Алгоритм построения эффективного фронта инвестиционного портфеля

Асеков А.З., Шамаев А.С.

Московский Государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет,
Кафедра дифференциальных уравнений
a.asekov@rambler.ru, sham@rambler.ru

В работе рассматривается алгоритм вычисления предельного эффективного фронта инвестиционного портфеля. Особенностью приведенного алгоритма является использования только простейших операций линейной алгебры.

Введение.

Современный финансовый мир представляет собой чрезвычайно сложный и развитый объект, в котором задача управления инвестиционным портфелем представляется одной из основных. Традиционно под управлением инвестиционным портфелем понимается набор различных ценных бумаг разного срока действия, разной степени ликвидности. Главная идея управления портфелем – нахождение компромиса между риском и доходностью. Проблема построения инвестиционного портфеля представляет собой проблему выбора наиболее эффективного портфеля из набора возможных портфелей.

Основой теории формирования портфеля является фундаментальная работа Г. Марковица 1952 года [1]. Г. Марковиц отмечает, что при выборе инвестиционного портфеля инвестор стремится одновременно максимизировать меру ожидаемой доходности портфеля и минимизировать риск неверной оценки этой меры. Инвестор должен считать уровень доходности, связанный с любым из этих портфелей, случайной переменной. Такие переменные имеют свои характеристики - среднее значение и среднеквадратичное отклонение ожидаемой доходности портфеля. Среднее значение может быть представлено как мера потенциального вознаграждения, связанная с конкретным портфелем, а среднеквадратичное отклонение - мера риска, связанная с данным портфелем. После того, как каждый портфель был исследован в смысле потенциального вознаграждения и риска, можно составить множество эффективных портфелей. Портфель назвается *эффективным*, если из тех же ценных бумаг и при тех же ограничениях на их пропорции нельзя составить другой портфель, который имел бы такое же среднее значение ожидаемой доходности и меньшее среднеквадратичное отклонение либо такое же среднеквадратичное отклонение и большее среднее значение. Затем инвестор должен выбрать из эффективных портфелей портфель, который является для него подходящим. Подход Г. Марковица основывается на использовании кривых безразличия, которые отражают отношение инвестора к риску и доходности.

Существует множество различных методов выбора эффективного портфеля, основанных на различных математических методах. Одним из наиболее распространенных подходов является моделирование уровня доходности портфеля в качестве стохастического процесса. В таком случае говорят о *стохастической модели рынка*. В стохастической модели рынка макроэкономические факторы моделируются как диффузионные процессы, а активы как соответствующие геометрические броуновские движения с коэффициентами сдвига и диффузии в виде заданных функций от макрофакторов. Целью управления портфелем есть максимизация ожидаемой полезности капитала портфеля к конкретному моменту времени в будущем. Одной из стохастических моделей рынка является модель Т.Р. Белецкому и С.Р. Плиски (см. [2], [3]).

Важной особенность работ Т.Р. Белецкого и С.Р. Плиски стала замена прямого ограничения на рискованость добавления т.н. "штрафного" слагаемого в функционале доходности, где "штраф" назначается за большие значения дисперсии доходности. Функционалы, содержащие "штрафное" слагаемое за высокую рискованость портфеля, обычно называются рискочувствительными функционалами.

В своей работе [2] Т.Р. Белецкий и С.Р. Плиска максимизуруют некоторый сложного вида функционал, зависящий от параметра риска, выбираемого инвестором, и, таким образом, строят рискочувствительную оптимальную стратегию инвестирования на бесконечном интервале времени.

Мы в данной работе строим аналог эффективного фронта инвестиционного портфеля (зависимость среднеквадратичного отклонения и математического ожидания) в рамках модели первичных активов из [2]. Указанная зависимость появляется за счет того, что изменяется т.н. рискочувствительный параметр в функционале, отвечающий за величину связанную с рискованностью компоненты функцонала. Алгоритм построения эффективного фронта, излагаемый в настоящей работе, требует использования только операций линейной алгебры (решений системы алгебраических уравнений). Такой алгоритм существенно упрощает построение эффективного фронта инвестиционного портфеля для принятой модели активов.

Построения алгоритма эффективного фронта основывается на связи величин, характеризующий поведение математического ожидания и дисперсии на больших временах, с ассимптотикой "основных состояний" некоторых операторов эллиптического типа в $\mathbb{R}^n$. Задача об "основном состоянии"рассматривается в [4]. Эта задача состоит в определении пары $(\lambda, u(x))$, такой что $Lu = \lambda u$ в $\mathbb{R}^n$, где L – некоторый оператор эллиптического типа, λ – действительное число а $u(x)$ – неотрицательная функция, стремящаяся к нулю при $|x| \to \infty$. В [4] были доказаны существование и единственность пары $(\lambda, u(x))$ при определенных условиях.

1 Постановка задачи.

Рассмотрим следующую модель рынка финансовых активов. На рынке присутствуют $m \geq 2$ ценных бумаг (активов). На их цены воздействуют $n \geq 1$ макроэкономических факторов. Обозначим через S_i цену i-й ценной бумаги в момент времени t, $x_j(t)$ – уровень j-го макроэкономического фактора в момент времени t. Процесс эволюции цен на ценные бумаги и уровня макроэкономических факторов описывается следующими стохастическим дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = (A + \alpha x(t))_i dt + \Sigma_{k=1}^{m+n} \sigma_{ik} dW_k, S_i(0) = s_i, i = 1...m, \tag{1}$$

$$dx_i(t) = (B + \beta x(t))_i dt + \Sigma_{k=1}^{m+n} \lambda_{ik} dW_k, x_i(0) = x_{i0}, i = 1...n, \tag{2}$$

где α – матрица размерности $m \times n$, β – матрица размерности $n \times n$, $\Sigma = (\sigma_{ij})$ – матрица размерности $m \times (m + n)$, $\Lambda = (\lambda_{ij})$ – матрица размерности $n \times (m + n)$, A – вектор размерности m, B – вектор размерности n, $W(t) = (W_1(t), ..., W_{m+n}(t))$ – винеровский процесс с независимыми компонентами $W_k(t)$.

Процесс динамики капитала описывается следующим уравнением:

$$dV(t) = V(t)(\sum_{i=1}^{m} h_i(t)((A + \alpha x)_i dt + \sum_{k=1}^{m+n} \sigma_{ik} dW_k)), V(0) = v > 0, \tag{3}$$

где $h(t)$ – "допустимый" процесс, т.е. $\sum_{i=1}^{m} h_i(t) = 1$, $h(t)$ – измерим относительно $\mathcal{F}_t = \sigma((S(\tau), x(\tau)), 0 \leq \tau \leq t)$ - минимальная σ - алгебра, содержащая σ - алгебры, соответствующие случайным величинам $S(\tau), x(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq t$ и $\mathbf{P}(\int_0^1 h^T(s)h(s)ds < \infty) = 1$.

Пусть $\rho(t, \theta) = \frac{lnV}{t}$. Эта случайная величина имеет смысл мгновенной процентной ставки. Делая соответствующую замену в уравнении (3), получим

$$\rho(t, \theta) = \frac{1}{t} \int_0^t (\sum_{i=1}^{m} h_i(t) f_i(t) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m+n} (H_k(t))^2) dt + \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{k=1}^{m+n} H_k(t) dW_k$$

где $H_k(t) = \sum_{i=1}^{m} h_i(t)\sigma_{ik}$, $f_i(t) = (A + \alpha x(t))_i$. Последнюю формулу удобно переписать в следующем виде:

$$\rho(t, \theta) = \frac{1}{t} \int_0^t L^\theta d\tau + \frac{1}{t} \int_0^t \langle H, dW \rangle,$$

где $L^\theta = \sum_{i=1}^{m} h_i(t) f_i(t) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m+n} (H_k(t))^2$.

Оптимальное управление портфелем $h(t)$ (согласно постановке задачи оптимального управления, рассмотренной в [2]) должно максимизировать функционал

$$J_\theta(v, x, h(\cdot)) = \liminf_{t \to \infty} (-\frac{2}{\theta} t^{-1} \ln \mathbf{M}\{\exp\{-\frac{2}{\theta}(t)\}, v(0) = v, x(0) = x_0\}) \tag{4}$$

на классе допустимых процессов. Отличительной особенностью данной модели управления портфелем является наличие параметра θ, характеризующего отношение инвестора к риску. Авторами статьи [2] доказывается, что оптимальное управление $h(t)$, как функция от наблюдаемого значения макроэкономического фактора x отыскивается как минимум линейно - квадратичной формы

$$\frac{1}{2}(\frac{\theta}{2}+1)\langle h^T\Sigma, \Sigma^T h\rangle - \langle h^T, (A+\alpha x)\rangle$$

при наличии ограничения $\Sigma_{i=1}^m h_i = 1$.

В данной работе мы покажем, что предельные значения (при $t \to \infty$) математического ожидания и нормированной дисперсии можно найти, пользуясь только простейшими операциями линейной алгебры.

2 Вспомогательные теоремы и леммы

2.1 Разложение мартингала и теорема об эллиптическом дифференциальном операторе

Приведем сначала некоторые известные классические теоремы, необходимые для дальнейших рассуждений (см [6]).

Теорема 1. *: Пусть η_t – мартингал, $\mathbf{M}\eta_t = 0$ $\mathbf{M}\eta_t^2 < \infty$. Тогда*

1) имеет место разложение Дуба - Мейера

$$\eta_t^2 = \langle \eta_t \rangle + N_t$$

где $\langle \eta_t \rangle$ – растущий процесс с абсолютно непрерывными траекториями (т.н. квадратичная характеристика мартингала η_t), N_t – мартингал.

2)(центральная предельная теорема для квадратично интегрируемых мартингалов).

Пусть кроме того, $\lim_{t\to\infty} \frac{\eta_t}{\sqrt{t}} = C$, где C – постоянная матрица. Тогда

$$\frac{\eta_t}{\sqrt{t}} \xrightarrow{distr} N(0, C)$$

при $t \to +\infty$ (через $\xrightarrow{distr}$ обозначим сходимость по распределению), $N(a, B)$ - нормальное распределние с вектором математического ожидания a и матрицей ковариаций B.

Теорема 2. *(см. [5]): Пусть*

$$L \equiv a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + F_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

- эллиптический дифференциальный оператор в $\mathbb{R}^n$ с гладкими коэффициентами,

$$L^* \equiv a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}(F_i(x))$$

- формально сопряженный к L дифференциальный оператор и

$$\frac{(F(x),x)}{|x|} \leq -C_0|x|^{\alpha}, \alpha > -1 \tag{5}$$

при $|x| > R_0$, где R_0 – достаточно большое число. Тогда уравнение $L^*p(x) = 0$ в $\mathbb{R}^n$ имеет единственное (с точностью до умножения на произвольную постоянную) решение $p(x) > 0$ в $\mathbb{R}^n_x$ и $|p(x)| \leq C_N(1+|x|)^{-N}$ $\forall N > 0$. Кроме того, уравнение $Lu = f(x)$, где $f(x)$ – гладкая функция полиномиального роста в $\mathbb{R}^n$ однозначно разрешимо с точностью до аддитивной постоянной тогда и только тогда, когда $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)p(x)dx = 0$.

2.2 Диффузионные процессы

Рассмотрим диффузионный процесс x_t, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$dx_t = F(x_t)dt + \Lambda d\omega_t, x_t \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

где Λ матрица размерности $n \times N$, ω_t – N-мерный винеровский процесс с независимыми компонентами. Данный процесс аналогичен процессу макроэкономических факторов $x(t)$. Следующая теорема представляет вариант эргодической теоремы Биркгофа.

Теорема 3. *: Пусть диффузионный процесс x_t, удовлетворяющий уравнению (6), а вектор функция F условиям теоремы 2, $p(x)$ – решение уравнения $L^*p(x) = 0$, удовлетворяющее условиям $p(x) > 0$ и $\int_{\mathbb{R}^n} p(x)dx = 1$, $|p(x)| \leq C_N(1+|x|)^{-N}$ $\forall N > 0$. Пусть гладкая функция $g(x)$ удовлетворяет неравенству $|g(x)| \leq C(1+|x|)^M$ для некоторого $M > 0$. Тогда*

$$\lim_{t\to\infty}(\frac{1}{t}\int_0^t g(x_s)ds) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)p(x)dx.$$

Лемма 1. *(см [6]): Пусть процесс $\xi_t = \int_0^t \sum_{i=1}^N V_i(x_s,s)d\omega_s^i$, где ω_s^i - независимые одномерные винеровские процессы, $V_i(x,s)$ $i = 1,\ldots,N$ – гладкие функции. Тогда ξ_t – мартингал и его квадратичная характеристика $\langle\xi_t\rangle$ задается формулой*

$$\langle\xi_t\rangle = \int_0^t \sum_{i=1}^N V_i^2(x_s,s)ds.$$

Если процесс x_t имеет инвариантную меру с плотностью распределения $p(x)$ и функции $V_i(x,s)$ не зависят от s, то предельное значение квадратичной характеристики задается формулой

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta_t}{\sqrt{t}} \equiv C = \int_{\mathbb{R}^n_x}[\sum_{i=1}^N V_i^2(x)]p(x)dx.$$

2.3 Дополнительные рассуждения

Определим процесс

$$\eta_t = \frac{1}{t}(\int\limits_0^t g(x_s)ds + \int\limits_0^t h^T \Sigma d\omega_s)$$

где g и h – гладкие скалярная и векторнозначная функции размерности m, Σ – матрица с постоянными коэффициентами размерности $m \times N$. Заметим, что в нашем конкретном случае роль процесса η_t играет процесс $\rho(t,\theta)$, моделирующий мгновенную процентную ставку.

Теорема 4. *: Пусть для векторного поля $F(x)$ выполнено условие (5). Положим $\langle g\rangle_p = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)p(x)dx$, где гладкая функция $g(x)$ и компоненты гладкой функции $h(x)$ удовлетворяют неравенствам: $|g(x)| \le C(1+|x|)^M$ и $|h_j(x)| \le C(1+|x|)^M$ для некоторого $M > 0$. Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{M}\eta_t = \langle g\rangle_p$$

$$\sqrt{t}(\eta_t - \langle g\rangle_p) \xrightarrow{distr} N(0,C),$$

где $C = \langle|(\nabla_x\Gamma)^T\Lambda + h^T\Sigma|^2\rangle_p$, а $\Gamma(x)$ - решение в классе полиномиально - растущих функций уравнения $L\Gamma(x) = \langle g\rangle_p - g(x)$ в $\mathbb{R}^n$ (которое существует и единственно с точностью до аддитивной постоянной согласно теореме 2).

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный процесс

$$z_t = \int\limits_0^t g(x_s)ds + \Gamma(x_t) + \int\limits_0^t h^T\Sigma d\omega_s$$

где функция $\Gamma(x)$ пока не выбрана. Тогда в силу формулы Ито

$$dz_t = (g(x_t) + L\Gamma(x_t))dt + \Gamma'_x(x_t)\Lambda d\omega_t + h^T\Sigma d\omega_t.$$

Выберем $\Gamma(x)$ таким образом, чтобы $L\Gamma(x) = \langle g\rangle_p - g(x)$, что можно сделать согласно теореме 2. Тогда

$$dz_t = \langle g\rangle_p dt + \nabla\Gamma(x_t)\Lambda d\omega_t + h^T\Sigma d\omega_t,$$

и процесс $\xi_t = z_t - \langle g\rangle_p t = \int_0^t (\nabla\Gamma(x_s))^T\Lambda d\omega_s + \int_0^t h^T\Sigma d\omega_t$ - мартингал. Согласно лемме 1 и теореме 1

$$\frac{z_t - \langle g\rangle_p t}{\sqrt{t}} \xrightarrow{distr} N(0,C), C = |(\nabla_x\Gamma)^T\Lambda + h^T\Sigma|^2,$$

или, поскольку $z_t = t\eta_t + \Gamma(x_t)$,

$$\frac{t\eta_t + \Gamma(x_t) - \langle g\rangle_p t}{\sqrt{t}} \xrightarrow{distr} N(0,C)$$

т.к. $\frac{\Gamma(x_t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{distr} 0$, то $\sqrt{t}(\eta_t - \langle g\rangle_p) \xrightarrow{distr} N(0,C)$, что и требовалось доказать.

3 Задача об “основном состоянии”

Для дифференциального оператора $L \equiv a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + F_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + C(x)$, где a_{ij} – коэффициенты матрицы A, удовлетворяющей условию эллиптичности $a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2$, вектор функция $F(x)$ удовлетворяет оценке $|F(x)| \leq C_1 + C_2|x|$, а функция $C(x) \to -\infty$ при $|x| \to \infty$ рассмотрим теперь задачу об "основном состоянии"Эта задача состоит в определении пары $(\lambda, u(x))$, такой что $Lu = \lambda u$ в $\mathbb{R}^n$, где λ – действительное число, $u(x)$ – неотрицательная функция, стремящаяся к нулю при $|x| \to \infty$. В [4] доказаны существование и единственность пары $(\lambda, u(x))$ при указанных выше условиях (функция $u(x)$ определена с точностью до умножения на постоянную). Ниже будет доказано, что характеристики основного состояния для некоторого оператора определяют аналог "эффективного фронта" нашей задачи управления портфелем.

Предположим дополнительно, что $F(x)$ удовлетворяет условию (5), а функция $C(x)$ является функцией полиномиального роста, т.е. $C(x) \leq K(1+|x|)^M$ для некоторых постоянных $K > 0$, $M > 0$.

Рассмотрим оператор L_γ с малым параметром $\gamma > 0$

$$L_\gamma \equiv a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + F_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \gamma C(x)$$

и соответствующее этому оператору "основное состояние" $(\lambda_\gamma, u_\gamma(x))$. Определим также оператор $L_0 \equiv a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + F_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Рассмотрим формальное асимптотическое разложение $\lambda_\gamma = \lambda_0 + \gamma\lambda_1 + \ldots$; $u_\gamma = 1 + \gamma u_1 + \ldots$. Подставим эти разложения в равенство $L_\gamma u_\gamma = \gamma\lambda_\gamma u_\gamma$. Тогда величина λ_0 должна определятся, как единственная постоянная (см. теорему 2) при которой уравнение

$$L_0 u_1(x) = -C(x) + \lambda_0$$

имеет единственное (с точностью до аддитивной постоянной) решение $u_1(x)$ в классе функций полиномиального роста. Согласно теореме 2 $\lambda_0 = \int_{\mathbb{R}^n} C(x)p(x)dx$ где $p(x) > 0$ удовлетворяет уравнению $L^* p(x) = 0$ и условию $\int_{\mathbb{R}^n} p(x)dx = 1$.

4 Алгоритм вычисления эффективного фронта

Пусть $F(x) = B + \beta x$, $a_{ij} = \frac{1}{2}(\Lambda\Lambda^T)_{ij}$. Определим теперь постоянные $\lambda_0^{\theta,1}$ и $\lambda_0^{\theta,2}$ как (единственные) постоянные, при которых разрешимы задачи

$$L_0 u_1^\theta(x) = -L^\theta + \lambda_0^{\theta,1}, \tag{7}$$

$$L_0 u_1^\theta(x) = -|(\nabla_x u_1^\theta(x))^T\Lambda + h^T\Sigma|^2 + \lambda_0^{\theta,2}. \tag{8}$$

Согласно теореме 4 предельные значения (при $t \to \infty$) $\mathbf{M}\rho(t,\theta)$ и квадрата дисперсии случайной величины $\sqrt{t}(\rho(t,\theta) - \mathbf{M}\rho(t,\theta))$ совпадают с числами $\lambda_0^{\theta,1}$ и $\lambda_0^{\theta,2}$ соответственно.

Чтобы найти значения $\lambda_0^{\theta,1}$ и $\lambda_0^{\theta,2}$ заметим, что достаточно найти решение задачи (7) и (8) в виде квадратичных форм

$$u_1^\theta(x) = (W_1^{(2)}x, x) + (w_1^{(1)}, x)$$

$$u_2^\theta(x) = (W_2^{(2)}x, x) + (w_2^{(1)}, x)$$

Действительно, в силу единственности решения, найденное таким образом решение совпадает с точностью до постоянной с любым другим решением задач (7) и (8).

Пусть

$$L_\theta(x) = (C_1^{(2)}x, x) + (c_1^{(1)}, x) + c_1^{(0)},$$

$$|(\nabla_x u_1^\theta(x))^T \Lambda + h^T \Sigma|^2 = (C_2^{(2)}x, x) + (c_2^{(1)}, x) + c_2^{(0)}$$

Вычисления показывают, что решение задачи (7) и (8) эквивалентны линейным системам

$$\begin{cases} \beta^T W_i^{(2)} + W_i^{(2)}\beta + C_i^{(2)} = 0, \\ 2B^T W + w^T \beta + c_i^{(1)} = 0, \\ 2(A^\Lambda, W) + (B, w) + c_i^{(0)} = \lambda_0^{\theta,i}. \end{cases} \tag{9}$$

при $i = 1, 2$ соответственно. Здесь $(A, B) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$, где a_{ij}, b_{ij} - элементы матрицы A, B соответственно.

Значит, для каждого $\theta > 0$ мы можем найти пару $(\lambda_0^{\theta,2}, \lambda_0^{\theta,1})$ используя только операции линейной алгебры, а именно решая линейную систему (9) для определения матрицы $W_i^{(2)}$, вектора $w_i^{(1)}$ и числа $\lambda_0^{\theta,i}$ $i = 1, 2$.

Определим теперь кривые $\Phi(t) = \{(\mathbf{D}^2(\frac{\ln V^\theta(t)}{t}), \mathbf{M}(\frac{\ln V^\theta(t)}{t})), \theta \in (0, \theta_0]\}$ и $\Phi(\infty) = \{(\lambda_0^{\theta,2}, \lambda_0^{\theta,1}), \theta \in (0, \theta_0]\}$, а также преобразование плоскости $(\mathbf{D}^2, \mathbf{M}) : T_t(a, b) = (\sqrt{t}a, b)$. Кривые $\Phi(t)$ и $\Phi(\infty)$ являются аналогом фронта эффективного портфеля при конечном t и $t = \infty$ для исходной задачи управления портфелем. Следующая теорема является простым следствием теоремы 4.

Теорема 5. *: Пусть в уравнении (2) матрица B устойчива. Тогда при $t \to \infty$*

$$\sqrt{t}(\frac{\ln V^\theta(\omega, t)}{t} - \lambda_0^{\theta,1}) \xrightarrow{distr} N(0, \lambda^{\theta,2})$$

где $\ln V^\theta(\omega, t)$ - процесс, моделирующий капитал управляемого портфеля,

$$\lambda_0^{\theta,1} = \langle L^\theta(x) \rangle_p,$$

$$\lambda_0^{\theta,2} = \langle |(\nabla_x u_1^\theta(x))^T \Lambda + h^T \Sigma|^2 \rangle_p$$

$u_1(x)$ - решение уравнения $L_0 u_1(x) = -L^\theta(x) + \langle L^\theta(x) \rangle_p$ в классе полиномиально растущих функций в $\mathbb{R}^n$. Определения величин $\lambda_0^{\theta,1}$, $\lambda_0^{\theta,2}$ сводится к решению линейных систем алгебраических уравнений вида (9) описаным выше способом.

Таким образом мы получили следующий алгоритм вычисления предельного эффективного фронта инвестиционного портфеля.

1) Находим минимизирующий элемент $h = (h_1, \ldots, h_m)$ вадратичной формы

$$K_\theta(h,x) = \frac{1}{2}(\frac{\theta}{2}+1)\langle h^T\Sigma, \Sigma^T h\rangle - \langle h^T, (A+\alpha x)\rangle$$

на линейном ограничении $h_1 + \ldots + h_m = 1$ в $\mathbb{R}^m$.

Минимизирующий элемент $h = Mx + \mu$, где $(M)_{ij} = (M')_{ij}$ $i = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{1,n}$ $M_{mj} = -\sum_{k=1}^{m-1}(M'_{kj})$ $j = \overline{1,n}$,

где матрица M' определяется следующий образом:

$M' = \frac{1}{2}\widetilde{\Sigma}^{-1}\alpha'$ где $(\widetilde{\Sigma_{ij}}) := \Sigma'_{ij} + \Sigma'_{mm} - \Sigma'_{mi} - \Sigma'_{mj}$, $\Sigma'_{ij} := \frac{1}{2}(\frac{\theta}{2}+1)(\Sigma\Sigma^T)_{ij}$ $i,j = \overline{1, m-1}$ и $(\alpha'_{ij}) = \alpha_{ij} - \alpha_{mj}$ $i = \overline{1, m-1}$ $j = \overline{1,n}$,

а вектор μ таким образом :

$\mu_i = \mu'_i$ $i = \overline{1, m-1}$ $\mu_m = 1 - \sum_{k=1}^{m-1}\mu'_k$ где $\mu' = \frac{1}{2}\widetilde{\Sigma}^{-1}\eta$ $\eta_i = 2(\Sigma'_{mm} - \Sigma'_{mi}) + A_i - A_m$, $i = \overline{1, m-1}$

2) Подставляем минимизирующий элемент $h = Mx + \mu$ в квадратичную форму $K_\theta(h,x)$. После преобразований получаем $K_\theta(h,x) = (C^2_\theta x, x) + (C^1_\theta, x) + C^0_\theta$ где $C^2_\theta = M^T\Sigma' M - M^T\alpha$; $C^1_\theta = M^T\Sigma'\mu + (\mu^T\Sigma' M)^T - M^T A - (\mu^T\alpha)^T$; $C^0_\theta = \mu^T\Sigma'\mu - \mu^T A$

3) Найдем тройку $(V, v, \lambda^{(1)})$ где V – матрица размерности $n \times n$, симметричная и положительно определенная, v – вектор размерности n, $\lambda^{(1)}$ – число, удовлетворяющую системе

$$\begin{cases} \beta^T V + V\beta + C^{(2)}_\theta = 0, \\ 2B^T V + v^T\beta + C^{(1)}_\theta = 0, \\ 2(A^\Lambda, V) + (B, v) + C^{(0)}_\theta = \lambda^{(1)}. \end{cases} \tag{10}$$

где $A^\Lambda = \frac{1}{2}\Lambda\Lambda^T$, $(A^\Lambda, V) \equiv \sum_{i,j=1}^n A^\Lambda_{ij}, V_{ij}$.

Далее мы будем использовать следующую классическую теорему Ляпунова: если в уравнении $N^T P + PN = -R$ матрица N является гурвицевой (т.е. все собственные значения лежат в левой полуплоскости), то для любой симметричной положительно определенной матрицы R это уравнение имеет единственное решение – положительно определенную симметричную матрицу $P = P^T$.

Первое уравнение в (10) удовлетворяет условию теоремы Ляпунова, следовательно решая это уравнение находим симметричную матрицу V. Из второго уравнени в (10), используя найденное значение V, получаем $v^T = -2B^T V\beta^{-1} - C^1_\theta\beta^{-1}$. Из третьего уравнения находим $\lambda^{(1)} = 2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A^\Lambda_{ij}V_{ij} + \sum_{i=1}^n B_i v_i + C^0_\theta$

4) Определим квадратичную форму $\nu^\theta(x) := (V^\theta x, x) + (v^\theta, x)$. Опираясь на тот факт, что V - симметричная матрица получам, что $\nabla_x\nu^\theta(x) = 2Vx + v$. Используя полученные выше выражение для $\nabla_x\nu^\theta(x)$ и $h = Mx + \mu$ находим

$$|(\nabla_x\nu^\theta(x))^T\Lambda + h^T\Sigma|^2 = (Q^2_\theta x, x) + (q^1_\theta, x) + q^0_\theta,$$

где $Q^2_\theta = (2V^T\Lambda + M^T\Sigma)(2\Lambda^T V + \Sigma^T M)$ - симметричная матрица размерности $n \times n$, $q^1_\theta = 2(2V^T\Lambda + M^T\Sigma)(\Lambda^T v + \Sigma^T\mu)$ - вектор размерности n, $q^0_\theta = (v^T\Lambda + \mu^T\Sigma)(\Lambda^T v + \Sigma^T\mu)$ - постоянная.

5) Найдем тройку $(W, w, \lambda^{(2)})$ где W - матрица размерности $n \times n$, симметричная и положительно определенная, w - вектор размерности n, $\lambda^{(2)}$ - число, удовлетворяющую системе

$$\begin{cases} \beta^T W + W\beta + Q_\theta^{(2)} = 0, \\ 2B^T W + w^T \beta + q_\theta^{(1)} = 0, \\ 2(A^\Lambda, W) + (B, w) + q_\theta^{(0)} = \lambda^{(2)}. \end{cases} \tag{11}$$

6) Проводя вычисления для различных $\theta \in (0, 1)$, получим кривую на плоскости, состоящую из пар точек $(\lambda_0^{(\theta,2)}, \lambda_0^{(\theta,1)})$.

5 Пример

Рассмотрим следующий пример

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{S_1} = (0,15 - X(t))dt + 0,2dW_1(t), S_1(0) = s_1 > 0, \\ \frac{dS_2}{S_2} = X(t)dt + dW_2(t), S_2(0) = s_2 > 0 \end{cases} \tag{12}$$

$$dX(t) = (0,05 + X(t))dt + 0,02dW_3(t), X(0) = x. \tag{13}$$

Построим график точек $(\mathbf{E}, \mathbf{D^2})$ при различных значениях $\theta \in (0; 1)$.

Применение описанного метода позволяет получить кривую изображенную на рис. 1.

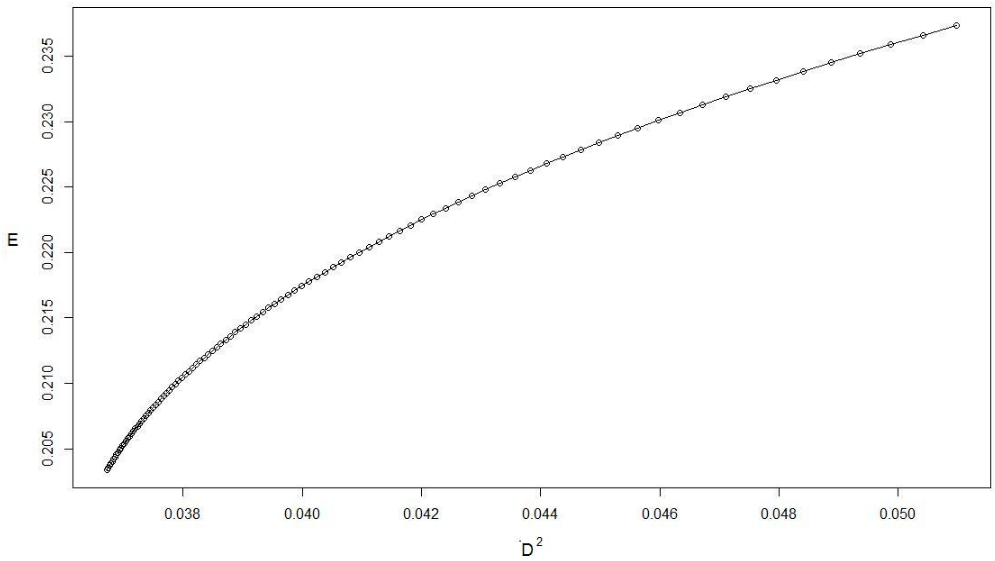

Рис. 1:

Естественно, что при более рискованном управлении портфелем мы получаем большее значение средней доходности $(\mathbf{E})$, чем при менее рискованном управлении.

Список литературы

[1] Markowitz, H.M. Portfolio Selection, Journal of Finance, v.7, 77-91, 1952

[2] Bielecki T., Pliska S. Risk Sensitive Dynamic Asset Management," J. Appl. Math. and Optimiz. Vol. 39, No 3. 1999. P. 337–360.

[3] Bielecki T., Pliska S., and Sherris M. Risk Sensitive Asset Allocation. J. Econ. Dynamics and Contr. Vol. 24, No 8. 2000. P. 1145–1177.

[4] А.Л. Пятницкий, А.С. Шамаев Ассимптотическое поведение собственных значений и собственных функций несамосопряженного оператора в $\mathbb{R}^n$" Труды семинара им. И.Г. Петровского 2003. том 23. стр. 287–308.

[5] A. Veretennikov, E. Pardour. "On Poisson equation and diffusion approximation" Ann. Probab. 29 № 3 1061 - 1085 (2010) ISSN 0091-1798.

[6] Справочник по теории вероятностей и математической статистики. Под ред. акад. АН УССР В.С. Королюка, Киев, "Наукова думка" , 1978г.