есть максимум этого выражения относительно класса допустимых стратегий инвестирования $(h, 1 - h)$.

Согласно (3.4.10), (3.4.11) и (3.4.13) получим, что

$$\bar{Q}_\gamma(t, r; h) = K_2 h^2 + K_1 h + K_0,$$

где K_i - гладкие функции от t, r и коэффициентов $A_1, \alpha_1, \sigma_1, B, \beta, \lambda, \gamma$. Эти функции выражаются через элементарные, однако выражения для них громоздкие, поэтому мы выпишем их в приложении (A.0.12), (A.0.13), (A.0.14). Поскольку функция $\bar{Q}_\gamma(t, r; h)$ квадратична по h , а ее старший коэффициент

$$K_2 = -\frac{t\sigma_1^2 h^2}{2} - \gamma \bar{v}(t, r; h)|_{(\alpha=\alpha_1-1, \sigma=\sigma_1)} < 0,$$

то $\bar{Q}_\gamma(t, r; h)$ достигает максимума в единственной точке экстремума (аналогично линейному случаю, описанному в разделе 3.3.1), и соответствующая оптимальная стратегия в смысле определения 3.1:

$$\begin{aligned} \bar{H}_\gamma &= \frac{-K_1}{2K_2} = \\ &= \frac{(1 - \alpha_1)(M_4 e^{4\beta t} + M_3 e^{3\beta t} + M_2 e^{2\beta t} + M_1 e^{\beta t} + M_0) + A_1 \beta^4 t}{(1 - \alpha_1)^2 (M_4 e^{4\beta t} + M_3 e^{3\beta t} + N_2 e^{2\beta t} + N_1 e^{\beta t} + N_0) + (2\gamma + 1) \sigma_1^2 \beta^4 t}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
M_4 &= \gamma\lambda^2(8\lambda^2 + 5B), \quad M_3 = -\gamma\lambda^2((3\lambda^2 + B)4\beta t + 15\lambda^2 + 4r\beta + 12B), \\
M_2 &= 2\gamma\lambda^4\beta^2 t^2 + (2\lambda^2 + \beta r)4\gamma\beta\lambda^2 t + 12\gamma\lambda^4 + (5B + 2\beta r)3\gamma\lambda^2 - (\lambda^2 + B)\beta^2, \\
M_1 &= 2\gamma\lambda^4\beta^2 t^2 + (\beta^2 - 2\gamma\lambda^2)\beta\lambda^2 t - 5\gamma\lambda^4 + (\beta^2 - 4\gamma\beta r - 8\gamma B)\lambda^2 + \beta^3 r + \beta^2 B, \\
M_0 &= (\beta^2 - 2\gamma\lambda^2)\beta B t + 2\gamma\lambda^2\beta r - \beta^3 r, \quad N_1 = \gamma\lambda^2(2\beta^2\lambda^2 t^2 - 2\beta\lambda^2 t - 5\lambda^2 - 4\beta r - 8B), \\
N_2 &= \gamma\lambda^2(2\lambda^2\beta^2 t^2 + (2\lambda^2 + \beta r)4\beta t + 12\lambda^2 + 6\beta r + 15B), \quad N_0 = 2\gamma\beta\lambda^2(-Bt + r).
\end{aligned}$$

Мы видим, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{H}_\gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{H}_\gamma(t) = \frac{(\alpha_1 - 1)(\beta^2 B - 2\gamma\lambda^2 B) - A_1 \beta^3}{(\alpha_1 - 1)^2 2\gamma\lambda^2 B + (2\gamma + 1)\sigma_1^2 \beta^3}. \quad (3.4.14)$$

Как было показано в разделе 3.3.3 в случае линейной процентной ставки

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{H}_\gamma(t) = \frac{-1}{\alpha_1 - 1}, \quad \alpha_1 \neq 1.$$

Это выражение получается при предельном переходе в (3.4.14) при $\gamma \rightarrow \infty$ и $\sigma_1 \rightarrow 0$.

Отметим, что в случае нелинейной процентной ставки предельное выражение более полно использует коэффициенты модели, чем в линейном случае.

3.5 Сравнение стратегий вложения для случаев линейной и нелинейной процентных ставок

Пусть процентная ставка $r = 0.05$, начальный капитал портфеля $f_0 = 0.08$, коэффициент риска $\gamma = 0.1$, параметры $B = 0.05$, $\beta = -1$, $\lambda = 0.04$, $A_1 = 0.15$, $\alpha_1 = -1$, $\sigma_1 = 0.2$ (мы используем значения параметров из работы [12]).

На рис. 3.12 приведены соответствующие стратегии вложения для случаев линейной (сплошная линия) и нелинейной (пунктирная линия) процентных ставок при их равномерном первоначальном распределении. Мы видим, что эти стратегии существенно различны. Для того, чтобы в случае процентной ставки Кокса-Ингерсолла-Росса стратегия приблизилась к соответствующей стратегии в линейном случае, нужно выбрать рискочувствительный параметр γ намного большим.

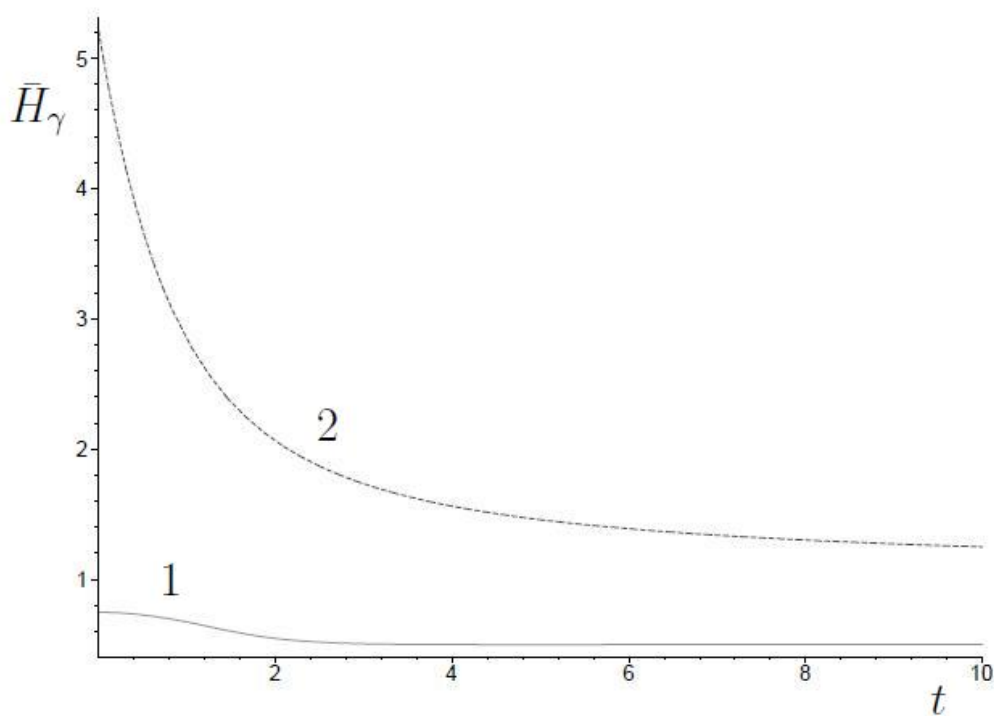


Рис. 3.12: сравнение стратегий вложения для различных моделей процентной ставки: **1.** случай линейной процентной ставки **2.** случай нелинейной процентной ставки.

Отметим, что и в том, и в другом случае стратегии вложения предполагают использование свойств процентной ставки на маленьких временах, но на больших временах, как показывает рассмотрение различных сочетаний параметров, в линейном случае нужно делать вложения в тот актив, который зависит от процент-

ной ставки как можно меньше. В случае процентной ставки Кокса-Ингерсолла-Росса и на больших временах учитываются свойства рыночного фактора.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5.1. Способ распределения средств по активам, предложенный Т.Р. Белецким и С.Р. Плиской, является “стратегическим” (в терминологии [10]), то есть наибольшая выгода от вложения достигается на некотором горизонте времени, в данном случае бесконечном. Наш способ инвестирования относится к “тактическому” [17], дает возможность улавливать тенденции рынка более гибко и может быть полезен при управлении хедж-фондами с коротким временем инвестирования.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5.2. Если бы мы дополнительно предположили, что дисперсия доходности актива, изменяющейся согласно (3.4.1), пропорциональна процентной ставке, то мы бы оказались в ситуации модели Хестона [37], одной из самых популярных моделей стохастической волатильности. В [38] анализировалась величина средней дисперсии при фиксированной доходности актива в рамках этой модели, для чего также оказалась полезна формула (2.3.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5.3. В случае, когда волатильность процентной ставки постоянна, наши рассуждения легко переносятся на случай коррелированных броуновских процессов W_1 и W_2 , тогда как в случае процентной ставки, подчиняющейся закону Кокса-Ингерсолла-Росса, предположение о коррелированности, по-видимому, препятствует получению аналитических результатов.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5.4. Статьи [39] и [40] являются продолжением работы [13], там также исследуются задачи долгосрочного оптимального инвестирования в рамках модели Кокса-Ингерсолла-Росса. Подчеркнем, что в отличие от стра-

тегий, там анализируемых, построенная нами оптимальная стратегия справедлива для любого фиксированного момента времени.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5.5. Как следует из [31], поведение стратегии инвестирования должно зависеть от скорости убывания на бесконечности начальной плотности распределения процентной ставки.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5.6. Уравнения (3.4.1), (3.4.2) относятся к так называемой “аффинной” модели [32], поэтому соответствующее уравнение ФПК удалось проинтегрировать.

Глава 4

Программный продукт для расчета оптимальной стратегии

4.1 Описание программы

Для расчета предложенной в диссертации оптимальной стратегии был разработан программный продукт. Данный программный продукт позволяет по реальным данным активов и факторов рассчитать оптимальную стратегию на заданный интервал времени и изобразить ее графически. Также есть отдельный режим для анализа применимости предложенной стратегии инвестирования за прошлые периоды времени по историческим данным активов и факторов.

Программа позволяет работать параллельно с несколькими независимыми наборами активов и факторов. В программе выполняется проверка соответствия реальных данных рассматриваемой модели (1.3.1), (1.3.2), и в случае несоответствия стратегия не вычисляется.

В программе реализованы случаи равномерного и гауссовского начальных распределений фактора. В случае гауссовского распределения выполняется проверка

применимости стратегии, соответствующая выполнению условия (3.3.12) (напомним, что для равномерного распределения аналогичное условие (3.3.22), (3.3.23) всегда выполняется).

Программный продукт разработан на языке программирования C++. Для графического интерфейса использовалась библиотека MFC [41]. Для разработки использовалась среда Microsoft Visual Studio.

4.2 Интерфейс программы

4.2.1 Рабочее окно

На рис.4.1 изображено основное окно программы.

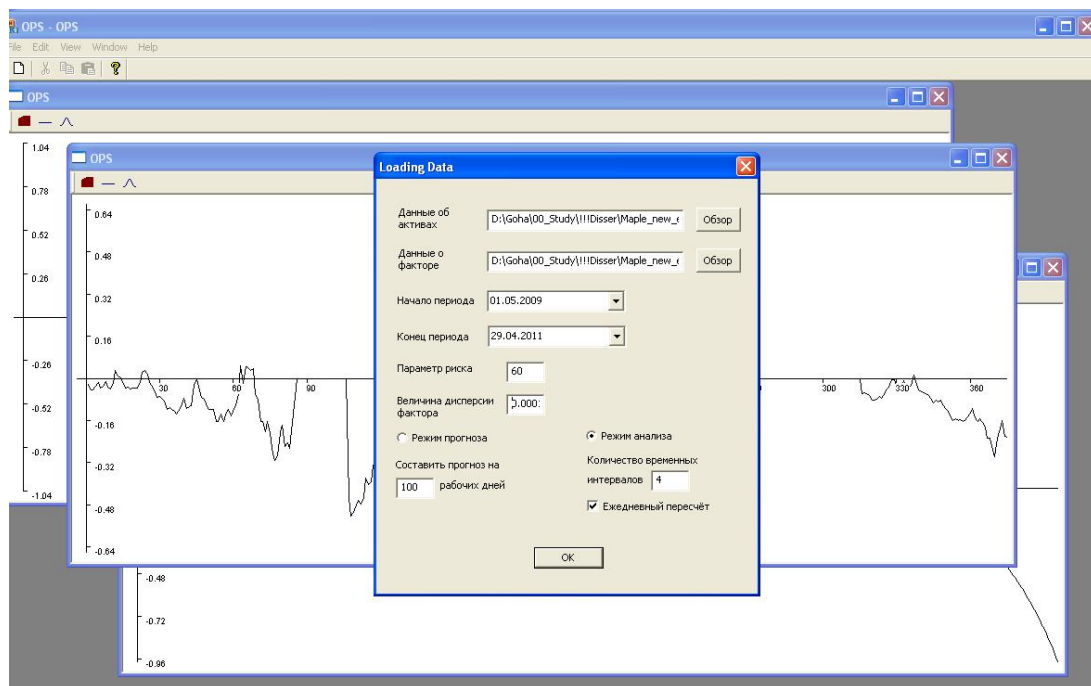


Рис. 4.1: программный продукт для расчета оптимальной стратегии, предложенной в диссертации

Программа позволяет работать параллельно с несколькими независимыми на-

борами активов и факторов, каждый из которых запускается в отдельном окне. Работа в каждом рабочем окне ведется независимо от других рабочих окон и аналогична для всех них, поэтому дальнейшее описание будет производиться для одного рабочего окна.

4.2.2 Задание исходных данных

Для ввода исходных данных в рабочем окне нужно нажать кнопку “Ввод исходных данных”. В результате появляется диалоговое окно ввода исходных данных *Loading Data* (см. рис 4.1):

- данные об активах;
- данные о факторе;
- начало периода (для выборки исторических данных, на основе которых вычисляются параметры модели);
- конец периода (для выборки исторических данных, на основе которых вычисляются параметры модели);
- параметр риска (γ);
- величина дисперсии фактора (для гауссовского первоначального распределения фактора, s^2);
- режим прогноза:
 - составить прогноз на X рабочих дней;
- режим анализа:
 - количество временных интервалов;
 - ежедневный пересчет.

4.3 Режим прогнозирования

В режиме прогнозирования программа рассчитывает оптимальную стратегию на заданный момент времени в будущем по текущим исходным данным по активам и факторам.

4.4 Режим анализа

В режиме анализа программа позволяет рассчитать оптимальную стратегию согласно предложенному методу по историческим данным котировок активов и значений фактора сразу на несколько интервалов времени в течение заданного периода в прошлом. Таким образом, мы построим стратегию для нескольких шагов управления инвестиционным процессом за прошедший период. Отметим, что возможны два подхода определения параметров модели: однократное вычисление параметров модели за интервал (в этом случае параметры принимаются вычисленными константами до конца интервала), а также ежедневный пересчет параметров модели.

При помощи данного программного продукта был проведен анализ применения предложенной в диссертации стратегии к реальным историческим данным индекса NASDAQ и эффективной ставки по федеральным фондам за период 01.05.2009-29.04.2011.

Практические расчеты показали, что при равномерном и гауссовском начальных распределениях в общем случае стратегии получаются близкие (при $s^2 > 0.0001$, см. рис.4.2).

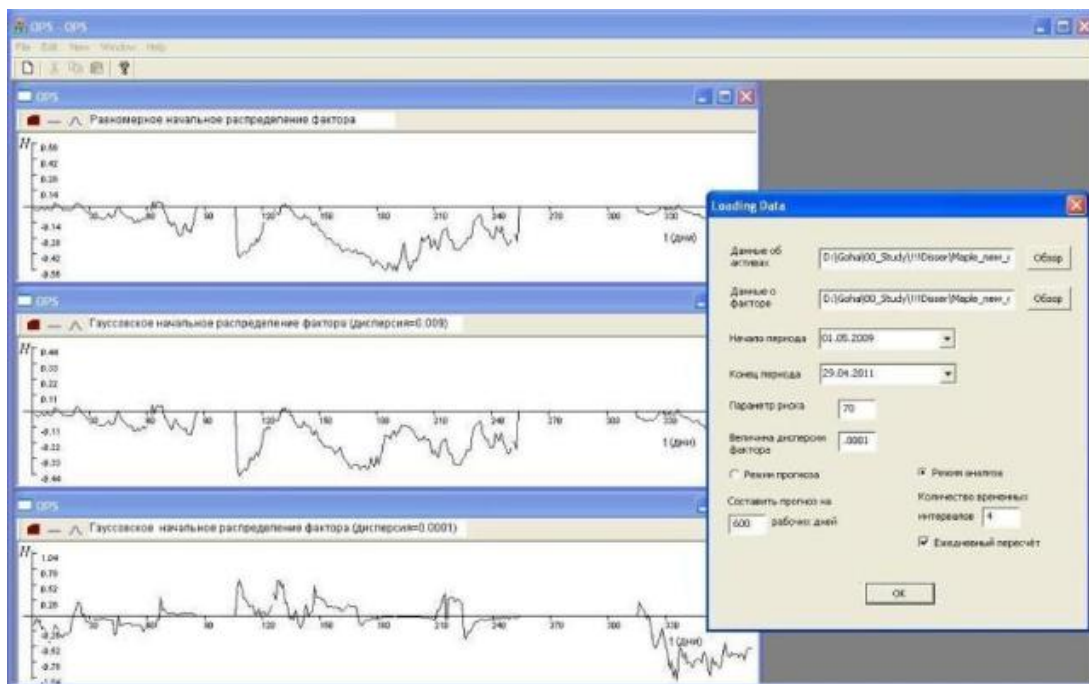


Рис. 4.2: пример расчета стратегии на реальных исторических данных при равномерном и гауссовском начальных распределениях фактора: 1. равномерное распределение; 2. гауссовское распределение при $s^2 = 0.009$; 3. гауссовское распределение при $s^2 = 0.0001$ (начиная с верхнего графика).

На рис.4.3 приведена стратегия при гауссовском начальном распределении при различных значениях параметра риска γ . Видим, что γ отвечает за “масштаб” доли капитала: чем меньше γ , тем больше кредитное плечо.



Рис. 4.3: пример расчета стратегии на реальных исторических данных при гауссовском начальном распределении фактора: $\gamma = 0.1, 1, 100$, начиная с верхнего графика.

На рис.4.4 приведена стратегия при равномерном начальном распределении при различных временных интервалах выборки исторических данных, на основе которых вычисляются параметры модели.

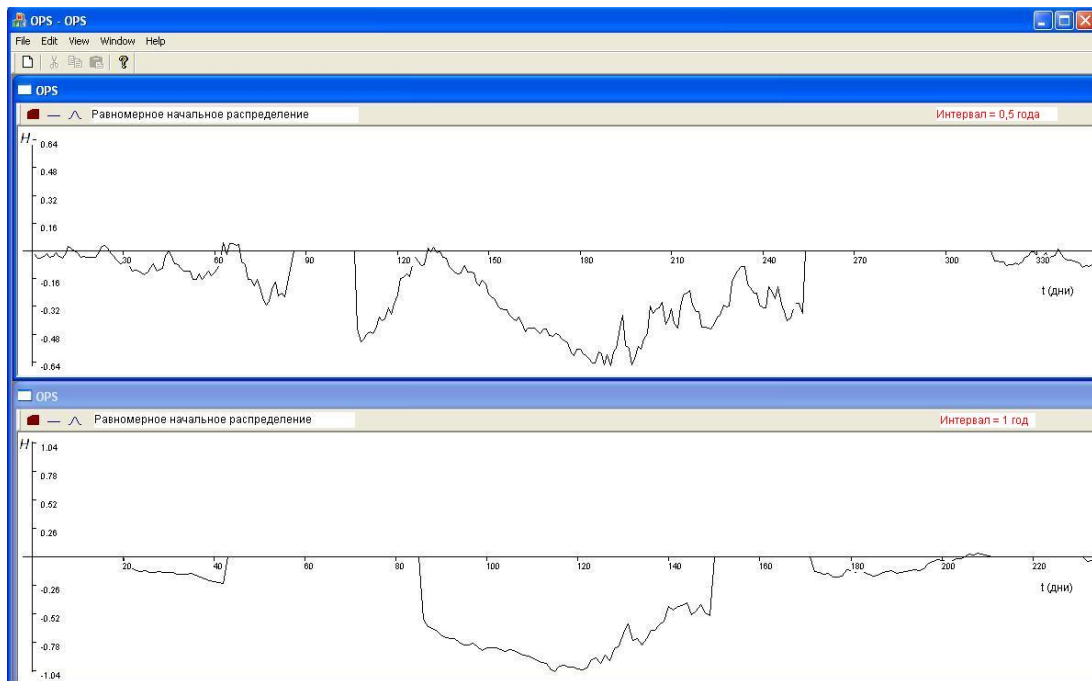


Рис. 4.4: пример расчета стратегии на реальных исторических данных при равномерном начальном распределении фактора для интервалов 0.5 года (верхний график) и 1 год (нижний график).

Литература

- [1] H.M. Markowitz. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. John Wiley & Sons, New York, 1959.
- [2] W.F. Sharpe. *Portfolio Theory and Capital Markets*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1970.
- [3] M.N. Pesaran and A. Timmermann. Predictability of stock returns: Robustness and economic significance. *J. Finance*, 50:1201–1228, 1995.
- [4] A.D. Patelis. Stock return predictability and the role of monetary policy. *The Journal of Finance*, LII:1951–1972, 1997.
- [5] A. Ilmanen. Forecasting u.s. bond returns. *The Journal of Fixed Income*, pages 22–37, 1997.
- [6] R.E. Lucas. Asset prices in an exchange economy. *Econometrica*, 46:1429–1445, 1978.
- [7] R.C. Merton. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model. *J. Econ. Th.*, 3:373–413, 1971.
- [8] I. Karatzas. Lectures on the mathematics of finance. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 8, 1996.

- [9] R.C. Merton. An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica*, 41:866–887, 1973.
- [10] M.J. Brennan, E.S. Schwartz, and R. Lagnado. Strategic asset allocation. *J. Economic Dynamics and Control*, 1997.
- [11] T. Bielecki and S. Pliska. Risk sensitive dynamic asset management. *J. Appl. Math. and Optimiz.*, 37:337–360, 1999.
- [12] T. Bielecki, S. Pliska, and M. Sherris. Risk sensitive asset allocation. *J. Econ. Dynamics and Contr.*, 24:1145–1177, 2000.
- [13] T. Bielecki, S. Pliska, and S-J. Sheu. Risk sensitive portfolio management with cox-ingersoll-ross interest rates: the hjb equation. *SIAM J. Cont. Optim.*, 44:1811–1843, 2005.
- [14] M. Lefebvre and P. Montulet. Risk sensitive optimal investment policy. *Int. J. Systems Sci.*, 22:183–192, 1994.
- [15] W.H. Fleming. Optimal investment models and risk sensitive stochastic control. *Math and Applic.*, IMA Volumes(65):75–88, 1995.
- [16] D.R. Carino. *Multiperiod Security Markets with Diversely Informed Agents*. Stanford University Ph.D. dissertation, 1987.
- [17] D. Rey. Current research topics — stock market predictability: Is it there? *Financial Markets and Portfolio Management*, 17:379–387, 2003.
- [18] Б. Оксендаль. *Введение в стохастические дифференциальные уравнения и приложения*. Мир, Москва, 2003.
- [19] А.Н. Ширяев. *Вероятность-1, 3-е издание, переработанное и дополненное*. МЦНМО, Москва, 2004.

- [20] S. Yau. Computation of fokker-planck equation. *Quart. Appl. Math.*, 62(4):643–650, 2004.
- [21] R. Cordero-Soto, R.M. Lopez, E. Suazo, and S.K. Suslov. Propagator of a charged particle with a spin in uniform magnetic and perpendicular electric fields. *Lett. Math. Phys.*, 84(2-3):159–178, 2008.
- [22] O. Vasicek. An equilibrium characterisation of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2):177–188, 1977.
- [23] J.C. Cox, J.E. Ingersoll, and S.A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53:385–407, 1985.
- [24] W.F. Sharpe, G.J. Alexander, and J.V. Bailey. *Investments*. Prentice Hall, 1995.
- [25] H.M. Markowitz. Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7(1):77–91, 1952.
- [26] I. Karatzas and SE. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, NY, 1988.
- [27] B. Bank, J. Guddat, D. Klatte, B. Kummer, and K. Tammer. *Non-Linear Parametric Optimization*. Birkhäuser-Verlag, Basel, 1983.
- [28] H. Risken. *The Fokker–Planck Equation. Methods of Solution and Applications*. Springer, NY, 1989.
- [29] A.J. Chorin and O.H. Hald. *Stochastic Tools in Mathematics and Science*. Springer, NY, 2006.
- [30] S. Albeverio and O. Rozanova. The non-viscous burgers equation associated with random positions in coordinate space: a threshold for blow up behavior. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 19(5):1–19, 2009.

- [31] S. Albeverio and O. Rozanova. Suppression of unbounded gradients in a sde associated with the burgers equation. *Amer. Math. Soc.*, 138(1):241–251, 2010.
- [32] D. Duffie, D. Filipović, and W. Schachermayer. Affine processes and applications in finance. *The Annals of Applied Probability*, 13(3):984–1053, 2003.
- [33] Q. Dai and K. Singleton. Specification analysis of affine term structure models. *J. Finance*, 55:1943–1978, 2000.
- [34] M. Grasselli and C. Tebaldi. Solvable affine term structure models. *Math. Finance*, 18:135–153, 2008.
- [35] A. Singleton. Estimation of affine asset pricing models using the empirical characteristic function. *J. Econometrics*, 102:111–141, 2001.
- [36] W. Feller. Two singular diffusion problems. *Annals of Mathematics*, 54:173–182, 1951.
- [37] S. L. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6(2):327–343, 1993.
- [38] M.A. Martynov and O.S. Rozanova. On dependence of the implied volatility on returns for stochastic volatility models. *E-print arXiv:1009.5129*, 2011.
- [39] H. Hata and J. Sekine. Solving long term optimal investment problems with cox-ingersoll-ross interest rates. *Advances in Mathematical Economics*, 8(1):231–255, 2006.
- [40] H. Hata. Down-side risk probability minimization problem with cox-ingersoll-ross’s interest rates. *Asia-Pacific Financial Markets*, 2011.
- [41] Г. Шилдт. *MFC: основы программирования*. BHV, 1997.

Приложение А

Приложение (формулы, используемые в тексте)

Приводимые ниже формулы вычислены при помощи программного пакета Maple.

$$\hat{P}(t, \mu, x) = \quad (\text{A.0.1})$$

$$\begin{aligned} &= 1/2 * \exp(-1/2 * (4 * I * \mu * \beta * \Sigma_2 * B * \alpha - 2 * I * \mu * \beta^3 * f_0 * \Sigma_2 + 4 * I * \mu * \beta^4 * f_0 * \exp(2 * \\ &\beta * t) * s^2 + 2 * I * \mu * \beta^3 * f_0 * \exp(2 * \beta * t) * \Sigma_2 + 4 * I * x * \mu * \beta^3 * \exp(\beta * t) * \Sigma_3 - 2 * \beta^4 * s^2 * \\ &\ln(-\beta) * \exp(2 * \beta * t) - 2 * \beta^4 * s^2 * \ln(2) * \exp(2 * \beta * t) + 2 * \beta^4 * s^2 * \ln(-\Sigma_2 + 2 * \exp(2 * \beta * \\ &t) * \beta * s^2 + \exp(2 * \beta * t) * \Sigma_2) * \exp(2 * \beta * t) - \beta^3 * \Sigma_2 * \ln(-\beta) * \exp(2 * \beta * t) + 4 * \beta^3 * B * x_0 * \\ &\exp(2 * \beta * t) - 4 * \beta^3 * B * x_0 * \exp(\beta * t) - \beta^3 * \Sigma_2 * \ln(2) * \exp(2 * \beta * t) + \beta^3 * \Sigma_2 * \ln(-\Sigma_2 + 2 * \\ &\exp(2 * \beta * t) * \beta * s^2 + \exp(2 * \beta * t) * \Sigma_2) * \exp(2 * \beta * t) - 4 * \beta^4 * s^2 * \exp(2 * \beta * t) * \ln(s) - 2 * \\ &\beta^3 * \Sigma_2 * \exp(2 * \beta * t) * \ln(s) + \beta^3 * \Sigma_2 * \pi * I - 4 * x * \beta^4 * \exp(\beta * t) * x_0 - 4 * x * \beta^3 * \exp(\beta * t) * \\ &B + 4 * \mu^2 * \beta^2 * \Sigma_3^2 * \exp(2 * \beta * t) - 8 * \mu^2 * \beta^2 * \Sigma_3^2 * \exp(\beta * t) + 4 * \mu^2 * \alpha^2 * \Sigma_2^2 * \exp(2 * \beta * t) - \\ &8 * \mu^2 * \Sigma_2^2 * \alpha^2 * \exp(\beta * t) + 2 * \beta^4 * x^2 + 2 * \beta^2 * B^2 + 8 * \mu^2 * \Sigma_3 * \alpha * \beta^3 * t * s^2 * \exp(2 * \beta * t) + 8 * \\ &\mu^2 * \beta^2 * s^2 * \Sigma_3 * \alpha * \exp(\beta * t) - 8 * \mu^2 * \beta^2 * s^2 * \alpha * \Sigma_3 * \exp(2 * \beta * t) - 4 * \mu^2 * \beta^2 * s^2 * \Sigma_2 * \alpha^2 * t * \\ &\exp(2 * \beta * t) + 4 * \mu^2 * \beta^2 * \Sigma_3 * \alpha * t * \exp(2 * \beta * t) * \Sigma_2 + 6 * \mu^2 * \beta * s^2 * \alpha^2 * \Sigma_2 * \exp(2 * \beta * t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4*x*\beta^3*B+4*\mu^2*\Sigma_3^2*\beta^2+4*\mu^2*\alpha^2*\Sigma_2^2+\beta^3*\Sigma_2*\ln(-\beta)+\beta^3*\Sigma_2*\ln(2)-4*\beta^2*B^2* \\
& \exp(\beta*t)+2*\beta^2*B^2*\exp(2*\beta*t)-\beta^3*\Sigma_2*\ln(-\Sigma_2+2*\exp(2*\beta*t))*\beta*s^2+\exp(2*\beta* \\
& t)*\Sigma_2)+2*\beta^3*\Sigma_2*\ln(s)+2*\beta^4*x_0^2*\exp(2*\beta*t)-8*\mu^2*\beta*\Sigma_2*\alpha^2*s^2*\exp(\beta*t)-8* \\
& \mu^2*\beta*\alpha*\Sigma_2*\Sigma_3*\exp(2*\beta*t)-2*\mu^2*\beta*\alpha^2*\Sigma_2^2*t*\exp(2*\beta*t)+16*\mu^2*\beta*\Sigma_2*\alpha*\Sigma_3* \\
& \exp(\beta*t)+2*\mu^2*\Sigma_1*t*\beta^4*\exp(2*\beta*t)*s^2+\mu^2*\Sigma_1*t*\beta^3*\exp(2*\beta*t)*\Sigma_2-4*I*x*\mu* \\
& \beta^3*\exp(\beta*t)*\alpha*s^2-4*I*x*\mu*\beta^2*\exp(\beta*t)*\alpha*\Sigma_2+4*I*x*\mu*\beta^3*\alpha*\exp(2*\beta*t)*s^2+ \\
& 2*I*x*\mu*\beta^2*\alpha*\exp(2*\beta*t)*\Sigma_2-4*I*x*\mu*\beta^3*\Sigma_3+2*I*x*\mu*\beta^2*\alpha*\Sigma_2-2*I*\beta^4* \\
& s^2*\exp(2*\beta*t)*\pi-I*\beta^3*\Sigma_2*\exp(2*\beta*t)*\pi-4*I*\mu*\beta^2*B*\Sigma_3+4*I*\mu*\beta^2*s^2*B* \\
& \alpha*\exp(2*\beta*t)-4*I*\mu*\beta^2*B*\Sigma_3*\exp(2*\beta*t)+2*I*\mu*\beta^2*\Sigma_2*x_0*\alpha*\exp(2*\beta*t)+ \\
& 2*I*\mu*\beta^2*\Sigma_2*x_0*\alpha-2*I*\mu*\beta^2*B*\alpha*t*\exp(2*\beta*t)*\Sigma_2+2*I*\mu*\beta^2*B*\alpha*t*\Sigma_2- \\
& 4*I*\mu*\beta^2*\Sigma_2*x_0*\alpha*\exp(\beta*t)+4*I*\mu*\beta^4*s^2*A*t*\exp(2*\beta*t)-4*I*\mu*\beta^3*B*s^2* \\
& \alpha*t*\exp(2*\beta*t)+4*I*\mu*\beta^3*\Sigma_3*x_0*\exp(\beta*t)-2*I*\mu*\beta^3*A*t*\Sigma_2+2*I*\mu*\beta^3*A* \\
& t*\exp(2*\beta*t)*\Sigma_2-4*I*\mu*\beta^3*\Sigma_3*x_0*\exp(2*\beta*t)-4*I*\mu*\beta^2*B*\alpha*\exp(\beta*t)*s^2+ \\
& 8*I*\mu*\beta^2*\Sigma_3*B*\exp(\beta*t)-8*I*\mu*\beta*\Sigma_2*B*\alpha*\exp(\beta*t)+4*I*\mu*\beta*B*\alpha*\exp(2* \\
& \beta*t)*\Sigma_2-4*\mu^2*\beta^2*\alpha*\Sigma_3*t*\Sigma_2+2*\mu^2*\alpha^2*\beta*s^2*\Sigma_2-8*\mu^2*\alpha*\Sigma_2*\Sigma_3*\beta+2*\mu^2*\beta* \\
& \alpha^2*\Sigma_2^2*t-\mu^2*\Sigma_1*t*\beta^3*\Sigma_2)/\beta^3/(-\Sigma_2+2*\exp(2*\beta*t))*\beta*s^2+\exp(2*\beta*t)*\Sigma_2))/\pi/s
\end{aligned}$$

$$P(t, f, x) = \tag{A.0.2}$$

$$\begin{aligned}
& = -\exp(-1/2*(8*\exp(4*\beta*t)*B*s^4*\alpha*t^2*\beta^5*A+8*\exp(4*\beta*t)*B*s^4*\alpha*t*\beta^5*f_0+ \\
& 8*\exp(4*\beta*t)*\Sigma_3*x_0*\beta^4*x*\alpha*s^2+8*\exp(4*\beta*t)*\beta^6*f_0*s^4*f-4*\exp(2*\beta*t)*x^2* \\
& \alpha^2*s^4*\beta^4+24*\exp(4*\beta*t)*B^2*\alpha*\Sigma_2*\Sigma_3*\beta-4*\exp(4*\beta*t)*x*\alpha^2*s^2*\beta^3*\Sigma_2*x_0+32* \\
& \exp(\beta*t)*x_0*B*\beta*\alpha^2*\Sigma_2^2-4*\exp(\beta*t)*x_0*B*\beta^4*\Sigma_1*t*\Sigma_2+4*\exp(4*\beta*t)*\Sigma_3*x_0* \\
& \beta^3*x*\alpha*\Sigma_2+8*\exp(3*\beta*t)*x*B*\beta^5*\Sigma_1*t*s^2-8*\exp(3*\beta*t)*f_0*\Sigma_2*\beta^3*B*\Sigma_3-4* \\
& \Sigma_2*x_0*\alpha*\beta^4*\exp(2*\beta*t)*s^2*A*t-44*\exp(2*\beta*t)*x*x_0*\beta^3*\alpha^2*s^2*\Sigma_2+16*\exp(3*\beta*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& t) * B * \Sigma_3 * \beta^4 * f * s^2 - 52 * \exp(2 * \beta * t) * x_0 * B * \beta^2 * \alpha^2 * s^2 * \Sigma_2 - 4 * f_0 * \Sigma_2^2 * \beta^3 * \exp(2 * \beta * t) * \\
& B * \alpha * t - 8 * x * \Sigma_3 * \beta^5 * f * \exp(2 * \beta * t) * s^2 - 2 * \exp(4 * \beta * t) * A * t * \Sigma_2^2 * \beta^3 * x_0 * \alpha + 8 * \exp(3 * \\
& \beta * t) * x * \Sigma_3 * \beta^5 * f * s^2 - 4 * \exp(\beta * t) * \Sigma_3 * x_0^2 * \beta^3 * \Sigma_2 * \alpha + 72 * x * B * \beta^3 * \exp(\beta * t) * \Sigma_3^2 + 8 * \\
& \exp(4 * \beta * t) * \Sigma_3 * x_0 * \beta^5 * s^2 * A * t + 2 * A * t^2 * \Sigma_2^2 * \beta^3 * B * \alpha + 2 * A * t * \Sigma_2^2 * \beta^4 * f - 8 * A * t^2 * \Sigma_2 * \\
& \beta^4 * \exp(2 * \beta * t) * B * s^2 * \alpha - 8 * f_0 * \Sigma_2^2 * \beta^2 * \exp(\beta * t) * B * \alpha - 4 * f_0 * \Sigma_2 * \beta^4 * \exp(\beta * t) * x * \alpha * \\
& s^2 + 4 * \exp(2 * \beta * t) * \Sigma_3 * x_0 * \beta^4 * f * \Sigma_2 + 60 * \exp(3 * \beta * t) * x * B * \beta^2 * \alpha^2 * s^2 * \Sigma_2 - 8 * \exp(3 * \\
& \beta * t) * A * t * \Sigma_2 * \beta^3 * B * \Sigma_3 - 72 * \exp(2 * \beta * t) * x_0 * B * \beta * \alpha^2 * \Sigma_2^2 + 2 * x^2 * \beta^5 * \Sigma_1 * t * \Sigma_2 + 8 * \\
& x^2 * \beta^4 * \alpha * \Sigma_3 * t * \Sigma_2 - 4 * x^2 * \beta^3 * \alpha^2 * \Sigma_2^2 * t - 40 * \exp(4 * \beta * t) * x_0 * B * \beta^4 * \Sigma_3 * \alpha * t * s^2 - 72 * \\
& x * B * \beta * \exp(2 * \beta * t) * \alpha^2 * \Sigma_2^2 - 2 * x^2 * \beta^5 * \exp(2 * \beta * t) * \Sigma_1 * t * \Sigma_2 + 2 * f^2 * \beta^4 * \exp(2 * \beta * t) * \\
& \Sigma_2^2 - 8 * \exp(4 * \beta * t) * f_0 * \Sigma_2 * \beta^4 * x * \alpha * s^2 - 4 * f^2 * \beta^6 * \exp(4 * \beta * t) * s^4 - 4 * \exp(4 * \beta * t) * \beta^4 * \\
& f_0 * s^2 * \Sigma_2 * x_0 * \alpha + 32 * x^2 * \beta^4 * \exp(2 * \beta * t) * s^2 * \alpha * \Sigma_3 + 8 * \exp(3 * \beta * t) * x * x_0 * \beta^6 * \Sigma_1 * t * \\
& s^2 - 12 * \exp(4 * \beta * t) * B^2 * \alpha^2 * \Sigma_2^2 + 4 * \Sigma_2 * x_0 * \alpha * \beta^4 * f * \exp(2 * \beta * t) * s^2 - 12 * \exp(4 * \beta * t) * \\
& \Sigma_2 * B * \alpha * \beta^3 * f_0 * s^2 + 20 * \exp(3 * \beta * t) * A * t * \Sigma_2 * \beta^3 * s^2 * B * \alpha + 64 * x * B * \beta * \exp(\beta * t) * \alpha^2 * \\
& \Sigma_2^2 - 16 * \exp(4 * \beta * t) * \beta^5 * x_0^2 * \Sigma_3 * \alpha * t * s^2 - 44 * x^2 * \beta^3 * \exp(\beta * t) * \alpha * \Sigma_2 * \Sigma_3 + 20 * x^2 * \beta^3 * \\
& \exp(\beta * t) * \alpha^2 * s^2 * \Sigma_2 - 24 * x^2 * \beta^4 * \exp(\beta * t) * s^2 * \alpha * \Sigma_3 - 72 * x * B * \beta^3 * \exp(2 * \beta * t) * \Sigma_3^2 - \\
& 2 * \exp(4 * \beta * t) * A * t * \Sigma_2^2 * \beta^3 * x * \alpha + 8 * \exp(4 * \beta * t) * \beta^4 * s^2 * A * t * B * \Sigma_3 - 4 * \Sigma_2 * x_0 * \alpha * \beta^4 * \\
& \exp(2 * \beta * t) * f_0 * s^2 - \exp(4 * \beta * t) * B^2 * \alpha^2 * t^2 * \Sigma_2^2 * \beta^2 - 8 * \exp(3 * \beta * t) * x * \alpha^2 * s^4 * \beta^4 * B * \\
& t + 72 * B^2 * \exp(2 * \beta * t) * s^2 * \alpha * \Sigma_3 * \beta^2 + 8 * \exp(3 * \beta * t) * \Sigma_2^2 * B * \alpha * f_0 * \beta^2 + 4 * \exp(4 * \beta * t) * \\
& \Sigma_2 * x_0 * \alpha * \beta^4 * f * s^2 - 4 * \exp(4 * \beta * t) * \Sigma_2^2 * B * \alpha * f_0 * \beta^2 + 88 * \exp(2 * \beta * t) * x * x_0 * \beta^3 * \alpha * \Sigma_2 * \\
& \Sigma_3 - 24 * x * B * \beta^3 * \Sigma_3^2 - 72 * B^2 * \exp(2 * \beta * t) * \alpha^2 * s^2 * \Sigma_2 * \beta - 8 * \exp(4 * \beta * t) * s^4 * B * \alpha^2 * \beta^3 * \\
& x + 12 * f * \beta^3 * \exp(4 * \beta * t) * \Sigma_2 * s^2 * B * \alpha - 4 * x^2 * \beta^3 * \alpha^2 * s^2 * \Sigma_2 + 20 * x^2 * \beta^3 * \alpha * \Sigma_2 * \Sigma_3 + \\
& 8 * A * t * \Sigma_2 * \beta^3 * \exp(\beta * t) * B * \Sigma_3 + 8 * x * B * \beta^2 * \exp(2 * \beta * t) * \alpha^2 * \Sigma_2^2 * t + 4 * f * \beta^4 * \exp(3 * \\
& \beta * t) * \Sigma_2 * x * \Sigma_3 + 8 * \exp(3 * \beta * t) * x * \alpha * s^4 * \beta^5 * f_0 + 8 * \exp(2 * \beta * t) * \beta^4 * x_0^2 * \alpha * \Sigma_3 * t * \Sigma_2 - \\
& 12 * B^2 * \alpha^2 * \Sigma_2^2 + 8 * \exp(4 * \beta * t) * B^2 * \alpha^2 * \Sigma_2^2 * t * \beta - 28 * \exp(3 * \beta * t) * x * B * \beta^3 * s^2 * \Sigma_2 * \alpha^2 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& t-4*x*B*\beta^4*exp(2*\beta*t)*\Sigma_1*t*\Sigma_2-12*exp(3*\beta*t)*x_0*B*\beta^2*\alpha^2*\Sigma_2^2*t+2*f*\beta^3* \\
& exp(4*\beta*t)*\Sigma_2^2*x*\alpha-f_0^2*\Sigma_2^2*\beta^4-8*exp(4*\beta*t)*\Sigma_3*x_0*\beta^5*f*s^2-8*A*t*\Sigma_2*\beta^5*f* \\
& exp(2*\beta*t)*s^2+8*exp(3*\beta*t)*\Sigma_2*x_0*\alpha*\beta^4*s^2*A*t+40*exp(2*\beta*t)*x*x_0*\beta^4*s^2* \\
& \alpha*\Sigma_3-2*exp(4*\beta*t)*f_0*\Sigma_2^2*\beta^3*x*\alpha-16*exp(3*\beta*t)*\beta^4*f_0*s^2*B*\Sigma_3+2*exp(2*\beta* \\
& t)*B^2*\alpha^2*t^2*\Sigma_2^2*\beta^2-4*\Sigma_2*B*\alpha*exp(2*\beta*t)*\beta^3*s^2*A*t+24*exp(4*\beta*t)*B^2*s^2*\alpha* \\
& \Sigma_3*\beta^2+24*exp(3*\beta*t)*x*x_0*\beta^2*\alpha^2*\Sigma_2^2+4*f_0*\Sigma_2*\beta^4*exp(\beta*t)*\Sigma_3*x_0+8*exp(4* \\
& \beta*t)*\beta^4*f_0*s^2*B*\Sigma_3-72*B^2*exp(2*\beta*t)*\Sigma_3^2*\beta^2-8*f*\beta^4*exp(4*\beta*t)*\Sigma_2*B*s^2* \\
& \alpha*t+32*exp(3*\beta*t)*x*B*\beta*\alpha^2*\Sigma_2^2+48*exp(3*\beta*t)*B^2*\Sigma_3*\alpha*t*s^2*\beta^3+2*exp(4* \\
& \beta*t)*B*\alpha*t*\Sigma_2^2*\beta^3*f_0+2*f_0^2*\Sigma_2^2*\beta^4*exp(2*\beta*t)-12*exp(2*\beta*t)*\beta^4*x_0^2*\Sigma_3^2-f^2* \\
& \beta^4*exp(4*\beta*t)*\Sigma_2^2-12*exp(4*\beta*t)*\beta^4*x_0^2*\Sigma_3^2+2*f*\beta^3*exp(4*\beta*t)*\Sigma_2^2*x_0*\alpha-4* \\
& exp(2*\beta*t)*\beta^3*x_0^2*\alpha^2*\Sigma_2^2*t+36*exp(3*\beta*t)*x*x_0*\beta^3*\alpha^2*s^2*\Sigma_2-56*exp(3*\beta*t)* \\
& x*B*\beta^2*\alpha*\Sigma_2*\Sigma_3+4*A^2*t^2*\Sigma_2*\beta^5*exp(2*\beta*t)*s^2-4*exp(3*\beta*t)*\Sigma_3*x_0*\beta^4*A*t* \\
& \Sigma_2-24*x^2*\beta^3*exp(2*\beta*t)*\alpha^2*s^2*\Sigma_2+8*exp(4*\beta*t)*x*\alpha*s^2*\beta^3*B*\Sigma_3+4*exp(4* \\
& \beta*t)*\Sigma_3*x_0*\beta^4*A*t*\Sigma_2-2*x*\alpha*\Sigma_2^2*\beta^3*f+28*x^2*\beta^3*exp(2*\beta*t)*\alpha*\Sigma_2*\Sigma_3-8* \\
& exp(2*\beta*t)*x_0*B*\beta^2*\alpha^2*\Sigma_2^2*t+8*exp(3*\beta*t)*\beta^4*s^4*A*t*B*\alpha+8*exp(3*\beta*t)*x_0* \\
& B*\beta^5*\Sigma_1*t*s^2-24*exp(4*\beta*t)*B^2*\Sigma_3*\alpha*t*s^2*\beta^3+16*x*B*\beta^3*exp(2*\beta*t)*s^2*\Sigma_2* \\
& \alpha^2*t-72*exp(2*\beta*t)*x_0*B*\beta^3*\Sigma_3^2-4*A*t*\Sigma_2*\beta^3*exp(\beta*t)*s^2*B*\alpha-4*exp(4*\beta* \\
& t)*\beta^6*s^4*A^2*t^2+4*A*t*\Sigma_2*\beta^4*exp(\beta*t)*\Sigma_3*x_0-8*exp(4*\beta*t)*s^4*B*\alpha*\beta^4*f_0- \\
& 4*exp(\beta*t)*x*\Sigma_3*\beta^4*f*\Sigma_2+8*exp(\beta*t)*\Sigma_2^2*B*\alpha*f*\beta^2+2*B^2*\Sigma_1*t*\Sigma_2*\beta^3+12* \\
& B^2*\alpha*\Sigma_3*t*\Sigma_2*\beta^2-8*B^2*\alpha^2*\Sigma_2^2*t*\beta-8*exp(3*\beta*t)*\Sigma_3*x_0*\beta^5*f_0*s^2+8*exp(4* \\
& \beta*t)*B*\alpha^2*t*\Sigma_2*\beta^3*x*s^2+8*exp(3*\beta*t)*\beta^4*f_0*s^4*B*\alpha-4*B^2*\alpha^2*s^2*\Sigma_2*\beta+24* \\
& B^2*\alpha*\Sigma_2*\Sigma_3*\beta+8*x^2*\beta^4*exp(2*\beta*t)*s^2*\Sigma_2*\alpha^2*t-28*exp(4*\beta*t)*x_0*B*\beta^2*\alpha^2* \\
& s^2*\Sigma_2+4*exp(3*\beta*t)*B^2*\Sigma_1*t*\Sigma_2*\beta^3+20*exp(3*\beta*t)*\beta^2*x_0^2*\alpha^2*\Sigma_2^2+4*\Sigma_2^2*B*\alpha* \\
& A*t*\beta^2-4*exp(2*\beta*t)*\beta^3*x_0^2*\alpha^2*s^2*\Sigma_2+4*\Sigma_2^2*B*\alpha*f_0*\beta^2-4*\Sigma_2^2*B*\alpha^2*x_0*\beta+4*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \exp(3\beta t) * x * \alpha * \Sigma_2^2 * \beta^3 * f_0 - 4 * x^2 * \beta^6 * \exp(2\beta t) * \Sigma_1 * t * s^2 - 4 * f_0 * \Sigma_2^2 * \beta^3 * \exp(\beta t) * \\
& x_0 * \alpha + 8 * \exp(3\beta t) * s^4 * B^2 * \alpha^2 * \beta^2 - 4 * A * t * \Sigma_2 * \beta^4 * \exp(2\beta t) * \Sigma_3 * x_0 + 4 * \exp(2\beta t) * \\
& t * x_0 * B * \beta^4 * \Sigma_1 * t * \Sigma_2 + 24 * \exp(\beta t) * x_0 * B * \beta^3 * \Sigma_3^2 + 8 * B * \Sigma_3 * \beta^4 * \exp(2\beta t) * f_0 * s^2 - \\
& 8 * \exp(4\beta t) * x_0 * B * \beta^5 * \Sigma_1 * t * s^2 - 16 * \exp(3\beta t) * B^2 * \alpha^2 * \Sigma_2^2 * t * \beta - 14 * \exp(2\beta t) * \\
& \beta^2 * x_0^2 * \alpha^2 * \Sigma_2^2 - 8 * x * B * \beta^5 * \exp(2\beta t) * \Sigma_1 * t * s^2 + 4 * \Sigma_2 * B * \alpha * f * \beta^3 * \exp(2\beta t) * s^2 + \\
& 4 * B * \Sigma_3 * \beta^2 * \Sigma_2 * x_0 * \alpha - 48 * \exp(3\beta t) * x * x_0 * \beta^4 * s^2 * \alpha * \Sigma_3 - 4 * B * \Sigma_3 * \beta^3 * f_0 * \Sigma_2 - 4 * \\
& B * \Sigma_3 * \beta^3 * A * t * \Sigma_2 - 4 * x * \Sigma_3 * \beta^4 * f_0 * \Sigma_2 - 4 * f * \beta^3 * \exp(4\beta t) * \Sigma_2 * B * \Sigma_3 + 4 * \exp(4\beta t) * \\
& \beta t) * f_0 * \Sigma_2 * \beta^3 * B * \Sigma_3 - 12 * \exp(4\beta t) * \Sigma_2 * B * \alpha * \beta^3 * s^2 * A * t - 8 * \exp(4\beta t) * B * \Sigma_3 * \\
& \beta^4 * f * s^2 - B^2 * \alpha^2 * t^2 * \Sigma_2^2 * \beta^2 - 2 * B * \alpha * t * \Sigma_2^2 * \beta^3 * f + 16 * \exp(3\beta t) * \beta^3 * x_0^2 * \alpha^2 * s^2 * \Sigma_2 - \\
& 4 * f * \beta^3 * \exp(3\beta t) * \Sigma_2^2 * x_0 * \alpha + 8 * f * \beta^3 * \exp(3\beta t) * \Sigma_2 * B * \Sigma_3 + 4 * x * \Sigma_3 * \beta^4 * \exp(2\beta t) * \\
& \beta t) * f_0 * \Sigma_2 - 4 * x * \Sigma_3 * \beta^4 * A * t * \Sigma_2 + 4 * x * \Sigma_3 * \beta^3 * \Sigma_2 * x_0 * \alpha + 4 * A * t * \Sigma_2 * \beta^4 * \exp(\beta t) * \\
& x * \Sigma_3 - A^2 * t^2 * \Sigma_2^2 * \beta^4 - \Sigma_2^2 * x_0^2 * \alpha^2 * \beta^2 + 144 * x * B * \beta^2 * \exp(2\beta t) * \alpha * \Sigma_2 * \Sigma_3 - 136 * x * \\
& B * \beta^2 * \exp(\beta t) * \alpha * \Sigma_2 * \Sigma_3 - 72 * B^2 * \exp(2\beta t) * \alpha^2 * \Sigma_2^2 - 4 * \exp(\beta t) * x * B * \beta^4 * \Sigma_1 * \\
& t * \Sigma_2 + 12 * \exp(\beta t) * x * B * \beta^2 * \alpha^2 * \Sigma_2^2 * t + 2 * f_0 * \Sigma_2^2 * \beta^3 * x_0 * \alpha - 4 * \exp(4\beta t) * B^2 * s^4 * \\
& \alpha^2 * t^2 * \beta^4 + 4 * \exp(4\beta t) * x * \alpha * \Sigma_2 * \beta^2 * B * \Sigma_3 + 20 * \exp(3\beta t) * \Sigma_2 * B * \alpha * \beta^3 * f_0 * s^2 - \\
& 2 * f_0 * \Sigma_2^2 * \beta^4 * A * t + 8 * x * \Sigma_3 * \beta^5 * \exp(2\beta t) * s^2 * A * t - 20 * x * B * \beta * \alpha^2 * \Sigma_2^2 + 48 * \exp(3\beta t) * \\
& \beta t) * B^2 * \alpha^2 * \Sigma_2^2 + 24 * \exp(3\beta t) * \beta^4 * x_0^2 * \Sigma_3^2 + 28 * \exp(2\beta t) * \beta^3 * x_0^2 * \alpha * \Sigma_2 * \Sigma_3 - 44 * \\
& \exp(2\beta t) * x * x_0 * \beta^2 * \alpha^2 * \Sigma_2^2 + 44 * \exp(4\beta t) * x_0 * B * \beta^2 * \alpha * \Sigma_2 * \Sigma_3 + 8 * \exp(4\beta t) * \\
& B * s^2 * \alpha * t^2 * \beta^4 * A * \Sigma_2 + 4 * x^2 * \beta^3 * \exp(2\beta t) * \alpha^2 * \Sigma_2^2 * t + 4 * \exp(3\beta t) * A * t * \Sigma_2^2 * \beta^3 * \\
& x_0 * \alpha - 12 * \exp(4\beta t) * B^2 * \Sigma_3^2 * \beta^2 - 8 * \exp(3\beta t) * B^2 * s^4 * \alpha^2 * t * \beta^3 - 4 * f * \beta^4 * \exp(4\beta t) * \\
& \beta t) * \Sigma_2 * \Sigma_3 * x_0 - 24 * \exp(4\beta t) * x_0 * B * \beta^3 * \Sigma_3^2 + 12 * \exp(3\beta t) * x^2 * \alpha^2 * s^2 * \beta^3 * \Sigma_2 + \\
& 2 * f * \beta^4 * \exp(4\beta t) * \Sigma_2^2 * f_0 + 2 * A * t * \Sigma_2^2 * \beta^3 * x_0 * \alpha - 8 * \exp(3\beta t) * x * x_0 * \beta^3 * \alpha^2 * \Sigma_2^2 * \\
& t - 4 * f_0 * \Sigma_2^2 * \beta^3 * \exp(\beta t) * x * \alpha + 4 * \Sigma_2 * x_0 * \alpha^2 * \beta^3 * \exp(2\beta t) * B * s^2 * t - \exp(4\beta t) * \\
& A^2 * t^2 * \Sigma_2^2 * \beta^4 + 52 * x * B * \beta^2 * \exp(\beta t) * \alpha^2 * s^2 * \Sigma_2 + 8 * \exp(4\beta t) * B^2 * s^4 * \alpha^2 * t * \beta^3 - 4 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \exp(3*\beta*t)*x*\Sigma_3*\beta^4*f_0*\Sigma_2-8*\exp(3*\beta*t)*x*\Sigma_3*\beta^5*s^2*A*t-48*x*B*\beta^3*\exp(\beta*t) \\
& *s^2*\alpha*\Sigma_3+8*\exp(4*\beta*t)*\beta^4*x_0^2*s^2*\Sigma_2*\alpha^2*t+8*\exp(3*\beta*t)*B^2*\beta^4*\Sigma_1*t*s^2-4* \\
& \exp(\beta*t)*B^2*\Sigma_1*t*\Sigma_2*\beta^3-\exp(4*\beta*t)*x^2*\alpha^2*\Sigma_2^2*\beta^2+20*\exp(4*\beta*t)*\beta^3*x_0^2*\alpha* \\
& \Sigma_2*\Sigma_3+8*\exp(4*\beta*t)*B*\alpha*t*\Sigma_2*\beta^4*f_0*s^2+4*\exp(\beta*t)*\Sigma_2^2*x_0*\alpha*\beta^3*f+8*\exp(3* \\
& \beta*t)*x*\alpha*s^4*\beta^5*A*t-2*\exp(4*\beta*t)*\beta^5*x_0^2*\Sigma_1*t*\Sigma_2+72*\exp(3*\beta*t)*x_0*B*\beta^3* \\
& \Sigma_3^2-2*\exp(4*\beta*t)*B^2*\Sigma_1*t*\Sigma_2*\beta^3+16*\exp(3*\beta*t)*x*\alpha^2*s^4*\beta^3*B+4*\Sigma_2^2*x_0^2*\alpha^2* \\
& \beta^2*\exp(\beta*t)+20*\exp(4*\beta*t)*B^2*s^2*\Sigma_2*\alpha^2*t*\beta^2+8*B*\Sigma_3*\beta^4*\exp(2*\beta*t)*s^2*A* \\
& t+4*\exp(4*\beta*t)*\Sigma_3*x_0*\beta^4*f_0*\Sigma_2-12*\exp(4*\beta*t)*B^2*\alpha*\Sigma_3*t*\Sigma_2*\beta^2-4*f_0*\Sigma_2* \\
& \beta^3*\exp(\beta*t)*s^2*B*\alpha-2*\Sigma_2^2*x_0*\alpha*\beta^3*f-2*\Sigma_2^2*x_0*\alpha^2*\beta^2*x-2*\Sigma_2^2*x_0*\alpha^2*\beta^2*B* \\
& t-12*f*\beta^4*\exp(3*\beta*t)*\Sigma_2*x*\alpha*s^2-20*\exp(4*\beta*t)*x_0*B*\beta*\alpha^2*\Sigma_2^2-f^2*\beta^4*\Sigma_2^2- \\
& 4*\exp(\beta*t)*\Sigma_3*x_0*\beta^4*f*\Sigma_2+4*x*B*\beta^4*\Sigma_1*t*\Sigma_2+20*x*B*\beta^3*\alpha*\Sigma_3*t*\Sigma_2-12* \\
& \exp(3*\beta*t)*x*B*\beta^2*\alpha^2*\Sigma_2^2*t-10*x*B*\beta^2*\alpha^2*\Sigma_2^2*t-8*x*B*\beta^2*\alpha^2*s^2*\Sigma_2-136* \\
& \exp(3*\beta*t)*x_0*B*\beta^2*\alpha*\Sigma_2*\Sigma_3-4*f*\beta^4*\exp(2*\beta*t)*\Sigma_2^2*f_0+4*f_0^2*\Sigma_2*\beta^5*\exp(2* \\
& \beta*t)*s^2+4*\exp(3*\beta*t)*A*t*\Sigma_2^2*\beta^3*x*\alpha-20*\exp(\beta*t)*x*B*\beta^3*\alpha*\Sigma_3*t*\Sigma_2+4* \\
& \exp(\beta*t)*x*\alpha^2*s^2*\beta^3*B*t*\Sigma_2+4*\exp(3*\beta*t)*\Sigma_2^2*x_0*\alpha*\beta^3*f_0+44*x*B*\beta^2*\alpha*\Sigma_2* \\
& \Sigma_3-4*\exp(4*\beta*t)*\Sigma_2^2*B*\alpha^2*x*\beta-4*\exp(4*\beta*t)*\beta^6*x_0^2*\Sigma_1*t*s^2-\exp(4*\beta*t)*f_0^2* \\
& \Sigma_2^2*\beta^4-20*x*B*\beta^3*\exp(2*\beta*t)*\alpha*\Sigma_3*t*\Sigma_2+104*x*B*\beta^3*\exp(2*\beta*t)*s^2*\alpha*\Sigma_3+ \\
& 8*\exp(4*\beta*t)*B*s^4*\alpha^2*t*\beta^4*x-4*A*t^2*\Sigma_2^2*\beta^3*\exp(2*\beta*t)*B*\alpha-4*\exp(4*\beta*t)* \\
& x^2*\alpha^2*s^4*\beta^4+12*\exp(\beta*t)*x*x_0*\beta^3*\alpha^2*s^2*\Sigma_2-2*\exp(4*\beta*t)*f_0*\Sigma_2^2*\beta^3*x_0*\alpha-4* \\
& \Sigma_2*B*\alpha*\exp(2*\beta*t)*\beta^3*f_0*s^2+2*\exp(2*\beta*t)*\beta^5*x_0^2*\Sigma_1*t*\Sigma_2-4*f^2*\beta^5*\exp(4*\beta* \\
& t)*\Sigma_2*s^2-96*\exp(3*\beta*t)*B^2*\alpha*\Sigma_2*\Sigma_3*\beta+24*x^2*\beta^4*\exp(\beta*t)*\Sigma_3^2+48*B^2*\exp(\beta*t) \\
& *\Sigma_3^2*\beta^2+48*B^2*\exp(\beta*t)*\alpha^2*\Sigma_2^2+4*\exp(2*\beta*t)*B^2*s^2*\alpha^2*t^2*\beta^3*\Sigma_2-4*\exp(\beta*t) \\
& *x*\alpha*s^2*\beta^4*A*t*\Sigma_2-48*\exp(\beta*t)*x*x_0*\beta^3*\alpha*\Sigma_2*\Sigma_3-4*\exp(3*\beta*t)*\Sigma_3*x_0*\beta^4* \\
& f_0*\Sigma_2-20*f*\beta^3*\exp(3*\beta*t)*\Sigma_2*s^2*B*\alpha-12*\exp(4*\beta*t)*\Sigma_2*B*\alpha^2*x*s^2*\beta^2+8*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \exp(3\beta t) * A * t * \Sigma_2^2 * \beta^2 * B * \alpha + 64 * \exp(3\beta t) * B^2 * \alpha^2 * s^2 * \Sigma_2 * \beta - 4 * \exp(4\beta t) * B^2 * \\
& \beta^4 * \Sigma_1 * t * s^2 + 24 * \exp(3\beta t) * B^2 * \alpha * \Sigma_3 * t * \Sigma_2 * \beta^2 + 24 * \exp(\beta t) * x * x_0 * \beta^2 * \alpha^2 * \Sigma_2^2 + \\
& 48 * \exp(3\beta t) * B^2 * \Sigma_3^2 * \beta^2 + 8 * \exp(4\beta t) * x * \alpha * s^4 * \beta^5 * f + 40 * \exp(2\beta t) * x_0 * B * \beta^3 * \\
& s^2 * \alpha * \Sigma_3 - 64 * \exp(3\beta t) * x * B * \beta^3 * s^2 * \alpha * \Sigma_3 - 16 * \exp(3\beta t) * \beta^4 * x_0^2 * s^2 * \alpha * \Sigma_3 - 8 * \\
& \exp(3\beta t) * \Sigma_2 * x_0 * \alpha * \beta^4 * f * s^2 - 96 * B^2 * \exp(\beta t) * \alpha * \Sigma_2 * \Sigma_3 * \beta + 32 * B^2 * \exp(\beta t) * \\
& \alpha^2 * s^2 * \Sigma_2 * \beta - 4 * f * \beta^4 * \exp(2\beta t) * \Sigma_2 * x * \Sigma_3 + 4 * \exp(3\beta t) * x^2 * \alpha^2 * \Sigma_2^2 * \beta^2 - 8 * \exp(3\beta t) * \\
& \beta^4 * B * \alpha * \beta^4 * f + 12 * \exp(3\beta t) * x * \alpha * s^2 * \beta^4 * A * t * \Sigma_2 - 4 * \exp(4\beta t) * B^2 * \alpha^2 * \\
& t^2 * \Sigma_2 * \beta^3 * s^2 - 4 * \exp(3\beta t) * x * \Sigma_3 * \beta^4 * A * t * \Sigma_2 - 8 * \exp(2\beta t) * x * \alpha^2 * s^4 * \beta^3 * B + 8 * \\
& \exp(3\beta t) * \Sigma_2 * x_0 * \alpha * \beta^4 * f_0 * s^2 - 4 * \exp(4\beta t) * x_0 * B * \beta^4 * \Sigma_1 * t * \Sigma_2 + 4 * \exp(\beta t) * x * \\
& \alpha * s^2 * \beta^4 * f * \Sigma_2 + 4 * \exp(\beta t) * x * \alpha * \Sigma_2^2 * \beta^3 * f + 8 * f_0 * \Sigma_2 * \beta^3 * \exp(\beta t) * B * \Sigma_3 + 8 * \exp(4\beta t) * \\
& \Sigma_3 * x_0 * \beta^5 * f_0 * s^2 + 4 * \exp(4\beta t) * A * t * \Sigma_2 * \beta^3 * B * \Sigma_3 - 24 * B^2 * \exp(\beta t) * s^2 * \alpha * \\
& \Sigma_3 * \beta^2 - 8 * x^2 * \beta^4 * \exp(2\beta t) * \alpha * \Sigma_3 * t * \Sigma_2 - 8 * A * t * \Sigma_2^2 * \beta^2 * \exp(\beta t) * B * \alpha - 4 * \exp(4\beta t) * \\
& \beta^6 * f_0^2 * s^4 - 4 * f * \beta^3 * \exp(3\beta t) * \Sigma_2^2 * x * \alpha - 8 * \exp(4\beta t) * A * t * \Sigma_2 * \beta^5 * f_0 * s^2 - 8 * \\
& \exp(3\beta t) * x^2 * \Sigma_3 * \beta^4 * \alpha * s^2 - 8 * \exp(4\beta t) * \beta^4 * x_0^2 * \alpha * \Sigma_3 * t * \Sigma_2 + 8 * \exp(2\beta t) * B * \\
& s^2 * \alpha * t * \beta^4 * f * \Sigma_2 + 20 * \exp(4\beta t) * x_0 * B * \beta^3 * s^2 * \Sigma_2 * \alpha^2 * t + 4 * f * \beta^4 * \exp(3\beta t) * \Sigma_2 * \\
& \Sigma_3 * x_0 - 80 * \exp(3\beta t) * x_0 * B * \beta^3 * s^2 * \alpha * \Sigma_3 + 2 * \exp(4\beta t) * B * \alpha^2 * t * \Sigma_2^2 * \beta^2 * x - 44 * \\
& \exp(3\beta t) * \beta^3 * x_0^2 * \alpha * \Sigma_2 * \Sigma_3 + 8 * f_0 * \Sigma_2 * \beta^5 * \exp(2\beta t) * s^2 * A * t - 8 * f * \beta^3 * \Sigma_2 * \exp(\beta t) * \\
& B * \Sigma_3 + 4 * f * \beta^3 * \Sigma_2 * \exp(\beta t) * s^2 * B * \alpha + 4 * \exp(3\beta t) * x * B * \beta^4 * \Sigma_1 * t * \Sigma_2 - 4 * B^2 * \\
& \exp(2\beta t) * \beta^4 * \Sigma_1 * t * s^2 - 14 * x^2 * \beta^2 * \exp(2\beta t) * \alpha^2 * \Sigma_2^2 - 36 * \exp(3\beta t) * B^2 * s^2 * \Sigma_2 * \\
& \alpha^2 * t * \beta^2 + 24 * \exp(3\beta t) * x * x_0 * \beta^4 * \Sigma_3^2 + 4 * f_0 * \Sigma_2^2 * \beta^4 * \exp(2\beta t) * A * t - 4 * \exp(4\beta t) * \\
& \Sigma_2^2 * B * \alpha * A * t * \beta^2 - 20 * \exp(4\beta t) * x_0 * B * \beta^3 * \alpha * \Sigma_3 * t * \Sigma_2 + 144 * \exp(2\beta t) * x_0 * \\
& B * \beta^2 * \alpha * \Sigma_2 * \Sigma_3 + 24 * \exp(\beta t) * x * x_0 * \beta^4 * \Sigma_3^2 + 12 * B^2 * \exp(2\beta t) * s^2 * \Sigma_2 * \alpha^2 * t * \beta^2 + \\
& 2 * f * \beta^4 * \exp(4\beta t) * \Sigma_2^2 * A * t - 4 * \Sigma_2^2 * B * \alpha * f * \beta^2 - 40 * x * B * \beta^4 * \exp(2\beta t) * \Sigma_3 * \alpha * \\
& t * s^2 + 2 * \exp(4\beta t) * B * \alpha * t^2 * \Sigma_2^2 * \beta^3 * A + 2 * A^2 * t^2 * \Sigma_2^2 * \beta^4 * \exp(2\beta t) + 8 * x * \Sigma_3 * \beta^5 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \exp(2*\beta*t)*f_0*s^2+20*\exp(3*\beta*t)*x_0*B*\beta^3*\alpha*\Sigma_3*t*\Sigma_2-24*\exp(3*\beta*t)*x_0*B* \\
& \beta^3*s^2*\Sigma_2*\alpha^2*t+20*\exp(2*\beta*t)*x_0*B*\beta^3*\alpha*\Sigma_3*t*\Sigma_2-9*\exp(4*\beta*t)*\beta^2*x_0^2*\alpha^2* \\
& \Sigma_2^2+12*\exp(3*\beta*t)*x*\alpha*s^2*\beta^4*f_0*\Sigma_2-8*\exp(4*\beta*t)*\beta^6*f_0*s^4*A*t-4*A*t*\Sigma_2^2* \\
& \beta^3*\exp(\beta*t)*x*\alpha-4*A*t*\Sigma_2^2*\beta^3*\exp(\beta*t)*x_0*\alpha-16*\exp(3*\beta*t)*\beta^4*s^2*A*t*B* \\
& \Sigma_3+20*x^2*\beta^2*\exp(\beta*t)*\alpha^2*\Sigma_2^2+2*f_0*\Sigma_2^2*\beta^4*f-24*\exp(\beta*t)*B^2*\alpha*\Sigma_3*t*\Sigma_2*\beta^2+ \\
& 16*\exp(\beta*t)*B^2*\alpha^2*\Sigma_2^2*t*\beta-8*\exp(4*\beta*t)*x*\alpha*s^4*\beta^5*f_0+8*\exp(3*\beta*t)*x^2*\alpha^2* \\
& s^4*\beta^4+8*\exp(3*\beta*t)*\Sigma_3*x_0*\beta^5*f*s^2-4*\exp(4*\beta*t)*\beta^4*s^2*A*t*\Sigma_2*x_0*\alpha-8*f_0* \\
& \Sigma_2*\beta^4*\exp(2*\beta*t)*B*s^2*\alpha*t+16*\exp(3*\beta*t)*x*x_0*\beta^4*\alpha*\Sigma_3*t*\Sigma_2-8*\exp(3*\beta* \\
& t)*\Sigma_3*x_0*\beta^5*s^2*A*t-92*x*B*\beta^2*\exp(2*\beta*t)*\alpha^2*s^2*\Sigma_2-20*\exp(\beta*t)*x_0*B*\beta^3* \\
& \alpha*\Sigma_3*t*\Sigma_2+12*\exp(\beta*t)*x_0*B*\beta^2*\alpha^2*\Sigma_2^2*t+4*\exp(3*\beta*t)*x_0*B*\beta^4*\Sigma_1*t*\Sigma_2-4* \\
& f_0*\Sigma_2*\beta^4*\exp(2*\beta*t)*\Sigma_3*x_0-8*\exp(4*\beta*t)*A*t*\Sigma_2*\beta^4*x*\alpha*s^2+4*B*\Sigma_3*\beta^3*f* \\
& \Sigma_2-8*f_0*\Sigma_2*\beta^5*f*\exp(2*\beta*t)*s^2-2*\exp(4*\beta*t)*A*t*\Sigma_2^2*\beta^4*f_0+4*f*\beta^3*\exp(2* \\
& \beta*t)*\Sigma_2^2*B*\alpha*t-4*\exp(\beta*t)*x*x_0*\beta^5*\Sigma_1*t*\Sigma_2-16*\exp(\beta*t)*x*x_0*\beta^4*\alpha*\Sigma_3*t* \\
& \Sigma_2+8*\exp(\beta*t)*x*x_0*\beta^3*\alpha^2*\Sigma_2^2*t-12*x^2*\beta^4*\exp(2*\beta*t)*\Sigma_3^2+40*\exp(3*\beta*t)*x_0* \\
& B*\beta^4*\Sigma_3*\alpha*t*s^2-72*\exp(3*\beta*t)*B^2*s^2*\alpha*\Sigma_3*\beta^2-20*\exp(4*\beta*t)*B^2*\alpha^2*s^2*\Sigma_2* \\
& \beta-8*B*\Sigma_3*\beta^4*f*\exp(2*\beta*t)*s^2+68*\exp(3*\beta*t)*x_0*B*\beta^2*\alpha^2*s^2*\Sigma_2-8*\exp(3* \\
& \beta*t)*x*\alpha*s^4*\beta^5*f+24*\exp(3*\beta*t)*x*B*\beta^3*\Sigma_3^2+4*x*\Sigma_3*\beta^4*f*\Sigma_2-4*\exp(2*\beta* \\
& t)*s^4*B^2*\alpha^2*\beta^2-12*x^2*\beta^4*\Sigma_3^2-12*B^2*\Sigma_3^2*\beta^2+4*x*\Sigma_3*\beta^4*\exp(2*\beta*t)*A*t*\Sigma_2+ \\
& 2*f_0*\Sigma_2^2*\beta^3*x*\alpha+2*f_0*\Sigma_2^2*\beta^3*B*\alpha*t-8*\exp(4*\beta*t)*B*s^4*\alpha*t*\beta^5*f-2*f*\beta^3* \\
& \exp(4*\beta*t)*\Sigma_2^2*B*\alpha*t+4*f*\beta^2*\exp(4*\beta*t)*\Sigma_2^2*B*\alpha-4*\exp(4*\beta*t)*f_0^2*\Sigma_2*\beta^5* \\
& s^2-12*\exp(4*\beta*t)*\beta^3*x_0^2*\alpha^2*s^2*\Sigma_2-8*\exp(3*\beta*t)*x*\Sigma_3*\beta^5*f_0*s^2+40*\exp(3* \\
& \beta*t)*x*B*\beta^4*\Sigma_3*\alpha*t*s^2-9*x^2*\beta^2*\alpha^2*\Sigma_2^2+4*B^2*\alpha^2*t*\Sigma_2*\beta^2*\exp(\beta*t)*s^2+12* \\
& \exp(\beta*t)*x_0*B*\beta^2*\alpha^2*s^2*\Sigma_2-56*\exp(\beta*t)*x_0*B*\beta^2*\alpha*\Sigma_2*\Sigma_3-8*\exp(4*\beta*t)*x* \\
& \alpha*s^4*\beta^5*A*t+4*\exp(4*\beta*t)*\beta^3*x_0^2*\alpha^2*\Sigma_2^2*t+10*\exp(4*\beta*t)*x_0*B*\beta^2*\alpha^2*\Sigma_2^2*t-
\end{aligned}$$

$$t) * \alpha^2 * s^2 * \Sigma_2 * \beta - 8 * \exp(\beta * t) * s^2 * \alpha * \Sigma_3 * \beta^2 + 8 * \exp(\beta * t) * \alpha^2 * \Sigma_2^2) / (-\Sigma_2 + 2 * \exp(2 * \beta * t) * \beta * s^2 + \exp(2 * \beta * t) * \Sigma_2)^2)^{1/2} / (-\Sigma_2 + 2 * \exp(2 * \beta * t) * \beta * s^2 + \exp(2 * \beta * t) * \Sigma_2)$$

$$\hat{P}(t, \mu, x) = \tag{A.0.3}$$

$$= 1/2 * \exp(-\beta * t - I * (-B * \alpha * \beta * t - B * \alpha * \exp(-\beta * t) + A * t * \beta^2 + B * \alpha + f_0 * \beta^2) / \beta^2 * \mu - 1/4 * (-\alpha^2 * \Sigma_2 * \exp(-\beta * t)^2 + 4 * \Sigma_2 * \alpha^2 * \exp(-\beta * t) - 4 * \alpha * \Sigma_3 * \beta * \exp(-\beta * t) + 2 * \alpha^2 * \beta * t * \Sigma_2 - 4 * \alpha * \beta^2 * t * \Sigma_3 + 2 * \Sigma_1 * t * \beta^3 - 3 * \Sigma_2 * \alpha^2 + 4 * \alpha * \Sigma_3 * \beta) / \beta^3 * \mu^2 + \alpha * (-1 + \exp(-\beta * t)) / \beta * x * \mu * I) * \sqrt{2/\pi}$$

$$P(t, f, x) = \tag{A.0.4}$$

$$= \exp(-(-\alpha^2 * x^2 * \beta^2 - 2 * \beta^5 * t^2 * \Sigma_1 + 2 * f_0 * \beta^4 * f - A^2 * t^2 * \beta^4 - B^2 * \alpha^2 - B^2 * \alpha^2 * \exp(-2 * \beta * t) - 2 * \alpha^2 * x * \beta * B + 3 * \beta^2 * t * \Sigma_2 * \alpha^2 + 2 * f_0 * \beta^3 * \alpha * x * \exp(-\beta * t) + 2 * f_0 * \beta^2 * B * \alpha * \exp(-\beta * t) - 2 * f * \beta^3 * \alpha * x * \exp(-\beta * t) - 2 * f * \beta^2 * B * \alpha * \exp(-\beta * t) + 4 * \alpha^2 * x * \beta * B * \exp(-\beta * t) - 2 * B^2 * \alpha^2 * t * \beta * \exp(-\beta * t) - 2 * \alpha^2 * x * \beta^2 * B * t * \exp(-\beta * t) + 2 * \alpha * x * \beta^3 * A * t * \exp(-\beta * t) - \alpha^2 * x^2 * \beta^2 * \exp(-2 * \beta * t) + 2 * \alpha^2 * x^2 * \beta^2 * \exp(-\beta * t) + 2 * A * t * \beta^2 * B * \alpha * \exp(-\beta * t) - 4 * \beta^2 * t * \Sigma_2 * \alpha^2 * \exp(-\beta * t) + 4 * \beta^3 * t * \alpha * \Sigma_3 * \exp(-\beta * t) + 2 * B^2 * \alpha^2 * \exp(-\beta * t) + 2 * f_0 * \beta^3 * B * \alpha * t + 2 * f * \beta^3 * \alpha * x + 4 * \beta^4 * t^2 * \alpha * \Sigma_3 - 2 * f * \beta^3 * B * \alpha * t - B^2 * \alpha^2 * t^2 * \beta^2 + 2 * f * \beta^4 * A * t - 2 * \alpha * x * \beta^3 * A * t + 2 * f * \beta^2 * B * \alpha + 2 * B * \alpha * t^2 * \beta^3 * A - 2 * f_0 * \beta^3 * \alpha * x + 2 * \alpha^2 * x * \beta^2 * B * t - 2 * \beta^3 * t^2 * \alpha^2 * \Sigma_2 - 2 * A * t * \beta^2 * B * \alpha - 4 * \beta^3 * t * \alpha * \Sigma_3 - 2 * f_0 * \beta^4 * A * t + 2 * B^2 * \alpha^2 * t * \beta - 2 * f_0 * \beta^2 * B * \alpha - f_0^2 * \beta^4 - f^2 * \beta^4 + \beta^2 * t * \Sigma_2 * \alpha^2 * \exp(-2 * \beta * t) - 2 * \alpha^2 * x * \beta * B * \exp(-2 * \beta * t)) / \beta / (\Sigma_2 * \alpha^2 * \exp(-2 * \beta * t) - 4 * \Sigma_2 * \alpha^2 * \exp(-\beta * t) + 4 * \alpha * \Sigma_3 * \beta * \exp(-\beta * t) - 2 * \alpha^2 * \beta * t * \Sigma_2 + 4 * \alpha * \beta^2 * t * \Sigma_3 - 2 * \Sigma_1 * t * \beta^3 + 3 * \Sigma_2 * \alpha^2 - 4 * \alpha * \Sigma_3 * \beta)) / \sqrt{\pi} * \beta^2 / (- (\Sigma_2 * \alpha^2 * \exp(-2 * \beta * t) - 4 * \Sigma_2 * \alpha^2 * \exp(-\beta * t) + 4 * \alpha * \Sigma_3 * \beta * \exp(-\beta * t) - 2 * \alpha^2 * \beta * t * \Sigma_2 + 4 * \alpha * \beta^2 * t * \Sigma_3 - 2 * \Sigma_1 * t * \beta^3 + 3 * \Sigma_2 * \alpha^2 - 4 * \alpha * \Sigma_3 * \beta) * \beta)^{1/2}$$

$$K_2 = \tag{A.0.5}$$

$$\begin{aligned}
&= ((2(\alpha_1 - \alpha_2)(\sigma_{11}\lambda_1 + \sigma_{12}\lambda_2 + \sigma_{13}\lambda_3 - \sigma_{21}\lambda_1 - \sigma_{22}\lambda_2 - \sigma_{23}\lambda_3)/\beta^2 - 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(\alpha_1 - \alpha_2)^2/\beta^3)exp(-2\beta t)exp(\beta t) + (-((\sigma_{12} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{21})^2 + (\sigma_{13} - \sigma_{23})^2)t + 2(\alpha_1 - \alpha_2)t(\sigma_{11}\lambda_1 + \sigma_{12}\lambda_2 + \sigma_{13}\lambda_3 - \sigma_{21}\lambda_1 - \sigma_{22}\lambda_2 - \sigma_{23}\lambda_3)/\beta + (-(\alpha_1 - \alpha_2)^2t(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\sigma_{11}\lambda_1 + \sigma_{12}\lambda_2 + \sigma_{13}\lambda_3 - \sigma_{21}\lambda_1 - \sigma_{22}\lambda_2 - \sigma_{23}\lambda_3))/\beta^2 + 3/2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(\alpha_1 - \alpha_2)^2/\beta^3)exp(-2\beta t)exp(2\beta t) + 1/2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(\alpha_1 - \alpha_2)^2/\beta^3 exp(-2\beta t))\gamma + (-1/2\sigma_{11}^2 - 1/2\sigma_{12}^2 - 1/2\sigma_{13}^2 - 1/2\sigma_{21}^2 - 1/2\sigma_{22}^2 - 1/2\sigma_{23}^2)t
\end{aligned}$$

$$K_1 = \tag{A.0.6}$$

$$\begin{aligned}
&= (((2\alpha_2(\sigma_{11}\lambda_1 + \sigma_{12}\lambda_2 + \sigma_{13}\lambda_3 - \sigma_{21}\lambda_1 - \sigma_{22}\lambda_2 - \sigma_{23}\lambda_3) + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\sigma_{21}\lambda_1 + \sigma_{22}\lambda_2 + \sigma_{23}\lambda_3))/\beta^2 - 4(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)/\beta^3)exp(-2\beta t)exp(\beta t) + (-(2\sigma_{21}(\sigma_{11} - \sigma_{21}) + 2\sigma_{22}(\sigma_{12} - \sigma_{22}) + 2\sigma_{23}(\sigma_{13} - \sigma_{23}))t + (2\alpha_2t(\sigma_{11}\lambda_1 + \sigma_{12}\lambda_2 + \sigma_{13}\lambda_3 - \sigma_{21}\lambda_1 - \sigma_{22}\lambda_2 - \sigma_{23}\lambda_3) + 2(\alpha_1 - \alpha_2)t(\sigma_{21}\lambda_1 + \sigma_{22}\lambda_2 + \sigma_{23}\lambda_3))/\beta + (-2\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)t(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 2\alpha_2(\sigma_{11}\lambda_1 + \sigma_{12}\lambda_2 + \sigma_{13}\lambda_3 - \sigma_{21}\lambda_1 - \sigma_{22}\lambda_2 - \sigma_{23}\lambda_3) - 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\sigma_{21}\lambda_1 + \sigma_{22}\lambda_2 + \sigma_{23}\lambda_3))/\beta^2 + 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)/\beta^3)exp(-2\beta t)exp(2\beta t) + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)/\beta^3 exp(-2\beta t))\gamma + ((-x\alpha_1 + \alpha_2 x)/\beta + (\alpha_2 - \alpha_1)B/\beta^2)exp(-\beta t) + (-A_2 + A_1 + \sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{23}^2)t + ((\alpha_2 - \alpha_1)Bt + x\alpha_1 - \alpha_2 x)/\beta + B(\alpha_1 - \alpha_2)/\beta^2
\end{aligned}$$

$$K_0 = \tag{A.0.7}$$

$$\begin{aligned}
&= ((2\alpha_2(\sigma_{21}\lambda_1 + \sigma_{22}\lambda_2 + \sigma_{23}\lambda_3)/\beta^2 - 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\alpha_2^2/\beta^3)exp(-2\beta t)exp(\beta t) + (-((\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{23}^2)t + 2\alpha_2t(\sigma_{21}\lambda_1 + \sigma_{22}\lambda_2 + \sigma_{23}\lambda_3)/\beta + (-2\alpha_2(\sigma_{21}\lambda_1 + \sigma_{22}\lambda_2 + \sigma_{23}\lambda_3) - \alpha_2^2t(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2))/\beta^2 + 3/2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\alpha_2^2/\beta^3)exp(-2\beta t)exp(2\beta t) + 1/2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\alpha_2^2/\beta^3 exp(-2\beta t))\gamma
\end{aligned}$$

$$q(t) = \tag{A.0.8}$$

$$\begin{aligned}
&= -1/2*t*\sigma_1^2*(((-2*\sigma_1*\lambda*\beta+(4*\alpha_1-4)*\lambda^2)*\gamma+(r*\alpha_1-r)*\beta^2+(B*\alpha_1-B)*\beta)* \\
&erp(-\beta*t)+(-\alpha_1+1)*\lambda^2*\gamma*erp(-2*\beta*t)+(-2*\beta^2*t*\lambda*\sigma_1+(\lambda^2*(2*\alpha_1-2)*t+2* \\
&\sigma_1*\lambda)*\beta+(-3*\alpha_1+3)*\lambda^2)*\gamma-\beta^3*t*A_1+((B*\alpha_1-B)*t-r*\alpha_1+r)*\beta^2+(-B*\alpha_1+ \\
&B)*\beta)^2/(((-4*\alpha_1+4)*\sigma_1*\lambda*\beta+(4+4*\alpha_1^2-8*\alpha_1)*\lambda^2)*\gamma*erp(-\beta*t)+(-\alpha_1^2+2* \\
&\alpha_1-1)*\lambda^2*\gamma*erp(-2*\beta*t)+(2*\beta^3*t*\sigma_1^2+(-4*\alpha_1+4)*\sigma_1*\lambda*t*\beta^2+((2*\alpha_1^2-4*\alpha_1+ \\
&2)*\lambda^2*t+(4*\alpha_1-4)*\sigma_1*\lambda)*\beta+(-3-3*\alpha_1^2+6*\alpha_1)*\lambda^2)*\gamma+\beta^3*t*\sigma_1^2)^2-(-1/2*(-2* \\
&\beta^2*A_1+2*\beta*B*\alpha_1-2*\beta*B)/\beta^2*t-1/2*(2*B*\alpha_1-2*\beta*r+2*\beta*r*\alpha_1-2*B)/\beta^2* \\
&erp(-\beta*t)-1/2*(-2*B*\alpha_1-2*\beta*r*\alpha_1+2*B+2*\beta*r)/\beta^2)*(((-2*\sigma_1*\lambda*\beta+(4*\alpha_1- \\
&4)*\lambda^2)*\gamma+(r*\alpha_1-r)*\beta^2+(B*\alpha_1-B)*\beta)*erp(-\beta*t)+(-\alpha_1+1)*\lambda^2*\gamma*erp(-2*\beta* \\
&t)+(-2*\beta^2*t*\lambda*\sigma_1+(\lambda^2*(2*\alpha_1-2)*t+2*\sigma_1*\lambda)*\beta+(-3*\alpha_1+3)*\lambda^2)*\gamma-\beta^3*t*A_1+ \\
&((B*\alpha_1-B)*t-r*\alpha_1+r)*\beta^2+(-B*\alpha_1+B)*\beta)/(((-4*\alpha_1+4)*\sigma_1*\lambda*\beta+(4+4*\alpha_1^2- \\
&8*\alpha_1)*\lambda^2)*\gamma*erp(-\beta*t)+(-\alpha_1^2+2*\alpha_1-1)*\lambda^2*\gamma*erp(-2*\beta*t)+(2*\beta^3*t*\sigma_1^2+(-4* \\
&\alpha_1+4)*\sigma_1*\lambda*t*\beta^2+((2*\alpha_1^2-4*\alpha_1+2)*\lambda^2*t+(4*\alpha_1-4)*\sigma_1*\lambda)*\beta+(-3-3*\alpha_1^2+6* \\
&\alpha_1)*\lambda^2)*\gamma+\beta^3*t*\sigma_1^2)+1/2*t/\sigma_1^2*(A_1+(\alpha_1-1)*r)^2/(1+2*\gamma)^2-(-1/2*(-2*\beta^2*A_1+ \\
&2*\beta*B*\alpha_1-2*\beta*B)/\beta^2*t-1/2*(2*B*\alpha_1-2*\beta*r+2*\beta*r*\alpha_1-2*B)/\beta^2*erp(-\beta* \\
&t)-1/2*(-2*B*\alpha_1-2*\beta*r*\alpha_1+2*B+2*\beta*r)/\beta^2)*(A_1+(\alpha_1-1)*r)/(1+2*\gamma)/\sigma_1^2
\end{aligned}$$

$$q_1(t, \xi) = \tag{A.0.9}$$

$$\begin{aligned}
&(-(-I*\lambda^2*(\lambda^2*\xi^2*I-2*\beta*\xi)*\cosh(1/2*(\beta^2)^{1/2}*t+\arctan((\lambda^2*\xi+\beta*I)/(\beta^2)^{1/2})* \\
&I)^2/\beta^2)^{-1/\lambda^2*B}/\lambda^8*B^2*(2*I*\lambda^2*\alpha*\cosh(1/2*(\beta^2)^{1/2}*t+\arctan((\lambda^2*\xi+ \\
&\beta*I)/(\beta^2)^{1/2}))*I)^2/\beta^2-2*I*\lambda^2*(\lambda^2*\xi^2*I-2*\beta*\xi)*\cosh(1/2*(\beta^2)^{1/2}*t+ \\
&\arctan((\lambda^2*\xi+\beta*I)/(\beta^2)^{1/2}))*I)/\beta^2*\sinh(1/2*(\beta^2)^{1/2}*t+\arctan((\lambda^2*\xi+\beta*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& I)/(\beta^2)^{(1/2)}) * I) * (1/2 * I / (\beta^2)^{(1/2)} * t * \alpha * \lambda^2 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(3/2)} * \alpha * \lambda^2 / (1 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I)^2 / \beta^2)) - 2 * \lambda^4 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 / \beta^4 * \alpha^2 / (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi)^2 / \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^4 * \beta^4 * \exp(-1 / \lambda^2 * B * \beta * t) - I * (-I * \lambda^2 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 / \beta^2)^{-1 / \lambda^2 * B} / \lambda^4 * B * (8 * I * \lambda^2 * \alpha * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I) / \beta^2 * \sinh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I) * (1/2 * I / (\beta^2)^{(1/2)} * t * \alpha * \lambda^2 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(3/2)} * \alpha * \lambda^2 / (1 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I)^2 / \beta^2)) + 8 * \lambda^4 * \alpha^2 * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 / \beta^4 - 2 * I * \lambda^2 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \sinh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 * (1/2 * I / (\beta^2)^{(1/2)} * t * \alpha * \lambda^2 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(3/2)} * \alpha * \lambda^2 / (1 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I)^2 / \beta^2))^2 / \beta^2 - 8 * \lambda^4 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I) / \beta^4 * \sinh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I) * (1/2 * I / (\beta^2)^{(1/2)} * t * \alpha * \lambda^2 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(3/2)} * \alpha * \lambda^2 / (1 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I)^2 / \beta^2)) * \alpha - 2 * I * \lambda^2 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 / \beta^2 * (1/2 * I / (\beta^2)^{(1/2)} * t * \alpha * \lambda^2 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(3/2)} * \alpha * \lambda^2 / (1 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I)^2 / \beta^2))^2 - 2 * I * \lambda^2 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I) / \beta^2 * \sinh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I) * (1/2 / (\beta^2)^{(3/2)} * t * \alpha^2 * \lambda^4 - 3 * I * (\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(5/2)} * \alpha^2 * \lambda^4 / (1 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I)^2 / \beta^2) + 2 * I * (\lambda^2 * \xi + \beta * I)^3 / (\beta^2)^{(7/2)} * \alpha^2 * \lambda^4 / (1 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I)^2 / \beta^2)^2) + 8 * I * \lambda^6 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 / \beta^6 * \alpha^2) / (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) / \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 * \beta^2 * \exp(-1 / \lambda^2 * B * \beta * t) + 2 * I * (-I * \lambda^2 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 / \beta^2)^{-1 / \lambda^2 * B} / \lambda^4 * B * (2 * I * \lambda^2 * \alpha * \cosh(1/2 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 / \beta^2 - 2 * I * \lambda^2 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \\
& \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I) / \beta^2 * \sinh(1/2 * \\
& (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I) * (1/2 * I / (\beta^2)^{(1/2)} * t * \alpha * \lambda^2 + \\
& (\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(3/2)} * \alpha * \lambda^2 / (1 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I)^2 / \beta^2)) - 2 * \lambda^4 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \\
& \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 / \beta^4 * \alpha / (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \\
& \xi) / \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^3 * \beta^2 * \exp(-1 / \lambda^2 * B * \\
& \beta * t) * \sinh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I) * (1/2 * I / (\beta^2)^{(1/2)} * \\
& t * \alpha * \lambda^2 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(3/2)} * \alpha * \lambda^2 / (1 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I)^2 / \beta^2)) + 2 * (-I * \lambda^2 * (\lambda^2 * \xi^2 * \\
& I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 / \beta^2)^{(-1 / \lambda^2 * \\
& B) / \lambda^2 * B * (2 * I * \lambda^2 * \alpha * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * \\
& I)^2 / \beta^2 - 2 * I * \lambda^2 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * \\
& I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I) / \beta^2 * \sinh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I) * \\
& (1/2 * I / (\beta^2)^{(1/2)} * t * \alpha * \lambda^2 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(3/2)} * \alpha * \lambda^2 / (1 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I)^2 / \beta^2)) - \\
& 2 * \lambda^4 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * \\
& I)^2 / \beta^4 * \alpha / (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) / \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * \\
& I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 * \alpha * \exp(-1 / \lambda^2 * B * \beta * t) + (-I * \lambda^2 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * \\
& (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 / \beta^2)^{(-1 / \lambda^2 * B) / \lambda^6 * B * (2 * I * \lambda^2 * \\
& \alpha * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 / \beta^2 - 2 * I * \lambda^2 * (\lambda^2 * \\
& \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I) / \beta^2 * \\
& \sinh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I) * (1/2 * I / (\beta^2)^{(1/2)} * t * \alpha * \\
& \lambda^2 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(3/2)} * \alpha * \lambda^2 / (1 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I)^2 / \beta^2)) - 2 * \lambda^4 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \\
& \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 / \beta^4 * \alpha / (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \\
& \beta * \xi) / \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 * \beta^2 * (2 * I * m * \lambda^2 + \\
& 2 * I * t * A * \lambda^2) * \exp(-1 / \lambda^2 * B * \beta * t) * I - 2 * I * (-I * \lambda^2 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 / \beta^2)^{(-1/\lambda^2 * B) / \lambda^4 * B * (2 * I * \lambda^2 * \\
& \alpha * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 / \beta^2 - 2 * I * \lambda^2 * (\lambda^2 * \\
& \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I) / \beta^2 * \\
& \sinh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I) * (1/2 * I / (\beta^2)^{(1/2)} * t * \alpha * \\
& \lambda^2 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(3/2)} * \alpha * \lambda^2 / (1 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I)^2 / \beta^2)) - 2 * \lambda^4 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \\
& \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 / \beta^4 * \alpha) / (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \\
& \beta * \xi)^2 / \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 * \beta^2 * \exp(-1/\lambda^2 * \\
& B * \beta * t) * \alpha - (-I * \lambda^2 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \\
& \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 / \beta^2)^{(-1/\lambda^2 * B) * t * \sigma^2 * \exp(-1/\lambda^2 * B * \beta * t) + 1/4 * (-I * \\
& \lambda^2 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * \\
& I)^2 / \beta^2)^{(-1/\lambda^2 * B) * (2 * I * m * \lambda^2 + 2 * I * t * A * \lambda^2)^2 / \lambda^4 * \exp(-1/\lambda^2 * B * \beta * t))}
\end{aligned}$$

$$q_2(t, \xi) = \tag{A.0.10}$$

$$\begin{aligned}
& ((-I * \lambda^2 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * \\
& I) / (\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2 / \beta^2)^{(-1/\lambda^2 * B) * (2 * I * m * \lambda^2 + 2 * I * t * A * \lambda^2) / \lambda^2 * \exp(-1/\lambda^2 * \\
& B * \beta * t) * (-((-I / (\beta^2)^{(1/2)}) * \xi * \\
& \alpha * \lambda^2 + 2 * \\
& \alpha) * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) - I * (\beta * \xi - (\beta^2)^{(1/2)} * \xi) / (\beta^2)^{(1/2)} * t * \\
& \alpha * \lambda^2 * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) - I / (\beta^2)^{(1/2)} * \xi * \\
& \alpha * \lambda^2 - 2 * \\
& \alpha) / ((-I * \lambda^2 * \xi + \beta + (\beta^2)^{(1/2)}) * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) + (\beta^2)^{(1/2)} + \lambda^2 * \xi * I - \beta) + \\
& ((\beta * \xi - (\beta^2)^{(1/2)} * \xi) * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) - \beta * \xi - (\beta^2)^{(1/2)} * \xi) / ((-I * \lambda^2 * \xi + \\
& \beta + (\beta^2)^{(1/2)}) * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) + (\beta^2)^{(1/2)} + \lambda^2 * \xi * I - \beta)^2 * (1 / (\beta^2)^{(1/2)}) * \\
& \alpha * \lambda^2 * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) * I - I * (-I * \lambda^2 * \xi + \beta + (\beta^2)^{(1/2)}) / (\beta^2)^{(1/2)} * t *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha * \lambda^2 * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) + 1/(\beta^2)^{(1/2)} * \\
& \alpha * \lambda^2 * I)) + 2 * I * (-I * \lambda^2 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \\
& \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I)/(\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2/\beta^2)^{-1/\lambda^2 * B}/\lambda^4 * B * (2 * I * \lambda^2 * \\
& \alpha * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I)/(\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2/\beta^2 - 2 * I * \lambda^2 * (\lambda^2 * \\
& \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I)/(\beta^2)^{(1/2)}) * I)/\beta^2 * \\
& \sinh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I)/(\beta^2)^{(1/2)}) * I) * (1/2 * I/(\beta^2)^{(1/2)} * t * \\
& \alpha * \lambda^2 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I)/(\beta^2)^{(3/2)} * \\
& \alpha * \lambda^2/(1 + (\lambda^2 * \xi + \beta * I)^2/\beta^2)) - 2 * \lambda^4 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * \\
& t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I)/(\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2/\beta^4 * \\
& \alpha)/(\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi)/\cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I)/(\beta^2)^{(1/2)}) * \\
& I)^2 * \beta^2 * \exp(-1/\lambda^2 * B * \beta * t) * (-((-I/(\beta^2)^{(1/2)} * \xi * \\
& \alpha * \lambda^2 + 2 * \\
& \alpha) * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) - I * (\beta * \xi - (\beta^2)^{(1/2)} * \xi)/(\beta^2)^{(1/2)} * t * \\
& \alpha * \lambda^2 * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) - I/(\beta^2)^{(1/2)} * \xi * \\
& \alpha * \lambda^2 - 2 * \\
& \alpha)/((-I * \lambda^2 * \xi + \beta + (\beta^2)^{(1/2)}) * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) + (\beta^2)^{(1/2)} + \lambda^2 * \xi * I - \beta) + \\
& ((\beta * \xi - (\beta^2)^{(1/2)} * \xi) * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) - \beta * \xi - (\beta^2)^{(1/2)} * \xi)/((-I * \lambda^2 * \xi + \\
& \beta + (\beta^2)^{(1/2)}) * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) + (\beta^2)^{(1/2)} + \lambda^2 * \xi * I - \beta)^2 * (1/(\beta^2)^{(1/2)} * \\
& \alpha * \lambda^2 * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) * I - I * (-I * \lambda^2 * \xi + \beta + (\beta^2)^{(1/2)})/(\beta^2)^{(1/2)} * t * \\
& \alpha * \lambda^2 * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) + 1/(\beta^2)^{(1/2)} * \\
& \alpha * \lambda^2 * I)) - (-I * \lambda^2 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \\
& \beta * I)/(\beta^2)^{(1/2)}) * I)^2/\beta^2)^{-1/\lambda^2 * B} * \exp(-1/\lambda^2 * B * \beta * t) * (-(-1/(\beta^2)^{(3/2)} * \xi * \\
& \alpha^2 * \lambda^4 * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) - 2 * I * (-I/(\beta^2)^{(1/2)} * \xi * \\
& \alpha * \lambda^2 + 2 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha)/(\beta^2)^{(1/2)} * t * \\
& \alpha * \lambda^2 * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) - (\beta * \xi - (\beta^2)^{(1/2)} * \xi)/(\beta^2)^{(3/2)} * t * \\
& \alpha^2 * \lambda^4 * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) - (\beta * \xi - (\beta^2)^{(1/2)} * \xi)/\beta^2 * t^2 * \\
& \alpha^2 * \lambda^4 * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) - 1/(\beta^2)^{(3/2)} * \xi * \\
& \alpha^2 * \lambda^4)/((-I * \lambda^2 * \xi + \beta + (\beta^2)^{(1/2)}) * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) + (\beta^2)^{(1/2)} + \lambda^2 * \xi * I - \\
& \beta) + 2 * ((-I/(\beta^2)^{(1/2)} * \xi * \\
& \alpha * \lambda^2 + 2 * \\
& \alpha) * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) - I * (\beta * \xi - (\beta^2)^{(1/2)} * \xi)/(\beta^2)^{(1/2)} * t * \\
& \alpha * \lambda^2 * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) - I/(\beta^2)^{(1/2)} * \xi * \\
& \alpha * \lambda^2 - 2 * \\
& \alpha)/((-I * \lambda^2 * \xi + \beta + (\beta^2)^{(1/2)}) * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) + (\beta^2)^{(1/2)} + \lambda^2 * \xi * I - \beta)^2 * \\
& (1/(\beta^2)^{(1/2)} * \\
& \alpha * \lambda^2 * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) * I - I * (-I * \lambda^2 * \xi + \beta + (\beta^2)^{(1/2)})/(\beta^2)^{(1/2)} * t * \\
& \alpha * \lambda^2 * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) + 1/(\beta^2)^{(1/2)} * \\
& \alpha * \lambda^2 * I) - 2 * ((\beta * \xi - (\beta^2)^{(1/2)} * \xi) * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) - \beta * \xi - (\beta^2)^{(1/2)} * \xi)/((-I * \\
& \lambda^2 * \xi + \beta + (\beta^2)^{(1/2)}) * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) + (\beta^2)^{(1/2)} + \lambda^2 * \xi * I - \beta)^3 * (1/(\beta^2)^{(1/2)} * \\
& \alpha * \lambda^2 * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) * I - I * (-I * \lambda^2 * \xi + \beta + (\beta^2)^{(1/2)})/(\beta^2)^{(1/2)} * t * \\
& \alpha * \lambda^2 * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) + 1/(\beta^2)^{(1/2)} * \\
& \alpha * \lambda^2 * I)^2 + ((\beta * \xi - (\beta^2)^{(1/2)} * \xi) * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) - \beta * \xi - (\beta^2)^{(1/2)} * \xi)/((-I * \\
& \lambda^2 * \xi + \beta + (\beta^2)^{(1/2)}) * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) + (\beta^2)^{(1/2)} + \lambda^2 * \xi * I - \beta)^2 * (1/(\beta^2)^{(3/2)} * \\
& \alpha^2 * \lambda^4 * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) + 2/\beta^2 * \\
& \alpha^2 * \lambda^4 * t * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) - (-I * \lambda^2 * \xi + \beta + (\beta^2)^{(1/2)})/(\beta^2)^{(3/2)} * t * \\
& \alpha^2 * \lambda^4 * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) - (-I * \lambda^2 * \xi + \beta + (\beta^2)^{(1/2)})/\beta^2 * t^2 * \\
& \alpha^2 * \lambda^4 * \exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) + 1/(\beta^2)^{(3/2)} *
\end{aligned}$$

$\alpha^2 * \lambda^4)))$

$$q_3(t, \xi) = \tag{A.0.11}$$

$$\begin{aligned} & ((-I * \lambda^2 * (\lambda^2 * \xi^2 * I - 2 * \beta * \xi) * \cosh(1/2 * (\beta^2)^{(1/2)} * t + \arctan((\lambda^2 * \xi + \beta * I) / (\beta^2)^{(1/2)})) * \\ & I)^2 / \beta^2))^{(-1 / \lambda^2 * B)} (exp(-1 / \lambda^2 * B * \beta * t)) ((((-I / (\beta^2)^{(1/2)} * \xi * \alpha * \lambda^2 + 2 * \alpha) * \\ & exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) - I * (\beta * \xi - (\beta^2)^{(1/2)} * \xi) / (\beta^2)^{(1/2)} * t * \alpha * \lambda^2 * exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * \\ & t) - I / (\beta^2)^{(1/2)} * \xi * \alpha * \lambda^2 - 2 * \alpha) / ((-I * \lambda^2 * \xi + \beta + (\beta^2)^{(1/2)}) * exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) + \\ & (\beta^2)^{(1/2)} + \lambda^2 * \xi * I - \beta) - ((\beta * \xi - (\beta^2)^{(1/2)} * \xi) * exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) - \beta * \xi - (\beta^2)^{(1/2)} * \\ & \xi) / ((-I * \lambda^2 * \xi + \beta + (\beta^2)^{(1/2)}) * exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) + (\beta^2)^{(1/2)} + \lambda^2 * \xi * I - \beta)^2 * \\ & (1 / (\beta^2)^{(1/2)} * \alpha * \lambda^2 * exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) * I - I * (-I * \lambda^2 * \xi + \beta + (\beta^2)^{(1/2))) / (\beta^2)^{(1/2)} * \\ & t * \alpha * \lambda^2 * exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) + 1 / (\beta^2)^{(1/2)} * \alpha * \lambda^2 * I))) ((-((-I / (\beta^2)^{(1/2)} * \xi * \alpha * \\ & \lambda^2 + 2 * \alpha) * exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) - I * (\beta * \xi - (\beta^2)^{(1/2)} * \xi) / (\beta^2)^{(1/2)} * t * \alpha * \lambda^2 * \\ & exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) - I / (\beta^2)^{(1/2)} * \xi * \alpha * \lambda^2 - 2 * \alpha) / ((-I * \lambda^2 * \xi + \beta + (\beta^2)^{(1/2)}) * \\ & exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) + (\beta^2)^{(1/2)} + \lambda^2 * \xi * I - \beta) + ((\beta * \xi - (\beta^2)^{(1/2)} * \xi) * exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * \\ & t) - \beta * \xi - (\beta^2)^{(1/2)} * \xi) / ((-I * \lambda^2 * \xi + \beta + (\beta^2)^{(1/2)}) * exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) + (\beta^2)^{(1/2)} + \\ & \lambda^2 * \xi * I - \beta)^2 * (1 / (\beta^2)^{(1/2)} * \alpha * \lambda^2 * exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) * I - I * (-I * \lambda^2 * \xi + \\ & \beta + (\beta^2)^{(1/2))) / (\beta^2)^{(1/2)} * t * \alpha * \lambda^2 * exp(-(\beta^2)^{(1/2)} * t) + 1 / (\beta^2)^{(1/2)} * \alpha * \lambda^2 * I))) \end{aligned}$$

$$K_2 = \tag{A.0.12}$$

$$\begin{aligned} & (((-\gamma * \lambda^4 - \gamma * \lambda^4 * \alpha_1^2 + 2 * \gamma * \lambda^4 * \alpha_1) / \beta^2 * t^2 + (\gamma * \lambda^4 + \gamma * \lambda^4 * \alpha_1^2 - 2 * \gamma * \lambda^4 * \alpha_1) / \beta^3 * t + (2 * \\ & \gamma * \lambda^2 * r * \alpha_1^2 - 4 * \gamma * \lambda^2 * r * \alpha_1 + 2 * \gamma * \lambda^2 * r) / \beta^3 + (-5 * \gamma * \lambda^4 * \alpha_1 + 4 * \gamma * B * \lambda^2 * \alpha_1^2 + 4 * \gamma * B * \\ & \lambda^2 + 5 / 2 * \gamma * \lambda^4 * \alpha_1^2 - 8 * \gamma * B * \lambda^2 * \alpha_1 + 5 / 2 * \gamma * \lambda^4) / \beta^4) * exp(\beta * t) + ((-\gamma * \lambda^4 - \gamma * \lambda^4 * \alpha_1^2 + \\ & 2 * \gamma * \lambda^4 * \alpha_1) / \beta^2 * t^2 + ((-2 * \gamma * \lambda^2 * r - 2 * \gamma * \lambda^2 * r * \alpha_1^2 + 4 * \gamma * \lambda^2 * r * \alpha_1) / \beta^2 + (-4 * \gamma * \lambda^4 - \\ & 4 * \gamma * \lambda^4 * \alpha_1^2 + 8 * \gamma * \lambda^4 * \alpha_1) / \beta^3) * t + (-3 * \gamma * \lambda^2 * r - 3 * \gamma * \lambda^2 * r * \alpha_1^2 + 6 * \gamma * \lambda^2 * r * \alpha_1) / \beta^3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-15/2*\gamma*B*\lambda^2 - 15/2*\gamma*B*\lambda^2*\alpha_1^2 + 12*\gamma*\lambda^4*\alpha_1 - 6*\gamma*\lambda^4 - 6*\gamma*\lambda^4*\alpha_1^2 + 15*\gamma* \\
& B*\lambda^2*\alpha_1)/\beta^4)*exp(2*\beta*t) + (8*\gamma*\lambda^4*\alpha_1 - 4*\gamma*\lambda^4 - 4*\gamma*\lambda^4*\alpha_1^2 - 5/2*\gamma*B*\lambda^2 + \\
& 5*\gamma*B*\lambda^2*\alpha_1 - 5/2*\gamma*B*\lambda^2*\alpha_1^2)/\beta^4)*exp(4*\beta*t) + ((-12*\gamma*\lambda^4*\alpha_1 - 4*\gamma*B*\lambda^2* \\
& \alpha_1 + 2*\gamma*B*\lambda^2*\alpha_1^2 + 6*\gamma*\lambda^4 + 6*\gamma*\lambda^4*\alpha_1^2 + 2*\gamma*B*\lambda^2)/\beta^3)*t + (2*\gamma*\lambda^2*r*\alpha_1^2 - 4*\gamma* \\
& \lambda^2*r*\alpha_1 + 2*\gamma*\lambda^2*r)/\beta^3 + (6*\gamma*B*\lambda^2*\alpha_1^2 - 15*\gamma*\lambda^4*\alpha_1 + 15/2*\gamma*\lambda^4 + 6*\gamma*B*\lambda^2 - \\
& 12*\gamma*B*\lambda^2*\alpha_1 + 15/2*\gamma*\lambda^4*\alpha_1^2)/\beta^4)*exp(3*\beta*t) + (-1/2*\sigma_1^2 - \gamma*\sigma_1^2 + (\gamma*B*\lambda^2* \\
& \alpha_1^2 + \gamma*B*\lambda^2 - 2*\gamma*B*\lambda^2*\alpha_1)/\beta^3)*t + (-\gamma*\lambda^2*r*\alpha_1^2 + 2*\gamma*\lambda^2*r*\alpha_1 - \gamma*\lambda^2*r)/\beta^3)
\end{aligned}$$

$$K_1 = \tag{A.0.13}$$

$$\begin{aligned}
& (((2*\gamma*\lambda^4 - 2*\gamma*\lambda^4*\alpha_1)/\beta^2)*t^2 + ((\lambda^2 - \lambda^2*\alpha_1)/\beta + (-2*\gamma*\lambda^4 + 2*\gamma*\lambda^4*\alpha_1)/\beta^3)* \\
& t + (r - r*\alpha_1)/\beta + (-\lambda^2*\alpha_1 - B*\alpha_1 + B + \lambda^2)/\beta^2 + (4*\gamma*\lambda^2*r*\alpha_1 - 4*\gamma*\lambda^2*r)/\beta^3 + \\
& (5*\gamma*\lambda^4*\alpha_1 - 8*\gamma*B*\lambda^2 - 5*\gamma*\lambda^4 + 8*\gamma*B*\lambda^2*\alpha_1)/\beta^4)*exp(\beta*t) + ((2*\gamma*\lambda^4 - 2* \\
& \gamma*\lambda^4*\alpha_1)/\beta^2)*t^2 + ((4*\gamma*\lambda^2*r - 4*\gamma*\lambda^2*r*\alpha_1)/\beta^2 + (8*\gamma*\lambda^4 - 8*\gamma*\lambda^4*\alpha_1)/\beta^3)*t + \\
& (-\lambda^2 + \lambda^2*\alpha_1 - B + B*\alpha_1)/\beta^2 + (-6*\gamma*\lambda^2*r*\alpha_1 + 6*\gamma*\lambda^2*r)/\beta^3 + (15*\gamma*B*\lambda^2 + \\
& 12*\gamma*\lambda^4 - 12*\gamma*\lambda^4*\alpha_1 - 15*\gamma*B*\lambda^2*\alpha_1)/\beta^4)*exp(2*\beta*t) + (-5*\gamma*B*\lambda^2*\alpha_1 - 8* \\
& \gamma*\lambda^4*\alpha_1 + 8*\gamma*\lambda^4 + 5*\gamma*B*\lambda^2)/\beta^4)*exp(4*\beta*t) + ((12*\gamma*\lambda^4*\alpha_1 + 4*\gamma*B*\lambda^2*\alpha_1 - \\
& 12*\gamma*\lambda^4 - 4*\gamma*B*\lambda^2)/\beta^3)*t + (4*\gamma*\lambda^2*r*\alpha_1 - 4*\gamma*\lambda^2*r)/\beta^3 + (15*\gamma*\lambda^4*\alpha_1 + 12* \\
& \gamma*B*\lambda^2*\alpha_1 - 12*\gamma*B*\lambda^2 - 15*\gamma*\lambda^4)/\beta^4)*exp(3*\beta*t) + (A1 + (B - B*\alpha_1)/\beta + (2* \\
& \gamma*B*\lambda^2*\alpha_1 - 2*\gamma*B*\lambda^2)/\beta^3)*t + (r*\alpha_1 - r)/\beta + (-2*\gamma*\lambda^2*r*\alpha_1 + 2*\gamma*\lambda^2*r)/\beta^3)
\end{aligned}$$

$$K_0 = \tag{A.0.14}$$

$$\begin{aligned}
& (-\gamma*\lambda^4/beta^2*t^2 + (-\lambda^2/\beta + \gamma*\lambda^4/\beta^3)*t - r/\beta + (-\lambda^2 - B)/\beta^2 + 2*\gamma*\lambda^2*r/\beta^3 + (5/2* \\
& \gamma*\lambda^4 + 4*\gamma*B*\lambda^2)/\beta^4)*exp(\beta*t) + (-\gamma*\lambda^4/\beta^2*t^2 + (-2*\gamma*\lambda^2*r/\beta^2 - 4*\gamma*\lambda^4/\beta^3)*t + \\
& (\lambda^2 + B)/\beta^2 - 3*\gamma*\lambda^2*r/\beta^3 + (-6*\gamma*\lambda^4 - 15/2*\gamma*B*\lambda^2)/\beta^4)*exp(2*\beta*t) + (-5/2*\gamma*
\end{aligned}$$

$$B*\lambda^2-4*\gamma*\lambda^4)/\beta^4*exp(4*\beta*t)+((2*\gamma*B*\lambda^2+6*\gamma*\lambda^4)/\beta^3*t+2*\gamma*\lambda^2*r/\beta^3+(15/2*\gamma*\lambda^4+6*\gamma*B*\lambda^2)/\beta^4)exp(3*\beta*t)+(-B/\beta+\gamma*B*\lambda^2/\beta^3)t+f_0+r/\beta-\gamma*\lambda^2*r/\beta^3$$

Поскольку в случае трех активов выражения для оптимальных стратегий очень громоздкие, то приведем лишь одну из них для примера:

$$H_1 = \tag{A.0.15}$$

$$\begin{aligned} &= (-4*\gamma^2*\alpha_1*\sigma_{21}*\lambda_1^2*\alpha_3*\sigma_{11}-4*\gamma^2*\alpha_1*\sigma_{21}*\lambda_1*\alpha_3*\sigma_{12}*\lambda_2-4*\gamma^2*\alpha_1*\sigma_{21}*\lambda_1*\alpha_3* \\ &\sigma_{13}*\lambda_3-4*\gamma^2*\alpha_1*\sigma_{21}*\lambda_1*\alpha_3*\sigma_{14}*\lambda_4+4*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{22}*\lambda_2*\sigma_{31}*\lambda_1+4*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{22}*\lambda_2^2* \\ &\sigma_{32}+4*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{22}*\lambda_2*\sigma_{33}*\lambda_3+4*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{22}*\lambda_2*\sigma_{34}*\lambda_4-4*\gamma^2*\alpha_1*\sigma_{22}*\lambda_2*\alpha_3*\sigma_{11}* \\ &\lambda_1-4*\gamma^2*\alpha_1*\sigma_{22}*\lambda_2^2*\alpha_3*\sigma_{12}-4*\gamma^2*\alpha_1*\sigma_{22}*\lambda_2*\alpha_3*\sigma_{13}*\lambda_3-4*\gamma^2*\alpha_1*\sigma_{22}*\lambda_2*\alpha_3*\sigma_{14}* \\ &\lambda_4+4*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{23}*\lambda_3*\sigma_{31}*\lambda_1+4*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{23}*\lambda_3*\sigma_{32}*\lambda_2+4*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{23}*\lambda_3^2*\sigma_{33}+3*\beta* \\ &\gamma*\alpha_3*\alpha_2*\lambda_2^2*t*\sigma_{13}^2+3*\beta*\gamma*\alpha_3*\alpha_2*\lambda_2^2*t*\sigma_{14}^2+4*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{23}*\lambda_3*\sigma_{34}*\lambda_4-4*\gamma^2*\alpha_1*\sigma_{23}* \\ &\lambda_3*\alpha_3*\sigma_{11}*\lambda_1-4*\gamma^2*\alpha_1*\sigma_{23}*\lambda_3*\alpha_3*\sigma_{12}*\lambda_2-4*\gamma^2*\alpha_1*\sigma_{23}*\lambda_3^2*\alpha_3*\sigma_{13}-4*\gamma^2*\alpha_1*\sigma_{23}* \\ &\lambda_3*\alpha_3*\sigma_{14}*\lambda_4+4*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{24}*\lambda_4*\sigma_{31}*\lambda_1+4*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{24}*\lambda_4*\sigma_{32}*\lambda_2+4*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{24}*\lambda_4* \\ &\sigma_{33}*\lambda_3+4*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{24}*\lambda_4^2*\sigma_{34}+2*\beta^5*\gamma*t^2*\sigma_{12}^2*A_3-4*\gamma^2*\alpha_2*\sigma_{13}*\lambda_3*\alpha_1*\sigma_{31}*\lambda_1-4* \\ &\gamma^2*\alpha_2*\sigma_{13}*\lambda_3*\alpha_1*\sigma_{32}*\lambda_2-4*\gamma^2*\alpha_2*\sigma_{13}*\lambda_3^2*\alpha_1*\sigma_{33}+8*\beta*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{24}*\lambda_4*t*\sigma_{31}*\lambda_1+ \\ &8*\beta*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{24}*\lambda_4^2*t*\sigma_{34}-8*\beta*\gamma^2*\alpha_1*\sigma_{24}*\lambda_4*t*\alpha_3*\sigma_{11}*\lambda_1-8*\beta*\gamma^2*\alpha_1*\sigma_{24}*\lambda_4*t* \\ &\alpha_3*\sigma_{12}*\lambda_2-8*\beta*\gamma^2*\alpha_1*\sigma_{24}*\lambda_4*t*\alpha_3*\sigma_{13}*\lambda_3-8*\beta*\gamma^2*\alpha_1*\sigma_{24}*\lambda_4^2*t*\alpha_3*\sigma_{14}+8*\beta*\gamma^2* \\ &\alpha_1^2*\sigma_{23}*\lambda_3^2*t*\sigma_{33}-6*\beta^2*\gamma^2*\alpha_2*\sigma_{12}^2*\lambda_2^2*t*\alpha_3-4*\beta^2*\gamma^2*t^2*\alpha_2*\sigma_{11}*\lambda_1*\alpha_1*\sigma_{32}*\lambda_2-4* \\ &\beta^2*\gamma^2*t^2*\alpha_2*\sigma_{11}*\lambda_1*\alpha_1*\sigma_{33}*\lambda_3-4*\beta^2*\gamma^2*t^2*\alpha_2*\sigma_{11}*\lambda_1*\alpha_1*\sigma_{34}*\lambda_4+4*\beta^2*\gamma^2*t^2*\alpha_2* \\ &\sigma_{11}^2*\lambda_1^2*\alpha_3+4*\beta^3*\gamma^2*\alpha_2*\sigma_{33}*\lambda_3*t*\sigma_{11}^2+4*\beta^3*\gamma^2*\alpha_2*\sigma_{33}*\lambda_3*t*\sigma_{12}^2-2*\beta^5*\gamma*t^2*\sigma_{12}^2* \\ &A_2+4*\beta^3*\gamma^2*\alpha_3*\sigma_{23}*\lambda_3*t*\sigma_{12}^2+4*\beta^3*\gamma^2*\alpha_3*\sigma_{23}*\lambda_3*t*\sigma_{13}^2-4*\beta^3*\gamma^2*t^2*\alpha_2*\sigma_{11}^2*\lambda_1^2* \\ &\alpha_3-4*\beta^3*\gamma^2*exp(-\beta*t)*\alpha_2*\sigma_{33}*\lambda_3*t*\sigma_{12}^2-2*\beta^2*\gamma*exp(-\beta*t)*\alpha_1*\sigma_{12}*\lambda_2*t*\alpha_3+ \\ &8*\beta*\gamma^2*t*\alpha_2*\sigma_{11}*\lambda_1^2*exp(-\beta*t)*\alpha_1*\sigma_{31}+8*\beta*\gamma^2*t*\alpha_2*\sigma_{11}*\lambda_1*exp(-\beta*t)*\alpha_1*\sigma_{33}* \\ &\lambda_3+8*\beta*\gamma^2*t*\alpha_2*\sigma_{11}*\lambda_1*exp(-\beta*t)*\alpha_1*\sigma_{34}*\lambda_4-16*\beta*\gamma^2*t*\alpha_2*\sigma_{11}*\lambda_1*exp(-\beta* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{13}^2 - 2*\beta^2*\gamma*\alpha_3*\sigma_{24}*\lambda_4*t*\sigma_{14}^2 - 2*\beta^2*\gamma*\alpha_2*\sigma_{31}*\lambda_1*t*\sigma_{12}^2 - 3*\beta*\gamma*\alpha_3*\alpha_2*\lambda_4^2*t*A_1 - \\
& 2*\beta^5*\gamma*t^2*\sigma_{11}^2*A_2 + 16*\beta*\gamma^2*\alpha_2*\sigma_{13}*\lambda_3*t*\alpha_3*\sigma_{12}*\lambda_2 + 16*\beta*\gamma^2*\alpha_2*\sigma_{13}*\lambda_3*t*\alpha_3* \\
& \sigma_{14}*\lambda_4 + 4*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{21}*\lambda_1^2*\sigma_{31} + 4*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{21}*\lambda_1*\sigma_{32}*\lambda_2 + 4*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{21}*\lambda_1*\sigma_{33}*\lambda_3 + 4* \\
& \gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{21}*\lambda_1*\sigma_{34}*\lambda_4 + 4*\beta^4*\gamma^2*t^2*\alpha_3*\sigma_{22}*\lambda_2*\sigma_{12}^2 + 4*\beta^4*\gamma^2*t^2*\alpha_3*\sigma_{22}*\lambda_2*\sigma_{13}^2 + 4* \\
& \beta^4*\gamma^2*t^2*\alpha_3*\sigma_{22}*\lambda_2*\sigma_{14}^2 + 4*\beta^4*\gamma^2*t^2*\alpha_3*\sigma_{21}*\lambda_1*\sigma_{11}^2 + 4*\beta^4*\gamma^2*t^2*\alpha_3*\sigma_{21}*\lambda_1*\sigma_{12}^2 + \\
& 3*\beta*\gamma*\alpha_3*\alpha_2*\lambda_1^2*t*\sigma_{12}^2 + 3*\beta*\gamma*\alpha_3*\alpha_2*\lambda_1^2*t*\sigma_{13}^2 + 3*\beta*\gamma*\alpha_3*\alpha_2*\lambda_1^2*t*\sigma_{14}^2 - 8*\beta*\gamma^2* \\
& \alpha_2*\sigma_{13}*\lambda_3*t*\alpha_1*\sigma_{32}*\lambda_2 - 8*\beta*\gamma^2*\alpha_2*\sigma_{13}*\lambda_3*t*\alpha_1*\sigma_{34}*\lambda_4 + 16*\beta*\gamma^2*\alpha_2*\sigma_{13}*\lambda_3*t* \\
& \alpha_3*\sigma_{11}*\lambda_1 + \beta^4*t^2*\sigma_{14}^2*\sigma_{34}^2 - 4*\gamma^2*\alpha_3^2*\sigma_{11}^2*\lambda_1^2 + 8*\beta*\gamma^2*\alpha_2*\sigma_{13}^2*\lambda_3^2*t*\alpha_3 - 2*\beta^2*\gamma*\alpha_1^2* \\
& \sigma_{34}*\lambda_4*t - 4*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{34}^2*\lambda_4^2 - 4*\gamma^2*\alpha_3^2*\sigma_{12}^2*\lambda_2^2 + 8*\beta*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{22}*\lambda_2*t*\sigma_{31}*\lambda_1 + \beta^4*t^2* \\
& \sigma_{12}^2*\sigma_{31}^2 - 2*\beta^2*\gamma*\alpha_1^2*\sigma_{31}*\lambda_1*t + 2*\beta^2*\gamma*t^2*\alpha_1^2*\lambda_1^2*A_3 - 8*\beta*\gamma^2*\alpha_2*\sigma_{13}*\lambda_3^2*t*\alpha_1* \\
& \sigma_{33} + 2*\beta^5*\gamma*t^2*\sigma_{11}^2*A_3 + 2*\beta^5*\gamma*t^2*\sigma_{12}^2*\alpha_2 - 8*\beta*\gamma^2*\alpha_2*\sigma_{14}*\lambda_4^2*t*\alpha_1*\sigma_{34} - 2*\beta^5*\gamma* \\
& t^2*\sigma_{11}^2*\alpha_3 + 8*\beta*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{23}*\lambda_3*t*\sigma_{32}*\lambda_2 + 8*\beta*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{23}*\lambda_3*t*\sigma_{34}*\lambda_4 - 8*\beta*\gamma^2*\alpha_1* \\
& \sigma_{23}*\lambda_3*t*\alpha_3*\sigma_{11}*\lambda_1 - 8*\beta*\gamma^2*\alpha_1*\sigma_{23}*\lambda_3*t*\alpha_3*\sigma_{12}*\lambda_2 + 3*\beta*\gamma*\alpha_2*\alpha_1*\lambda_2^2*t*A_1 + 3* \\
& \beta*\gamma*\alpha_2*\alpha_1*\lambda_3^2*t*A_1 + 8*\beta*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{22}*\lambda_2^2*t*\sigma_{32} + 8*\beta*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{22}*\lambda_2*t*\sigma_{33}*\lambda_3 + 8*\beta* \\
& \gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{22}*\lambda_2*t*\sigma_{34}*\lambda_4 - 8*\beta*\gamma^2*\alpha_1*\sigma_{22}*\lambda_2*t*\alpha_3*\sigma_{11}*\lambda_1 - 8*\beta*\gamma^2*\alpha_1*\sigma_{22}*\lambda_2^2*t*\alpha_3* \\
& \sigma_{12} + 2*\beta^5*\gamma*t^2*\sigma_{13}^2*A_3 - 3*\beta*\gamma*\alpha_1^2*\lambda_1^2*t*A_2 - 2*\beta^2*\gamma*\alpha_1^2*\sigma_{33}*\lambda_3*t + 3*\beta*\gamma*\alpha_1^2*\lambda_2^2* \\
& t*A_3 + 2*\beta^5*\gamma*t^2*\sigma_{14}^2*A_3 + 8*\beta*\gamma^2*\alpha_1^2*\sigma_{24}*\lambda_4*t*\sigma_{32}*\lambda_2 + \beta*\gamma*\alpha_3*\alpha_2*\exp(-2*\beta*t)* \\
& \lambda_2^2*t*\sigma_{11}^2 + \beta*\gamma*\alpha_3*\alpha_2*\exp(-2*\beta*t)*\lambda_4^2*t*\sigma_{13}^2 - 2*\beta^2*\gamma^2*\alpha_3*\alpha_2*\exp(-2*\beta*t)*\lambda_4^2* \\
& t*\sigma_{11}^2 - 2*\beta^2*\gamma^2*\alpha_3*\alpha_2*\exp(-2*\beta*t)*\lambda_4^2*t*\sigma_{12}^2 - 2*\beta^2*\gamma^2*\alpha_3*\alpha_2*\exp(-2*\beta*t)*\lambda_4^2* \\
& t*\sigma_{13}^2 - 2*\beta^2*\gamma^2*\alpha_3*\alpha_2*\exp(-2*\beta*t)*\lambda_4^2*t*\sigma_{14}^2 + 2*\beta^2*\gamma*t^2*\alpha_1^2*\lambda_4^2*A_3 + 2*\beta^5*\gamma*t^2* \\
& \sigma_{13}^2*\alpha_2 + 4*\beta^4*\gamma^2*t^2*\alpha_3*\sigma_{21}*\lambda_1*\sigma_{13}^2 + 4*\beta^4*\gamma^2*t^2*\alpha_3*\sigma_{21}*\lambda_1*\sigma_{14}^2 + 4*\beta^4*\gamma^2*t^2*\alpha_3* \\
& \sigma_{22}*\lambda_2*\sigma_{11}^2 + 4*\beta^4*\gamma^2*t^2*\alpha_2*\sigma_{31}*\lambda_1*\sigma_{11}^2 + 4*\beta^4*\gamma^2*t^2*\alpha_3*\sigma_{24}*\lambda_4*\sigma_{13}^2 + 4*\beta^4*\gamma^2*t^2* \\
& \alpha_3*\sigma_{24}*\lambda_4*\sigma_{14}^2 + 4*\beta^4*\gamma^2*t^2*\alpha_3*\sigma_{24}*\lambda_4*\sigma_{11}^2 + 4*\beta^4*\gamma^2*t^2*\alpha_3*\sigma_{24}*\lambda_4*\sigma_{12}^2 + 4*\beta^4*\gamma^2* \\
& t^2*\alpha_2*\sigma_{33}*\lambda_3*\sigma_{13}^2 + 4*\beta^4*\gamma^2*t^2*\alpha_2*\sigma_{33}*\lambda_3*\sigma_{14}^2 + 4*\beta^4*\gamma^2*t^2*\alpha_2*\sigma_{34}*\lambda_4*\sigma_{11}^2 + 4*\beta^4*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{34} * \lambda_4 * \sigma_{12}^2 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{34} * \lambda_4 * \sigma_{13}^2 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{34} * \lambda_4 * \sigma_{14}^2 + 4 * \\
& \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{32} * \lambda_2 * \sigma_{11}^2 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{32} * \lambda_2 * \sigma_{12}^2 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{32} * \lambda_2 * \sigma_{13}^2 + \\
& 3 * \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_2^2 * t * \sigma_{12}^2 + 16 * \beta * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * \alpha_3 * \sigma_{14} * \lambda_4 + \beta^4 * t^2 * \sigma_{12}^2 * \sigma_{34}^2 + \beta^4 * t^2 * \\
& \sigma_{11}^2 * \sigma_{32}^2 + \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_1^2 * t * \sigma_{13}^2 + \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_2^2 * t * \sigma_{13}^2 + \\
& \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_1^2 * t * \sigma_{12}^2 + \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_4^2 * t * \sigma_{14}^2 + \beta * \gamma * \alpha_3 * \\
& \alpha_2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_3^2 * t * \sigma_{14}^2 + \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_2^2 * t * \sigma_{12}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{23} * \\
& \lambda_3 * t * \sigma_{14}^2 + 4 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{13}^2 * \lambda_3^2 * \alpha_3 + 8 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * \alpha_3 * \sigma_{14} * \lambda_4 + 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{23} * \lambda_3 * t * \\
& \sigma_{31} * \lambda_1 + 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{24} * \lambda_4 * t * \sigma_{33} * \lambda_3 + \beta^4 * t^2 * \sigma_{14}^2 * \sigma_{31}^2 - 2 * \beta^5 * \gamma * t^2 * \sigma_{14}^2 * A_2 - 2 * \beta^5 * \gamma * \\
& t^2 * \sigma_{13}^2 * A_2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{22} * \lambda_2 * t * \sigma_{12}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{22} * \lambda_2 * t * \sigma_{13}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{22} * \\
& \lambda_2 * t * \sigma_{14}^2 - 6 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{14}^2 * \lambda_4^2 * t * \alpha_3 - 6 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_4^2 * t * \sigma_{11}^2 - 6 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_4^2 * \\
& t * \sigma_{12}^2 - 6 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_4^2 * t * \sigma_{13}^2 - 6 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_3^2 * t * \sigma_{11}^2 - 6 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_3^2 * t * \\
& \sigma_{12}^2 - 6 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_3^2 * t * \sigma_{14}^2 - 16 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{13} * \lambda_3 - 16 * \\
& \beta * \gamma^2 * t * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{14} * \lambda_4 + 4 * \beta * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \alpha_1 * \lambda_3^2 * t * A_1 - 4 * \\
& \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{13} * \lambda_3 * t * A_2 + 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{34} * \lambda_4 - 8 * \\
& \beta * \gamma^2 * t * \alpha_2 * \sigma_{13}^2 * \lambda_3^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 - 16 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{14} * \lambda_4 + \\
& 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{31} * \lambda_1 + 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \\
& \sigma_{32} * \lambda_2 + 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_2 * \sigma_{13} * \lambda_3^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{33} - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1^2 * \sigma_{24} * \lambda_4^2 * \exp(-\beta * \\
& t) * \sigma_{34} - 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * \alpha_2 - 4 * \beta * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_3^2 * t * \sigma_{14}^2 + \\
& 4 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2 * t * \alpha_3 - 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * A_1 - 4 * \beta^3 * \\
& \gamma^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{22} * \lambda_2 * t * \sigma_{11}^2 - 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * \sigma_{11}^2 - 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \\
& \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * \sigma_{13}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{34} * \lambda_4 * t * \alpha_2 - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1^2 * \\
& \sigma_{22} * \lambda_2^2 * \exp(-\beta * t) * \sigma_{32} + 8 * \beta^2 * \gamma^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_3^2 * t * \sigma_{14}^2 + 8 * \beta^2 * \gamma^2 * \exp(-\beta * \\
& t) * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_4^2 * t * \sigma_{11}^2 + 8 * \beta^2 * \gamma^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_4^2 * t * \sigma_{12}^2 + \beta^4 * t^2 * \sigma_{14}^2 * \sigma_{33}^2 + \beta^4 * t^2 * \\
& \sigma_{13}^2 * \sigma_{32}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1^2 * \sigma_{22} * \lambda_2 * t - \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_1^2 * t * A_1 + \beta * \gamma * \alpha_2 * \alpha_1 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \exp(-2*\beta*t)*\lambda_1^2*t*A_1 + \beta*\gamma*\alpha_2*\alpha_1*\exp(-2*\beta*t)*\lambda_2^2*t*A_1 + \beta*\gamma*\alpha_2*\alpha_1*\exp(-2* \\
& \beta*t)*\lambda_3^2*t*A_1 + \beta*\gamma*\alpha_2*\alpha_1*\exp(-2*\beta*t)*\lambda_4^2*t*A_1 + 2*\beta*\gamma*\alpha_3*\alpha_1*\exp(-2*\beta*t)* \\
& \lambda_3^2*t*A_2 - \beta*\gamma*\alpha_3*\alpha_1*\exp(-2*\beta*t)*\lambda_4^2*t*A_1 - \beta*\gamma*\alpha_3*\alpha_2*\exp(-2*\beta*t)*\lambda_4^2*t*A_1 - \\
& \beta*\gamma*\alpha_3*\alpha_1*\exp(-2*\beta*t)*\lambda_1^2*t*A_1 - \beta*\gamma*\alpha_2*\alpha_1*\exp(-2*\beta*t)*\lambda_1^2*t*A_3 + \beta*\gamma*\alpha_1^2* \\
& \exp(-2*\beta*t)*\lambda_4^2*t*A_3 + \beta*\gamma*\alpha_1^2*\exp(-2*\beta*t)*\lambda_2^2*t*A_3 + \beta*\gamma*\alpha_1^2*\exp(-2*\beta*t)*\lambda_3^2* \\
& t*A_3 + 4*\beta^2*\gamma*\exp(-\beta*t)*\alpha_3*\sigma_{14}*\lambda_4*t*A_2 + 2*\beta^2*\gamma*\exp(-\beta*t)*\alpha_3*\sigma_{24}*\lambda_4*t*\sigma_{12}^2 + \\
& 2*\beta^2*\gamma*\exp(-\beta*t)*\alpha_3*\sigma_{24}*\lambda_4*t*\sigma_{13}^2 + 2*\beta^2*\gamma*\exp(-\beta*t)*\alpha_3*\sigma_{24}*\lambda_4*t*\sigma_{14}^2 + 2*\beta^2* \\
& \gamma*\exp(-\beta*t)*\alpha_1^2*\sigma_{32}*\lambda_2*t + 4*\beta*\gamma*\exp(-\beta*t)*\alpha_1^2*\lambda_2^2*t*A_2 + 4*\beta*\gamma*\exp(-\beta*t)*\alpha_3* \\
& \alpha_1*\lambda_1^2*t*A_1 + 4*\beta*\gamma*\exp(-\beta*t)*\alpha_3*\alpha_2*\lambda_2^2*t*A_1 - 4*\beta*\gamma*\exp(-\beta*t)*\alpha_1^2*\lambda_4^2*t*A_3 - \\
& 4*\beta*\gamma*\exp(-\beta*t)*\alpha_1^2*\lambda_2^2*t*A_3 + 4*\beta*\gamma*\exp(-\beta*t)*\alpha_3*\alpha_2*\lambda_1^2*t*A_1 - 4*\gamma^2*\alpha_2*\sigma_{12}* \\
& \lambda_2*\alpha_1*\sigma_{31}*\lambda_1 - 6*\beta^2*\gamma^2*\alpha_3*\alpha_2*\lambda_2^2*t*\sigma_{11}^2 - 6*\beta^2*\gamma^2*\alpha_3*\alpha_2*\lambda_2^2*t*\sigma_{13}^2 - 6*\beta^2*\gamma^2*\alpha_3* \\
& \alpha_2*\lambda_2^2*t*\sigma_{14}^2 + 4*\beta^4*\gamma^2*t^2*\alpha_3*\sigma_{23}*\lambda_3*\sigma_{11}^2 + 4*\beta^4*\gamma^2*t^2*\alpha_3*\sigma_{23}*\lambda_3*\sigma_{12}^2 + 4*\beta^4*\gamma^2*t^2* \\
& \alpha_3*\sigma_{23}*\lambda_3*\sigma_{13}^2 - 3*\beta*\gamma*\alpha_2*\alpha_1*\lambda_1^2*t*A_3 - 3*\beta*\gamma*\alpha_2*\alpha_1*\lambda_2^2*t*A_3 - 3*\beta*\gamma*\alpha_3*\alpha_1*\lambda_2^2* \\
& t*A_1 - 3*\beta*\gamma*\alpha_3*\alpha_2*\lambda_1^2*t*A_1 - 3*\beta*\gamma*\alpha_3*\alpha_1*\lambda_1^2*t*A_1 + 2*\beta^3*\gamma*t^2*\alpha_1*\sigma_{12}*\lambda_2*\alpha_3 + \\
& 2*\beta^3*\gamma*t^2*\alpha_1*\sigma_{32}*\lambda_2*\alpha_2 + 2*\beta^3*\gamma*t^2*\alpha_1*\sigma_{34}*\lambda_4*\alpha_2 + 2*\beta^3*\gamma*t^2*\alpha_1*\sigma_{21}*\lambda_1*A_3 + 4* \\
& \beta^3*\gamma*t^2*\alpha_1*\sigma_{11}*\lambda_1*A_2 + 4*\beta^3*\gamma*t^2*\alpha_1*\sigma_{12}*\lambda_2*A_2 + 4*\beta^3*\gamma*t^2*\alpha_1*\sigma_{13}*\lambda_3*A_2 + 4* \\
& \beta^3*\gamma*t^2*\alpha_1*\sigma_{14}*\lambda_4*A_2 - 2*\beta^3*\gamma*t^2*\alpha_2*\sigma_{14}*\lambda_4*A_1 + 2*\beta^3*\gamma*t^2*\alpha_2*\sigma_{14}*\lambda_4*\alpha_3 - 2* \\
& \beta^3*\gamma*t^2*\alpha_2*\sigma_{14}*\lambda_4*\alpha_1 + 2*\beta^3*\gamma*t^2*\alpha_1*\sigma_{13}*\lambda_3*\alpha_3 + 2*\beta^3*\gamma*t^2*\alpha_1*\sigma_{14}*\lambda_4*\alpha_3 + 2*\beta^3* \\
& \gamma*t^2*\alpha_2*\sigma_{13}*\lambda_3*A_3 + 2*\beta^3*\gamma*t^2*\alpha_2*\sigma_{14}*\lambda_4*A_3 + 2*\beta^3*\gamma*t^2*\alpha_1*\sigma_{31}*\lambda_1*A_1 - 2*\beta^3*\gamma* \\
& t^2*\alpha_1*\sigma_{21}*\lambda_1*A_1 - 2*\beta^3*\gamma*t^2*\alpha_2*\sigma_{12}*\lambda_2*A_1 - 2*\beta^3*\gamma*t^2*\alpha_2*\sigma_{13}*\lambda_3*A_1 - 4*\beta^3*\gamma* \\
& t^2*\alpha_1*\sigma_{12}*\lambda_2*A_3 - 4*\beta^3*\gamma*t^2*\alpha_1*\sigma_{13}*\lambda_3*A_3 + 2*\beta^3*\gamma*t^2*\alpha_2*\sigma_{31}*\lambda_1*A_1 + 2*\beta^3*\gamma*t^2* \\
& \alpha_2*\sigma_{32}*\lambda_2*A_1 - 4*\beta^3*\gamma*t^2*\alpha_3*\sigma_{14}*\lambda_4*A_2 - 8*\beta*\gamma*\exp(-\beta*t)*\alpha_3*\alpha_1*\lambda_4^2*t*A_2 - 4*\beta* \\
& \gamma*\exp(-\beta*t)*\alpha_1^2*\lambda_1^2*t*A_3 + 4*\beta*\gamma*\exp(-\beta*t)*\alpha_3*\alpha_2*\lambda_4^2*t*A_1 - 2*\beta^2*\gamma*\exp(-\beta* \\
& t)*\alpha_1*\sigma_{13}*\lambda_3*t*\alpha_3 + 2*\beta^2*\gamma*\exp(-\beta*t)*\alpha_1*\sigma_{22}*\lambda_2*t*A_1 - 2*\beta^2*\gamma*\exp(-\beta*t)*\alpha_3*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{21} * \lambda_1 * t * A_1 - 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \sigma_{34} * \lambda_4 * t * A_1 + 4 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{13} * \lambda_3 * \\
& t * A_3 + 4 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * A_3 + 4 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * A_3 - \\
& 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * A_3 - 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * t * A_3 - 2 * \beta^2 * \\
& \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * A_3 + 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{32} * \lambda_2 - 4 * \beta^2 * \\
& \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * \alpha_1 * \sigma_{31} * \lambda_1 + 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{21} * \lambda_1^2 * \sigma_{31} + 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \\
& \sigma_{32} * \lambda_2 + 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \sigma_{33} * \lambda_3 + 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \sigma_{34} * \lambda_4 - 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \\
& \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1^2 * \alpha_3 * \sigma_{11} - 2 * \beta^5 * \gamma * t^2 * \sigma_{14}^2 * \alpha_3 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{22} * \lambda_2 * t * \sigma_{11}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{23} * \\
& \lambda_3 * t * \sigma_{11}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{24} * \lambda_4 * t * \sigma_{11}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * \sigma_{11}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{32} * \lambda_2 * \\
& t * \sigma_{11}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{23} * \lambda_3 * t * \sigma_{12}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{23} * \lambda_3 * t * \sigma_{13}^2 + 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{24} * \lambda_4 * \\
& \sigma_{32} * \lambda_2 + 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{24} * \lambda_4 * \sigma_{33} * \lambda_3 + 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{24} * \lambda_4^2 * \sigma_{34} - 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \\
& \alpha_1 * \sigma_{24} * \lambda_4 * \alpha_3 * \sigma_{11} * \lambda_1 - 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{24} * \lambda_4^2 * \alpha_3 * \sigma_{14} + 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{22} * \lambda_2^2 * \sigma_{32} + \\
& 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{22} * \lambda_2 * \sigma_{33} * \lambda_3 + 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{22} * \lambda_2 * \sigma_{34} * \lambda_4 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{33} * \lambda_3 * \\
& t * \sigma_{12}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{33} * \lambda_3 * t * \sigma_{13}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{33} * \lambda_3 * t * \sigma_{14}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{34} * \lambda_4 * t * \\
& \sigma_{12}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{34} * \lambda_4 * t * \sigma_{13}^2 - 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \alpha_1 * \sigma_{31} * \lambda_1 - 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \\
& \sigma_{12} * \lambda_2 * \alpha_1 * \sigma_{33} * \lambda_3 + 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{12}^2 * \lambda_2^2 * \alpha_3 - 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * \alpha_1 * \sigma_{31} * \lambda_1 - 8 * \\
& \beta * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * \alpha_1 * \sigma_{33} * \lambda_3 - 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * \alpha_1 * \sigma_{34} * \lambda_4 + 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{12}^2 * \\
& \lambda_2^2 * t * \alpha_3 - 4 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \alpha_1 * \sigma_{34} * \lambda_4 + \beta^4 * t^2 * \sigma_{14}^2 * \sigma_{32}^2 - 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3^2 * t * \alpha_3 * \sigma_{13} - \\
& 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{31} - 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{34} * \lambda_4 + \beta^4 * t^2 * \sigma_{13}^2 * \sigma_{33}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \\
& \alpha_2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_2^2 * t * \sigma_{11}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_2^2 * t * \sigma_{12}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \\
& \alpha_2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_2^2 * t * \sigma_{13}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_2^2 * t * \sigma_{14}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \\
& \alpha_2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_3^2 * t * \sigma_{11}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_3^2 * t * \sigma_{12}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \\
& \alpha_2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_3^2 * t * \sigma_{13}^2 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_3 * \sigma_{23} * \lambda_3 * \sigma_{14}^2 + 8 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \alpha_3 * \sigma_{14} * \\
& \lambda_4 + \beta^4 * t^2 * \sigma_{11}^2 * \sigma_{34}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \sigma_{33} * \lambda_3 * t * \sigma_{14}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \\
& \sigma_{34} * \lambda_4 * t * \sigma_{12}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \sigma_{34} * \lambda_4 * t * \sigma_{13}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \sigma_{34} *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_4 * t * \sigma_{14}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * \sigma_{12}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * \\
& \sigma_{13}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * \sigma_{14}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{22} * \lambda_2 * t * \sigma_{12}^2 + 2 * \\
& \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{22} * \lambda_2 * t * \sigma_{13}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{22} * \lambda_2 * t * \sigma_{14}^2 - 4 * \beta * \gamma * \\
& \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_1^2 * t * \sigma_{13}^2 + 4 * \gamma^2 * \exp(-\beta * t)^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{23} * \lambda_3 * \sigma_{31} * \lambda_1 + 4 * \gamma^2 * \exp(-\beta * \\
& t)^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{23} * \lambda_3 * \sigma_{32} * \lambda_2 - 4 * \beta * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_1^2 * t * \sigma_{12}^2 - 4 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \\
& \sigma_{14} * \lambda_4 * t * A_2 - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_2 * \sigma_{11}^2 * \lambda_1^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 - 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2^2 * \alpha_1 * \sigma_{32} + \\
& 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_3^2 * \sigma_{13}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_3^2 * \sigma_{14}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_4^2 * \sigma_{12}^2 + 2 * \\
& \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_4^2 * \sigma_{13}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_1^2 * \sigma_{12}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_1^2 * \sigma_{13}^2 + 2 * \beta^2 * \\
& \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_1^2 * \sigma_{14}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_2^2 * \sigma_{12}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_2^2 * \sigma_{13}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \\
& t^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_2^2 * \sigma_{14}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_3^2 * \sigma_{12}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_3^2 * \sigma_{11}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \\
& t^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_2^2 * \sigma_{11}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_3^2 * \sigma_{11}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_4^2 * \sigma_{11}^2 + \beta^4 * t^2 * \sigma_{14}^2 * \\
& \alpha_3 - \beta^4 * t^2 * \sigma_{14}^2 * \alpha_2 - \beta^4 * t^2 * \sigma_{13}^2 * \alpha_2 - \beta^4 * t^2 * \sigma_{12}^2 * \alpha_2 - \beta^4 * t^2 * \sigma_{11}^2 * \alpha_2 - \beta^4 * t^2 * \sigma_{13}^2 * A_3 - \beta^4 * \\
& t^2 * \sigma_{14}^2 * A_3 + \beta^4 * t^2 * \sigma_{13}^2 * \alpha_3 + \beta^4 * t^2 * \sigma_{12}^2 * A_2 + \beta^4 * t^2 * \sigma_{13}^2 * A_2 + \beta^4 * t^2 * \sigma_{12}^2 * \alpha_3 + \beta^4 * t^2 * \sigma_{11}^2 * \\
& A_2 + \beta^4 * t^2 * \sigma_{11}^2 * \alpha_3 - \beta^4 * t^2 * \sigma_{12}^2 * A_3 + \beta^4 * t^2 * \sigma_{14}^2 * A_2 - \beta^4 * t^2 * \sigma_{11}^2 * A_3 - 3 * \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_1 * \lambda_4^2 * \\
& t * A_1 + 3 * \beta * \gamma * \alpha_1^2 * \lambda_1^2 * t * A_3 + 8 * \beta^2 * \gamma^2 * t * \alpha_2 * \sigma_{13}^2 * \lambda_3^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1^2 * \\
& \sigma_{22} * \lambda_2 * \exp(-\beta * t) * \sigma_{33} * \lambda_3 - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1^2 * \sigma_{22} * \lambda_2 * \exp(-\beta * t) * \sigma_{34} * \lambda_4 + 8 * \beta * \gamma^2 * t * \\
& \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{12} - 4 * \beta * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_1^2 * t * \sigma_{14}^2 + 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \\
& \sigma_{22} * \lambda_2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{11} * \lambda_1 + 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{13} * \lambda_3 + 8 * \beta * \\
& \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{14} * \lambda_4 - 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \alpha_3 * \sigma_{14} * \lambda_4 - 4 * \beta^2 * \\
& \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \alpha_3 * \sigma_{12} * \lambda_2 - 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \alpha_3 * \sigma_{13} * \lambda_3 - 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \\
& \lambda_1 * t * \alpha_1 * \sigma_{32} * \lambda_2 - 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * \alpha_1 * \sigma_{33} * \lambda_3 + 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{11}^2 * \lambda_1^2 * t * \alpha_3 + \beta^4 * t^2 * \\
& \sigma_{13}^2 * \sigma_{34}^2 + 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{23} * \lambda_3 * \sigma_{31} * \lambda_1 + 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{23} * \lambda_3 * \sigma_{32} * \lambda_2 + 4 * \beta^2 * \gamma^2 * \\
& t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{23} * \lambda_3^2 * \sigma_{33} + 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{23} * \lambda_3 * \sigma_{34} * \lambda_4 - 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3 * \alpha_3 * \sigma_{11} * \\
& \lambda_1 - 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3 * \alpha_3 * \sigma_{12} * \lambda_2 - 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3^2 * \alpha_3 * \sigma_{13} - 4 * \beta^2 * \gamma^2 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& t^2 * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3 * \alpha_3 * \sigma_{14} * \lambda_4 - 6 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{13}^2 * \lambda_3^2 * t * \alpha_3 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * A_1 - 4 * \\
& \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{34} * \lambda_4 * t * A_2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * A_1 - 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{33} * \lambda_3 * t * A_2 + 2 * \beta^2 * \\
& \gamma * \alpha_1 * \sigma_{34} * \lambda_4 * t * A_1 - 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_1^2 * A_3 - 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_2^2 * A_3 + 2 * \beta^2 * \gamma * \\
& \alpha_1 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * \alpha_3 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{34} * \lambda_4 * t * A_1 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{34} * \lambda_4 * t * \alpha_2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \\
& \sigma_{33} * \lambda_3 * t * \alpha_2 - 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * A_2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{32} * \lambda_2 * t * A_1 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{11} * \\
& \lambda_1 * t * A_3 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{22} * \lambda_2 * t * A_1 + 4 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_1 * \lambda_4^2 * A_2 + 4 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_1 * \\
& \lambda_3^2 * A_2 - 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_1 * \lambda_4^2 * A_1 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_3^2 * A_1 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_4^2 * \\
& A_1 + 4 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_1 * \lambda_2^2 * A_2 - 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_1 * \lambda_3^2 * A_1 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{24} * \lambda_4 * t * A_3 + \\
& 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_2^2 * A_1 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * A_1 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * \alpha_3 + 2 * \beta^2 * \\
& \gamma * \alpha_2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * t * \alpha_3 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * t * \alpha_1 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * \alpha_3 - 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \\
& \alpha_3 * \alpha_1 * \lambda_1^2 * A_1 - 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3 * t * \alpha_3 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * \alpha_2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{32} * \\
& \lambda_2 * t * A_1 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{33} * \lambda_3 * t * A_1 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * t * A_1 - 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{32} * \lambda_2 * t * \\
& A_2 - 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * A_3 - 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * A_3 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * A_3 - \\
& 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * \alpha_1 * \sigma_{34} * \lambda_4 + 16 * \beta * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * \alpha_3 * \sigma_{12} * \lambda_2 + 16 * \beta * \gamma^2 * \alpha_2 * \\
& \sigma_{11} * \lambda_1 * t * \alpha_3 * \sigma_{14} * \lambda_4 + 8 * \beta^2 * \gamma^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_4^2 * t * \sigma_{13}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \\
& \alpha_3 * \sigma_{23} * \lambda_3 * t * \sigma_{12}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3 * t * A_1 - 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \\
& \sigma_{24} * \lambda_4 * t * \sigma_{13}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * \alpha_3 - 4 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{12} * \\
& \lambda_2 * t * A_2 - 4 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * A_2 - 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * \\
& \sigma_{12}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * \sigma_{12}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * \sigma_{13}^2 + 2 * \\
& \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * \sigma_{14}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \sigma_{32} * \lambda_2 * t * \sigma_{12}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \\
& \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \sigma_{32} * \lambda_2 * t * \sigma_{13}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \sigma_{32} * \lambda_2 * t * \sigma_{14}^2 + 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \\
& \sigma_{21} * \lambda_1 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{13} * \lambda_3 + 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{14} * \lambda_4 - 16 * \beta * \\
& \gamma^2 * t * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{13} * \lambda_3 - 16 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{14} * \\
& \lambda_4 - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1^2 * \sigma_{21} * \lambda_1^2 * \exp(-\beta * t) * \sigma_{31} + 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * \alpha_1 - 4 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \beta^3 * \gamma^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{22} * \lambda_2 * t * \sigma_{14}^2 - 4 * \gamma^2 * \exp(-\beta * t)^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1^2 * \alpha_1 * \sigma_{31} - 4 * \gamma^2 * \\
& \exp(-\beta * t)^2 * \alpha_1 * \sigma_{24} * \lambda_4^2 * \alpha_3 * \sigma_{14} + 4 * \gamma^2 * \exp(-\beta * t)^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{24} * \lambda_4 * \sigma_{31} * \lambda_1 + 8 * \gamma^2 * \alpha_2 * \\
& \sigma_{12} * \lambda_2^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{32} - 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{24} * \lambda_4 * t * A_1 + 4 * \gamma^2 * \exp(-\beta * \\
& t)^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{24} * \lambda_4 * \sigma_{33} * \lambda_3 + 8 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{31} * \lambda_1 + 8 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \\
& \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{33} * \lambda_3 + 8 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{34} * \lambda_4 + 4 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * \\
& t) * \alpha_1 * \sigma_{34} * \lambda_4 * t * A_2 - 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{32} * \lambda_2 * \sigma_{11}^2 - 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{33} * \lambda_3 * \sigma_{11}^2 - 2 * \beta^3 * \\
& \gamma * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{34} * \lambda_4 * \sigma_{11}^2 - 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \sigma_{24} * \lambda_4 * \sigma_{11}^2 + 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_3 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * \sigma_{11}^2 + 4 * \beta^3 * \\
& \gamma^2 * \alpha_3 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * \sigma_{12}^2 + 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_3 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * \sigma_{13}^2 + 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_3 * \sigma_{23} * \lambda_3 * t * \sigma_{14}^2 + 4 * \beta^3 * \\
& \gamma^2 * \alpha_3 * \sigma_{24} * \lambda_4 * t * \sigma_{11}^2 + 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_3 * \sigma_{24} * \lambda_4 * t * \sigma_{12}^2 + 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_3 * \sigma_{24} * \lambda_4 * t * \sigma_{13}^2 - 8 * \beta * \\
& \gamma^2 * t * \alpha_1^2 * \sigma_{23} * \lambda_3 * \exp(-\beta * t) * \sigma_{31} * \lambda_1 + 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{32} + 8 * \\
& \beta * \gamma^2 * t * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{34} * \lambda_4 - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_2 * \sigma_{12}^2 * \lambda_2^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 - 8 * \\
& \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1^2 * \sigma_{22} * \lambda_2 * \exp(-\beta * t) * \sigma_{31} * \lambda_1 - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1^2 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \exp(-\beta * t) * \sigma_{32} * \lambda_2 - 8 * \\
& \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1^2 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \exp(-\beta * t) * \sigma_{33} * \lambda_3 - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1^2 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \exp(-\beta * t) * \sigma_{34} * \lambda_4 + \\
& 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{11} + 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{12} * \\
& \lambda_2 - 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3 * t * \alpha_3 * \sigma_{14} * \lambda_4 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1^2 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t - 4 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * \alpha_1 * \\
& \sigma_{31} * \lambda_1 - 2 * \beta^5 * \gamma * t^2 * \sigma_{13}^2 * \alpha_3 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1^2 * \sigma_{32} * \lambda_2 * t - 4 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1^2 * \alpha_1 * \sigma_{31} - 4 * \gamma^2 * \\
& \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \alpha_1 * \sigma_{32} * \lambda_2 - 4 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \alpha_1 * \sigma_{33} * \lambda_3 - 4 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \alpha_1 * \sigma_{34} * \lambda_4 + \\
& 4 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{11}^2 * \lambda_1^2 * \alpha_3 + 8 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \alpha_3 * \sigma_{12} * \lambda_2 + 8 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \alpha_3 * \sigma_{14} * \lambda_4 - 4 * \\
& \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2^2 * \alpha_1 * \sigma_{32} - 4 * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{32}^2 * \lambda_2^2 + \beta^4 * t^2 * \sigma_{11}^2 * \sigma_{31}^2 - 4 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * \alpha_1 * \sigma_{32} * \\
& \lambda_2 - 4 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * \alpha_1 * \sigma_{33} * \lambda_3 - 4 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4^2 * \alpha_1 * \sigma_{34} + 4 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{14}^2 * \lambda_4^2 * \alpha_3 + 2 * \\
& \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{13} * \lambda_3 * t * \alpha_3 - 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_2^2 * A_1 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * A_3 + 2 * \beta^2 * \\
& \gamma * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3 * t * A_3 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * A_1 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{32} * \lambda_2 * t * \alpha_2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \\
& \alpha_1^2 * \sigma_{23} * \lambda_3 * t - 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{24} * \lambda_4 * t * \alpha_3 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1^2 * \sigma_{24} * \lambda_4 * t + 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{13} * \lambda_3 * t * \\
& A_2 + 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * A_2 - 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_1^2 * \lambda_1^2 * A_2 - 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * A_2 + 2 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{13} * \lambda_3 * t * A_1 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{33} * \lambda_3 * t * A_1 + 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * A_2 + 4 * \beta^2 * \\
& \gamma * \alpha_1 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * A_2 - 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_4^2 * A_1 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2 * t * A_3 - 4 * \gamma^2 * \alpha_3^2 * \\
& \sigma_{13}^2 * \lambda_3^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{33} * \lambda_3 * t * \sigma_{11}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{34} * \lambda_4 * t * \sigma_{11}^2 + 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{14}^2 * \\
& \lambda_4^2 * \alpha_3 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{32} * \lambda_2 * t * \sigma_{12}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{32} * \lambda_2 * t * \sigma_{13}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{32} * \lambda_2 * t * \\
& \sigma_{14}^2 - 4 * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{33}^2 * \lambda_3^2 - 16 * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{31} * \lambda_1 - 16 * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{12} * \lambda_2^2 * \\
& \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{32} + 8 * \gamma^2 * \exp(-\beta * t)^2 * \alpha_1 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \alpha_3 * \sigma_{31} * \lambda_1 + 8 * \gamma^2 * \exp(-\beta * t)^2 * \\
& \alpha_1 * \sigma_{12} * \lambda_2^2 * \alpha_3 * \sigma_{32} + 8 * \gamma^2 * \exp(-\beta * t)^2 * \alpha_1 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \alpha_3 * \sigma_{33} * \lambda_3 + 8 * \gamma^2 * \exp(-\beta * t)^2 * \\
& \alpha_1 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \alpha_3 * \sigma_{34} * \lambda_4 + 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{31} * \lambda_1 + 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \\
& \sigma_{21} * \lambda_1^2 * t * \sigma_{31} + 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * \sigma_{32} * \lambda_2 + 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * \sigma_{33} * \lambda_3 + 8 * \beta * \gamma^2 * \\
& \alpha_2 * \sigma_{14}^2 * \lambda_4^2 * t * \alpha_3 + 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * \sigma_{34} * \lambda_4 - 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1^2 * t * \alpha_3 * \sigma_{11} - 8 * \beta * \\
& \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * \alpha_3 * \sigma_{12} * \lambda_2 - 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * \alpha_3 * \sigma_{13} * \lambda_3 - 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \\
& t * \alpha_3 * \sigma_{14} * \lambda_4 - 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * \alpha_1 * \sigma_{31} * \lambda_1 - 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * \alpha_1 * \sigma_{32} * \lambda_2 - 8 * \\
& \beta * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * \alpha_1 * \sigma_{33} * \lambda_3 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * \alpha_1 - 2 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \exp(-2 * \\
& \beta * t) * \lambda_3^2 * t * \sigma_{14}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_1^2 * t * \sigma_{11}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \exp(-2 * \\
& \beta * t) * \lambda_1^2 * t * \sigma_{12}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_1^2 * t * \sigma_{13}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \exp(-2 * \\
& \beta * t) * \lambda_1^2 * t * \sigma_{14}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_4^2 * t * \sigma_{32}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma^2 * t * \sigma_{11}^2 * \alpha_3^2 * \exp(-2 * \beta * \\
& t) * \lambda_4^2 + 2 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_3^2 * t * \sigma_{32}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_1^2 * t * \sigma_{34}^2 - \\
& \beta * \gamma * \alpha_1^2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_4^2 * t * \sigma_{31}^2 - \beta * \gamma * \alpha_1^2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_2^2 * t * \sigma_{31}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma^2 * t * \sigma_{13}^2 * \\
& \alpha_3^2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_2^2 + 2 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_2^2 * t * \sigma_{31}^2 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \\
& \alpha_3 - 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \alpha_1 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \sigma_{12} * \lambda_2 * A_1 - 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2 * \\
& A_1 - 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3 * A_1 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2 * A_3 - 4 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2 * \\
& \alpha_3 - 4 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3 * \alpha_3 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{23} * \lambda_3 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \alpha_3 - 2 * \\
& \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{31} * \lambda_1 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{21} * \lambda_1 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{22} * \lambda_2 - 4 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \\
& \sigma_{24} * \lambda_4 * \alpha_3 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{24} * \lambda_4 - 4 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{31} * \lambda_1 * A_2 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{32} *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_2 * A_1 - 4 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \sigma_{13} * \lambda_3 * A_2 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \sigma_{14} * \lambda_4 * A_1 - 4 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{11} * \\
& \lambda_1 * A_3 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{34} * \lambda_4 * A_1 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{31} * \lambda_1 * \alpha_2 - 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{32} * \\
& \lambda_2 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \alpha_3 - 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \alpha_1 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * \\
& \alpha_3 - 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * \alpha_1 - 4 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \alpha_3 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \sigma_{24} * \lambda_4 * \\
& A_1 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \sigma_{22} * \lambda_2 * A_1 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * A_3 - 4 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{32} * \lambda_2 * \\
& A_2 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{33} * \lambda_3 * A_1 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \sigma_{23} * \lambda_3 * A_1 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{33} * \lambda_3 * \\
& \alpha_2 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * A_3 - 4 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \sigma_{12} * \lambda_2 * A_2 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \sigma_{13} * \lambda_3 * \\
& A_1 - 4 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{34} * \lambda_4 * A_2 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \sigma_{11} * \lambda_1 * A_1 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{34} * \lambda_4 * \\
& A_1 - 4 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \sigma_{11} * \lambda_1 * A_2 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{33} * \lambda_3 * A_1 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \\
& A_1 - 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{24} * \lambda_4 * A_1 - 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * A_1 - 4 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{33} * \lambda_3 * \\
& A_2 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3 * A_3 + 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{24} * \lambda_4 * A_3 - 4 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{14} * \lambda_4 * \\
& A_3 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_1^2 * \lambda_2^2 * A_3 - 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{13} * \lambda_3 * t * A_3 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * A_1 - 2 * \\
& \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * A_1 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_1^2 * A_1 - 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_3^2 * A_1 - 2 * \beta^2 * \\
& \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_1^2 * A_1 - 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{13} * \lambda_3 * t * A_2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * A_1 + 2 * \beta^2 * \gamma * \\
& \alpha_2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * t * A_3 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * A_1 - 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2 * t * \alpha_3 * \sigma_{13} * \lambda_3 - 8 * \beta * \\
& \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2 * t * \alpha_3 * \sigma_{14} * \lambda_4 + 2 * \beta^5 * \gamma * t^2 * \sigma_{11}^2 * \alpha_2 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_4^2 * \sigma_{14}^2 - 2 * \beta^3 * \gamma * \\
& t^2 * \alpha_2 * \sigma_{31} * \lambda_1 * \sigma_{11}^2 + 3 * \beta * \gamma * \alpha_1^2 * \lambda_3^2 * t * A_3 - 3 * \beta * \gamma * \alpha_1^2 * \lambda_2^2 * t * A_2 - 3 * \beta * \gamma * \alpha_1^2 * \lambda_3^2 * t * A_2 - \\
& 3 * \beta * \gamma * \alpha_1^2 * \lambda_4^2 * t * A_2 - 3 * \beta * \gamma * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_3^2 * t * A_3 - 3 * \beta * \gamma * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_4^2 * t * A_3 - 3 * \beta * \gamma * \alpha_3 * \\
& \alpha_2 * \lambda_2^2 * t * A_1 - 3 * \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_3^2 * t * A_1 - 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * \alpha_3 - 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{22} * \\
& \lambda_2 * t * \alpha_3 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * \alpha_1 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * \alpha_3 + 3 * \beta * \gamma * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_4^2 * t * \\
& A_1 + 3 * \beta * \gamma * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_1^2 * t * A_1 + 6 * \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_1 * \lambda_3^2 * t * A_2 - 3 * \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_1 * \lambda_3^2 * t * A_1 + 6 * \beta * \\
& \gamma * \alpha_3 * \alpha_1 * \lambda_2^2 * t * A_2 + 6 * \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_1 * \lambda_4^2 * t * A_2 - 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_4^2 * A_3 - 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \\
& \sigma_{14} * \lambda_4 * t * A_2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * A_3 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_1^2 * \lambda_3^2 * A_3 - 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_1^2 * \lambda_3^2 * \\
& A_2 - 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_1^2 * \lambda_4^2 * A_2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{23} * \lambda_3 * t * A_1 - 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_1^2 * \lambda_2^2 * A_2 - 4 * \beta^2 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma * \alpha_3 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * A_2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * A_1 - 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_3^2 * A_3 - 2 * \beta^2 * \gamma * \\
& \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * A_1 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3 * t * A_1 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{24} * \lambda_4 * t * A_1 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \\
& \sigma_{24} * \lambda_4 * t * A_1 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2 * t * A_1 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * \alpha_3 + 4 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \\
& \alpha_1 * \lambda_1^2 * A_2 - 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \alpha_1 * \lambda_2^2 * A_1 + 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{32} * \lambda_2 * t * \sigma_{14}^2 + 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_3 * \sigma_{24} * \\
& \lambda_4 * t * \sigma_{14}^2 - 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \sigma_{23} * \lambda_3 * \sigma_{13}^2 - 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \sigma_{23} * \lambda_3 * \sigma_{14}^2 + 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_3 * \sigma_{21} * \\
& \lambda_1 * t * \sigma_{14}^2 - 4 * \beta^3 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{13}^2 * \lambda_3^2 * \alpha_3 - 8 * \beta^2 * \gamma^2 * t * \sigma_{12}^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3^2 * \lambda_4^2 + 8 * \beta^2 * \gamma^2 * \\
& \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{32}^2 * \lambda_2^2 * t * \alpha_2 - 16 * \beta * \gamma^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{34} * \lambda_4 * t * \alpha_2 * \sigma_{31} * \lambda_1 - 16 * \beta * \\
& \gamma^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{34} * \lambda_4 * t * \alpha_2 * \sigma_{32} * \lambda_2 - 16 * \beta * \gamma^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{34} * \lambda_4 * t * \alpha_2 * \sigma_{33} * \\
& \lambda_3 - 16 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{14} * \lambda_4 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{31} * \lambda_1 - 16 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{14} * \lambda_4 * \exp(-\beta * \\
& t) * \alpha_3 * \sigma_{32} * \lambda_2 - 16 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{14} * \lambda_4 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{33} * \lambda_3 - 16 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{14} * \\
& \lambda_4^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{34} + 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{33} * \lambda_3 + 8 * \beta * \gamma^2 * t * \\
& \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{34} * \lambda_4 - 8 * \beta * \gamma^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3^2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * t * \sigma_{21} * \lambda_1 - 8 * \beta * \\
& \gamma^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3^2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * t * \sigma_{22} * \lambda_2 - 8 * \beta * \gamma^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3^2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * t * \sigma_{24} * \lambda_4 + 4 * \\
& \beta * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_1^2 * \lambda_2^2 * t * \sigma_{31}^2 + 8 * \beta * \gamma^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_1^2 * \sigma_{34}^2 * \lambda_4^2 * t + 8 * \beta * \gamma^2 * \exp(-\beta * \\
& t) * \alpha_1^2 * \sigma_{33}^2 * \lambda_3^2 * t + 16 * \beta * \gamma^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_1^2 * \sigma_{33} * \lambda_3 * t * \sigma_{34} * \lambda_4 - 16 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \\
& \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{32} * \lambda_2 - 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{32} + 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_3 * \sigma_{23} * \lambda_3 * t * \sigma_{11}^2 + \\
& 8 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{32} * \lambda_2 + 8 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{33} * \lambda_3 + \\
& 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * A_1 - 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{23} * \lambda_3 * t * \sigma_{12}^2 + 2 * \beta^2 * \\
& \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * A_1 - 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{24} * \lambda_4 * t * \sigma_{11}^2 - 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \\
& \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{23} * \lambda_3 * t * \sigma_{13}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * A_1 - 4 * \gamma^2 * \exp(-\beta * \\
& t)^2 * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3^2 * \alpha_3 * \sigma_{13} - 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3 * t * A_3 + 4 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \\
& \alpha_3 * \sigma_{13} * \lambda_3 * t * A_2 - 6 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{11}^2 * \lambda_1^2 * t * \alpha_3 + 8 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \alpha_3 * \sigma_{12} * \lambda_2 + 4 * \\
& \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * \sigma_{11}^2 + 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * \sigma_{12}^2 + 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * \sigma_{13}^2 + 4 * \\
& \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * \sigma_{14}^2 + 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_3 * \sigma_{22} * \lambda_2 * t * \sigma_{11}^2 + 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_3 * \sigma_{22} * \lambda_2 * t * \sigma_{12}^2 + 4 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_3 * \sigma_{22} * \lambda_2 * t * \sigma_{13}^2 + 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_3 * \sigma_{22} * \lambda_2 * t * \sigma_{14}^2 - 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \sigma_{11}^2 - 2 * \\
& \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \sigma_{22} * \lambda_2 * \sigma_{11}^2 - 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_3 * \sigma_{23} * \lambda_3 * \sigma_{11}^2 - 4 * \beta^3 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{14}^2 * \lambda_4^2 * \alpha_3 + 4 * \\
& \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{32} * \lambda_2 * t * \sigma_{11}^2 + 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{32} * \lambda_2 * t * \sigma_{12}^2 + 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{32} * \lambda_2 * t * \sigma_{13}^2 - 6 * \\
& \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_1^2 * t * \sigma_{12}^2 - 6 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_1^2 * t * \sigma_{13}^2 - 6 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_1^2 * t * \sigma_{14}^2 - 4 * \beta^2 * \\
& \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * \alpha_1 * \sigma_{31} * \lambda_1 - 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * \alpha_1 * \sigma_{32} * \lambda_2 - 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \\
& \sigma_{14} * \lambda_4 * \alpha_1 * \sigma_{33} * \lambda_3 - 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4^2 * \alpha_1 * \sigma_{34} - 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * \alpha_1 * \sigma_{32} * \\
& \lambda_2 - 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{13} * \lambda_3^2 * \alpha_1 * \sigma_{33} - 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * \alpha_1 * \sigma_{34} * \lambda_4 + 4 * \beta^2 * \gamma^2 * \\
& t^2 * \alpha_2 * \sigma_{13}^2 * \lambda_3^2 * \alpha_3 + 8 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * \alpha_3 * \sigma_{14} * \lambda_4 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * \sigma_{13}^2 - 2 * \\
& \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * \sigma_{14}^2 + 3 * \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_4^2 * t * \sigma_{12}^2 + 3 * \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_4^2 * t * \sigma_{13}^2 + 3 * \beta * \gamma * \\
& \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_4^2 * t * \sigma_{14}^2 + 3 * \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_3^2 * t * \sigma_{12}^2 + 3 * \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_3^2 * t * \sigma_{13}^2 + 3 * \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_2 * \\
& \lambda_3^2 * t * \sigma_{14}^2 - 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{24} * \lambda_4 * \alpha_3 * \sigma_{12} * \lambda_2 - 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{24} * \lambda_4 * \alpha_3 * \sigma_{13} * \lambda_3 - \\
& 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * \sigma_{12}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * \sigma_{13}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * \sigma_{14}^2 - 2 * \\
& \beta^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{21} * \lambda_1 * t * \sigma_{11}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{34} * \lambda_4 * t * \sigma_{14}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * \alpha_3 - 2 * \beta^2 * \\
& \gamma * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * \alpha_1 - 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * A_3 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{32} * \lambda_2 * \sigma_{14}^2 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * \\
& t^2 * \alpha_2 * \sigma_{33} * \lambda_3 * \sigma_{11}^2 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{33} * \lambda_3 * \sigma_{12}^2 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{31} * \lambda_1 * \sigma_{12}^2 + 4 * \beta^4 * \\
& \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{31} * \lambda_1 * \sigma_{13}^2 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{31} * \lambda_1 * \sigma_{14}^2 + \beta^4 * t^2 * \sigma_{11}^2 * \sigma_{33}^2 + 3 * \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_2 * \\
& \lambda_2^2 * t * \sigma_{11}^2 + 3 * \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_3^2 * t * \sigma_{11}^2 + \beta^4 * t^2 * \sigma_{12}^2 * \sigma_{32}^2 + 2 * \beta^5 * \gamma * t^2 * \sigma_{14}^2 * \alpha_2 - 2 * \beta^5 * \gamma * t^2 * \\
& \sigma_{12}^2 * \alpha_3 - \beta * \gamma * \alpha_2 * \alpha_1 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_3^2 * t * A_3 - \beta * \gamma * \alpha_1^2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_3^2 * t * A_2 - \beta * \\
& \gamma * \alpha_1^2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_4^2 * t * A_2 + \beta * \gamma * \alpha_1^2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_1^2 * t * A_3 - \beta * \gamma * \alpha_1^2 * \exp(-2 * \\
& \beta * t) * \lambda_2^2 * t * A_2 + 2 * \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_1 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_2^2 * t * A_2 - \beta * \gamma * \alpha_2 * \alpha_1 * \exp(-2 * \beta * t) * \\
& \lambda_4^2 * t * A_3 + 2 * \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_1 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_1^2 * t * A_2 + 2 * \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_1 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_4^2 * \\
& t * A_2 - \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_1 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_3^2 * t * A_1 - \beta * \gamma * \alpha_3 * \alpha_2 * \exp(-2 * \beta * t) * \lambda_2^2 * t * A_1 + 3 * \\
& \beta * \gamma * \alpha_1^2 * \lambda_4^2 * t * A_3 - 4 * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3^2 * \alpha_3 * \sigma_{33} - 4 * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3 * \alpha_3 * \sigma_{34} * \lambda_4 - 4 * \beta^5 * t^2 * \\
& \sigma_{12}^2 * \gamma * \sigma_{33}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * \sigma_{31}^2 - 4 * \beta^5 * t^2 * \sigma_{14}^2 * \gamma * \sigma_{34}^2 - 4 * \beta^5 * t^2 * \sigma_{12}^2 * \gamma * \sigma_{34}^2 + 8 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \alpha_3 * \sigma_{31} * \lambda_1 + 8 * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{12} * \lambda_2^2 * \alpha_3 * \sigma_{32} + 8 * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \alpha_3 * \sigma_{33} * \lambda_3 + \\
& 8 * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \alpha_3 * \sigma_{34} * \lambda_4 - 8 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{14} * \lambda_4 * \sigma_{32}^2 - 4 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \alpha_3 * \sigma_{31} * \\
& \lambda_1 - 4 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2^2 * \alpha_3 * \sigma_{32} - 4 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \alpha_3 * \sigma_{33} * \lambda_3 - 4 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \alpha_3 * \sigma_{34} * \\
& \lambda_4 + 4 * \gamma^2 * \alpha_3^2 * \sigma_{12} * \lambda_2^2 * \sigma_{22} + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_2^2 * \sigma_{33}^2 - 8 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \sigma_{12}^2 * \alpha_3 * \sigma_{34} * \lambda_4 - 8 * \\
& \gamma^2 * \alpha_3^2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \sigma_{12} * \lambda_2 - 8 * \gamma^2 * \alpha_3^2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \sigma_{13} * \lambda_3 - 8 * \gamma^2 * \alpha_3^2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \sigma_{14} * \lambda_4 - 8 * \gamma^2 * \alpha_3^2 * \\
& \sigma_{12} * \lambda_2 * \sigma_{13} * \lambda_3 - 8 * \gamma^2 * \alpha_3^2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 + 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * \sigma_{32}^2 - 4 * \beta^5 * t^2 * \sigma_{14}^2 * \\
& \gamma * \sigma_{32}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_4^2 * \sigma_{31}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * \sigma_{32}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * \\
& \sigma_{31}^2 - 8 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{14} * \lambda_4 * \sigma_{34}^2 + 3 * \beta * \gamma * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_2^2 * t * \sigma_{34}^2 - 8 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{13} * \lambda_3 * \\
& \sigma_{32}^2 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2 * \sigma_{33}^2 - 4 * \beta^5 * t^2 * \sigma_{14}^2 * \gamma * \sigma_{33}^2 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * \sigma_{33}^2 + \\
& 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_4^2 * \sigma_{32}^2 + 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_3^2 * \sigma_{12} * \lambda_2^2 * t * \sigma_{22} + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_1^2 * \sigma_{34}^2 + 2 * \\
& \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_1^2 * \sigma_{32}^2 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \sigma_{31}^2 + 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * \sigma_{31}^2 + 3 * \\
& \beta * \gamma * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_2^2 * t * \sigma_{33}^2 + 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * \sigma_{32}^2 - 8 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \sigma_{11}^2 * \alpha_3 * \sigma_{31} * \lambda_1 + 4 * \beta^2 * \\
& \gamma * \alpha_1 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * \sigma_{34}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * \sigma_{33}^2 + 4 * \beta^6 * \gamma^2 * t^2 * \sigma_{13}^2 * \sigma_{32}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \\
& \sigma_{11} * \lambda_1 * t * \sigma_{33}^2 - 4 * \beta^5 * t^2 * \sigma_{11}^2 * \gamma * \sigma_{32}^2 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * \sigma_{33}^2 - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{24} * \\
& \lambda_4^2 * \alpha_3 * \sigma_{34} + 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * \sigma_{31}^2 - 8 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{13} * \lambda_3 * \sigma_{33}^2 - 4 * \beta^5 * t^2 * \sigma_{12}^2 * \gamma * \\
& \sigma_{32}^2 - 8 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \sigma_{12}^2 * \alpha_3 * \sigma_{33} * \lambda_3 - 8 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{14} * \lambda_4 * \sigma_{33}^2 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \\
& \lambda_1 * \sigma_{32}^2 - 4 * \beta^5 * t^2 * \sigma_{13}^2 * \gamma * \sigma_{33}^2 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * \sigma_{34}^2 - 8 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \\
& \sigma_{34}^2 + 3 * \beta * \gamma * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_2^2 * t * \sigma_{31}^2 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \sigma_{31}^2 - 4 * \beta^5 * t^2 * \sigma_{13}^2 * \gamma * \sigma_{32}^2 + 2 * \\
& \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_1^2 * \sigma_{31}^2 - 4 * \beta^5 * t^2 * \sigma_{11}^2 * \gamma * \sigma_{31}^2 + 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * \sigma_{33}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \\
& \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_2^2 * \sigma_{31}^2 - 4 * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{24} * \lambda_4 * \alpha_3 * \sigma_{31} * \lambda_1 - 4 * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{24} * \lambda_4 * \alpha_3 * \sigma_{32} * \lambda_2 - 4 * \gamma^2 * \alpha_1 * \\
& \sigma_{24} * \lambda_4 * \alpha_3 * \sigma_{33} * \lambda_3 - 4 * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{24} * \lambda_4^2 * \alpha_3 * \sigma_{34} - 8 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \sigma_{12}^2 * \alpha_3 * \sigma_{32} * \lambda_2 + 4 * \beta^2 * t * \\
& \sigma_{12}^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{34} * \lambda_4 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_2^2 * \sigma_{34}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{24} * \lambda_4 * t * \sigma_{33}^2 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \\
& \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2 * \sigma_{34}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * \sigma_{32}^2 + 4 * \beta^2 * t * \sigma_{11}^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{34} * \lambda_4 + 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \\
& \alpha_1 * \sigma_{31}^2 * \lambda_1^2 * \alpha_2 - 8 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \sigma_{11}^2 * \alpha_3 * \sigma_{32} * \lambda_2 - 8 * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{32} * \lambda_2 * \sigma_{33} * \lambda_3 - 8 * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{32} *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_2 * \sigma_{34} * \lambda_4 - 4 * \beta^5 * t^2 * \sigma_{14}^2 * \gamma * \sigma_{31}^2 + 3 * \beta * \gamma * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_4^2 * t * \sigma_{32}^2 + 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * \sigma_{33}^2 - \\
& 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * \sigma_{32}^2 + 4 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * \sigma_{34}^2 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \sigma_{34}^2 - \\
& 6 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_4^2 * t * \sigma_{32}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3 * t * \sigma_{33}^2 - 8 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \sigma_{33}^2 - \\
& 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3 * t * \sigma_{34}^2 - 6 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{33}^2 * \lambda_3^2 * t * \alpha_2 - 8 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{13} * \lambda_3 * \sigma_{34}^2 - \\
& 8 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \sigma_{32}^2 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * \sigma_{32}^2 + 4 * \beta^2 * t * \sigma_{12}^2 * \gamma * \alpha_3 * \sigma_{32} * \lambda_2 - \\
& 4 * \beta^5 * t^2 * \sigma_{11}^2 * \gamma * \sigma_{34}^2 - 8 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \sigma_{13}^2 * \alpha_3 * \sigma_{34} * \lambda_4 + 4 * \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{34}^2 * \lambda_4^2 * \alpha_2 + 4 * \beta^6 * \\
& \gamma^2 * t^2 * \sigma_{13}^2 * \sigma_{33}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{24} * \lambda_4 * t * \sigma_{34}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{24} * \lambda_4 * t * \sigma_{31}^2 + 16 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \\
& \sigma_{13} * \lambda_3 * \alpha_3 * \sigma_{34} * \lambda_4 + 8 * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{11} * \lambda_1^2 * \alpha_3 * \sigma_{31} + 8 * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \alpha_3 * \sigma_{32} * \lambda_2 + 8 * \gamma^2 * \alpha_1 * \\
& \sigma_{11} * \lambda_1 * \alpha_3 * \sigma_{33} * \lambda_3 + 8 * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \alpha_3 * \sigma_{34} * \lambda_4 - 3 * \beta * \gamma * \alpha_1^2 * \lambda_4^2 * t * \sigma_{31}^2 - 3 * \beta * \gamma * \alpha_1^2 * \\
& \lambda_4^2 * t * \sigma_{32}^2 - 3 * \beta * \gamma * \alpha_1^2 * \lambda_4^2 * t * \sigma_{33}^2 - 3 * \beta * \gamma * \alpha_1^2 * \lambda_4^2 * t * \sigma_{34}^2 + 4 * \beta^6 * \gamma^2 * t^2 * \sigma_{13}^2 * \sigma_{34}^2 - 8 * \beta * \gamma^2 * \\
& t * \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2 * \alpha_3 * \sigma_{31} * \lambda_1 - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2^2 * \alpha_3 * \sigma_{32} - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2 * \alpha_3 * \\
& \sigma_{33} * \lambda_3 - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2 * \alpha_3 * \sigma_{34} * \lambda_4 - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1^2 * \alpha_3 * \sigma_{31} - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \\
& \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \alpha_3 * \sigma_{32} * \lambda_2 - 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_3^2 * \sigma_{14}^2 * \lambda_4^2 * t + 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \sigma_{33} * \lambda_3 * t * \sigma_{12}^2 + \\
& 2 * \beta^2 * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \sigma_{33} * \lambda_3 * t * \sigma_{13}^2 + 8 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \exp(-\beta * t) * \alpha_1 * \sigma_{34} * \lambda_4 - 8 * \\
& \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{11}^2 * \lambda_1^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 - 4 * \beta * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_1^2 * \lambda_3^2 * t * A_3 + 4 * \beta * \gamma * \exp(-\beta * t) * \\
& \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_1^2 * t * A_3 + 4 * \beta * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_2^2 * t * A_3 + 4 * \beta * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_3^2 * \\
& t * A_3 + 4 * \beta * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_4^2 * t * A_3 - 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \sigma_{24} * \lambda_4 * t * \sigma_{14}^2 - \\
& 4 * \beta * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_1^2 * t * \sigma_{11}^2 - 4 * \beta * \gamma * \exp(-\beta * t) * \alpha_3 * \alpha_2 * \lambda_2^2 * t * \sigma_{11}^2 + 8 * \beta * \gamma^2 * \\
& \alpha_3^2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * \sigma_{22} * \lambda_2 + 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_3^2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * \sigma_{21} * \lambda_1 + 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_3^2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * \sigma_{22} * \lambda_2 - \\
& 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{34}^2 * \lambda_4^2 * t - 16 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{33} * \lambda_3 * t * \sigma_{34} * \lambda_4 - 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{33}^2 * \lambda_3^2 * t + 8 * \beta * \\
& \gamma^2 * \alpha_3^2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * \sigma_{24} * \lambda_4 - 16 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * \sigma_{33} * \lambda_3 - 16 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * \sigma_{34} * \\
& \lambda_4 + 16 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{14} * \lambda_4 * \alpha_3 * \sigma_{31} * \lambda_1 + 16 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{14} * \lambda_4 * \alpha_3 * \sigma_{32} * \lambda_2 + 16 * \beta * \gamma^2 * \\
& t * \alpha_1 * \sigma_{14} * \lambda_4 * \alpha_3 * \sigma_{33} * \lambda_3 + 16 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{14} * \lambda_4^2 * \alpha_3 * \sigma_{34} - 4 * \beta^5 * t^2 * \sigma_{12}^2 * \gamma * \sigma_{31}^2 - 2 * \beta^2 * \\
& \gamma * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3 * t * \sigma_{32}^2 - 8 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \sigma_{13}^2 * \alpha_3 * \sigma_{32} * \lambda_2 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_4^2 * \sigma_{33}^2 - 8 * \beta^4 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma^2 * t^2 * \sigma_{13}^2 * \alpha_3 * \sigma_{33} * \lambda_3 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2 * \sigma_{32}^2 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{22} * \lambda_2 * \sigma_{31}^2 + 4 * \\
& \beta^2 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_3^2 * \sigma_{12} * \lambda_2^2 * \sigma_{22} + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * \sigma_{34}^2 - 4 * \gamma^2 * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1^2 * \alpha_3 * \sigma_{31} - 8 * \\
& \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \sigma_{11}^2 * \alpha_3 * \sigma_{33} * \lambda_3 + 4 * \beta^6 * \gamma^2 * t^2 * \sigma_{13}^2 * \sigma_{31}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_2^2 * \sigma_{32}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \\
& \alpha_2 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * \sigma_{34}^2 - 8 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{11} * \lambda_1 * \sigma_{33}^2 - 6 * \beta^2 * \gamma^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_4^2 * t * \sigma_{33}^2 + 3 * \beta * \gamma * \\
& \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_1^2 * t * \sigma_{31}^2 + 2 * \beta^2 * \gamma * t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_1^2 * \sigma_{33}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{24} * \lambda_4 * t * \sigma_{32}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \\
& \sigma_{14} * \lambda_4 * t * \sigma_{34}^2 - 8 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \sigma_{12}^2 * \alpha_3 * \sigma_{31} * \lambda_1 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * \sigma_{33}^2 - 8 * \beta^4 * \gamma^2 * t^2 * \\
& \sigma_{13}^2 * \alpha_3 * \sigma_{31} * \lambda_1 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_2 * \sigma_{11} * \lambda_1 * t * \sigma_{31}^2 + 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_3^2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * t * \sigma_{23} * \lambda_3 + 4 * \beta^4 * \gamma^2 * \\
& t^2 * \alpha_2 * \sigma_{14} * \lambda_4 * \sigma_{31}^2 - 2 * \beta^2 * \gamma * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3 * t * \sigma_{31}^2 - 4 * \beta^5 * t^2 * \sigma_{11}^2 * \gamma * \sigma_{33}^2 - 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{31}^2 * \\
& \lambda_1^2 * t - 16 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1^2 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * \sigma_{32} * \lambda_2 + 3 * \beta * \gamma * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_1^2 * t * \sigma_{32}^2 + 3 * \beta * \gamma * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_1^2 * t * \\
& \sigma_{33}^2 + 3 * \beta * \gamma * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_1^2 * t * \sigma_{34}^2 + 3 * \beta * \gamma * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_2^2 * t * \sigma_{32}^2 - 3 * \beta * t * \sigma_{14}^2 * \gamma * \alpha_3^2 * \lambda_3^2 - 3 * \beta * \\
& t * \sigma_{14}^2 * \gamma * \alpha_3^2 * \lambda_1^2 - 3 * \beta * t * \sigma_{14}^2 * \gamma * \alpha_3^2 * \lambda_2^2 - 3 * \beta * t * \sigma_{14}^2 * \gamma * \alpha_3^2 * \lambda_4^2 - 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_3^2 * \sigma_{13}^2 * \lambda_3^2 * t - \\
& 16 * \beta * \gamma^2 * \alpha_3^2 * \sigma_{13} * \lambda_3 * t * \sigma_{14} * \lambda_4 - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3 * \alpha_3 * \sigma_{31} * \lambda_1 - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{23} * \\
& \lambda_3 * \alpha_3 * \sigma_{32} * \lambda_2 - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3^2 * \alpha_3 * \sigma_{33} - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{23} * \lambda_3 * \alpha_3 * \sigma_{34} * \lambda_4 - 8 * \\
& \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{24} * \lambda_4 * \alpha_3 * \sigma_{31} * \lambda_1 - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{24} * \lambda_4 * \alpha_3 * \sigma_{32} * \lambda_2 - 8 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{24} * \\
& \lambda_4 * \alpha_3 * \sigma_{33} * \lambda_3 + 16 * \beta * \gamma^2 * t * \alpha_1 * \sigma_{13} * \lambda_3^2 * \alpha_3 * \sigma_{33} + 8 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{31}^2 * \lambda_1^2 * t * \alpha_2 + 16 * \beta * \gamma^2 * \\
& \alpha_1 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * \alpha_2 * \sigma_{32} * \lambda_2 + 16 * \beta * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{31} * \lambda_1 * t * \alpha_2 * \sigma_{33} * \lambda_3 - 3 * \beta * t * \sigma_{13}^2 * \gamma * \alpha_3^2 * \lambda_3^2 - \\
& 3 * \beta * t * \sigma_{13}^2 * \gamma * \alpha_3^2 * \lambda_1^2 - 3 * \beta * t * \sigma_{13}^2 * \gamma * \alpha_3^2 * \lambda_2^2 - 8 * \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * \sigma_{31}^2 - 8 * \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_1 * \\
& \sigma_{12} * \lambda_2 * t * \sigma_{32}^2 - 8 * \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * \sigma_{33}^2 - 8 * \beta^3 * \gamma^2 * \alpha_1 * \sigma_{12} * \lambda_2 * t * \sigma_{34}^2 - 4 * \beta^3 * \gamma^2 * t^2 * \\
& \alpha_1 * \sigma_{32}^2 * \lambda_2^2 * \alpha_2 - 4 * \beta^3 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_4^2 * \sigma_{31}^2 - 4 * \beta^3 * \gamma^2 * t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_4^2 * \sigma_{32}^2 - 4 * \beta^3 * \gamma^2 * \\
& t^2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \lambda_4^2 * \sigma_{33}^2 - 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \sigma_{31}^2 - 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \sigma_{32}^2 - 2 * \beta^3 * \gamma * \\
& t^2 * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \sigma_{33}^2 - 2 * \beta^3 * \gamma * t^2 * \alpha_1 * \sigma_{21} * \lambda_1 * \sigma_{34}^2 - 8 * \beta^3 * \gamma^2 * t * \sigma_{13}^2 * \alpha_3 * \sigma_{31} * \lambda_1 - 8 * \beta^3 * \gamma
\end{aligned}$$

Приложение В

Приложение (реальные данные, используемые в программе)

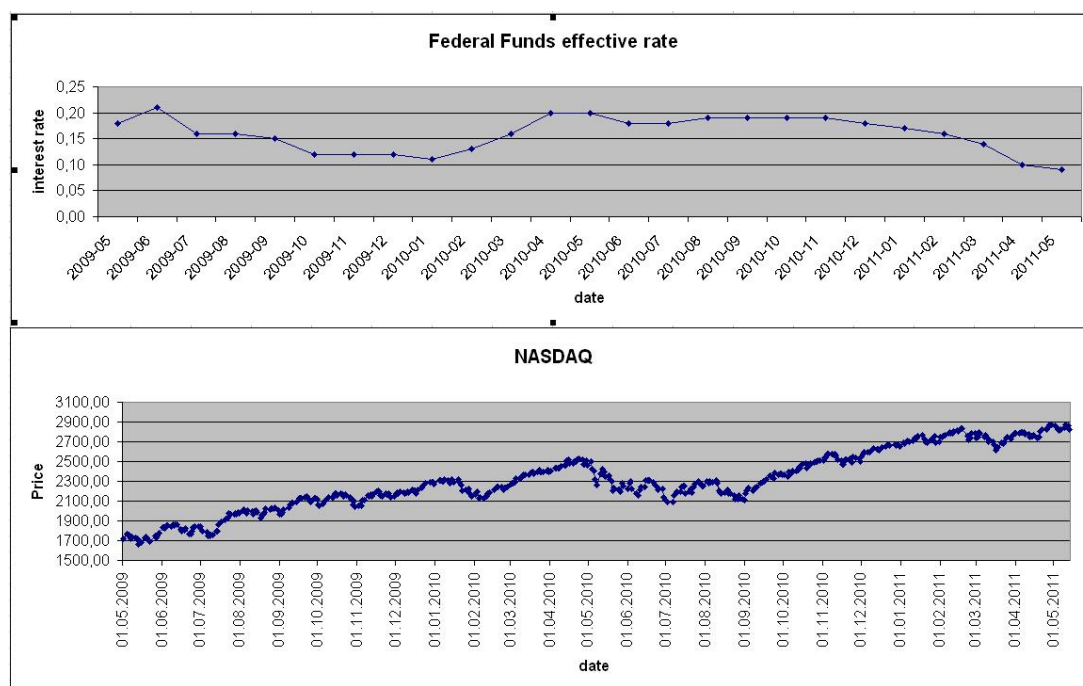


Рис. В.1: реальные исторические данные по индексу NASDAQ и эффективной ставке по федеральным фондам.