# Статистический практикум
# Задание N 6
## Статистические методы выбора семейства распределения данных

Пусть $y = (y_1, \ldots, y_n)^T, \quad y_i \in R^1_+, \quad y_i$ – н.о.р. случайные величины, $i = \overline{1,n}$. Обозначим

$\mathcal{L}(y_1) -$ функцию распределения случайной величины $y_1$;
$\mathcal{L}'(y_1) -$ плотность распределения случайной величины $y_1$;
$\mathcal{F}_i -$ семейство порождающих распределений при гипотезе $\Gamma_i, i = 1, 2$;
$\Gamma_i -$ гипотезу о типе порождающего распределения, $i = 1, 2$;
$S_i(y) -$ достаточную статистику при гипотезе $\Gamma_i, i = 1, 2$;
$g(\theta_0) -$ параметрическую функцию, подлежащую доверительному оцениванию;
$T(y) -$ статистику критерия ;
$a_1(\theta_0) = \mathbf{E}\{y_1; \theta_0\} -$ среднее для $y_1$ при принятой гипотезе ;
$R(u; \theta_0) = 1 - F_0(u; \theta_0) -$ функцию надежности (дожития) при принятой гипотезе ;
$\zeta_q(\theta_0) - q -$ квантиль функции распределения $F_0$, т.е. $F_0(\zeta_q(\theta_0); \theta_0) = q$.

6.1 Разработайте алгоритм порождения случайных величин с распределением из $\mathcal{F}_i, i = 1, 2$.

6.2 Составьте программу для компьютерного порождения выборок с распределением из $\mathcal{F}_i, i = 1, 2$.

6.3 Проверьте качество построенного датчика на основе графических и компьютерно-аналитических методов.

6.4 Создайте каталог графиков плотностей расперделения $\mathcal{L}'(y_1)$ при гипотезах $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, выбрав характерные значения параметров этих плотностей.

### Используя данные таблицы B:

6.5 Найдите $\check{\theta}_n$ – ОМП и $\tilde{\theta}_n$ – моментные оценки для $\theta_0$ при гипотезах $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$.

6.6 Постройте гистограмные и ядерные (на основе ядра $K_i$) оценки для $\mathcal{L}'(y_1)$ и нанесите на эти графики параметрические оценки плотностей распределения $\mathcal{L}'(y_1)$ при гипотезах $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, используя оценки из п.6.5.

6.7 При графической проверке гипотезы $\Gamma_1$ против альтернативы $\Gamma_2$ постройте соответствующие "P-P"вероятностные графики. Предварительно выявите к каким кривым при $n \to \infty$ будут стремиться "P-P"вероятностные графики как при справедливости гипотезы $\Gamma_1$, так и в случае справедливости гипотезы $\Gamma_2$.

6.8 Для выбора гипотезы о типе распределения данных используйте статистику критерия $T$. Найдите ее наблюденный уровень значимости. Сравните его значение с ошибкой первого рода $\alpha_1$. Примете ли Вы гипотезу $\Gamma_1$ ?

6.9 Оцените мощность критерия на основе статистики $T$.

6.10 Считая, что $n \to \infty$, где $n$ объем данных, в рамках принятой гипотезы постройте $\underline{g}$ - асимптотическую нижнюю $\gamma$-доверительную границу для $g(\theta_0)$ на основе $\check{\theta}_n$ – ОМП параметра $\theta_0$. В качестве значения $u$ возьмите оценку $q$-квантиля порождающей функции распределения в рамках принятой Вами гипотезы.

6.11 Какова асимптотическая относительная ошибка $\underline{g}$ если принятая Вами гипотеза ошибочна?

# Параметры задания N 6 статистического практикума

## 6.1 Семейства распределений $\mathcal{F}_1$, образующих гипотезу $\Gamma_1$.

Пусть $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$, $y_i \in R^1_+$, $y_i$ – н.о.р. случайные величины, $i = \overline{1, n}$.

### 6.1.1 Семейство распределений *Бирнбаума-Сондерса* ($\mathcal{BS}$).

Обозначение случайной величины и принятая параметризация семейства определяется следующим образом:

$$y_1 \stackrel{d}{=} BS(\alpha_0, \sigma_0), \tag{1}$$

$$\mathcal{L}(y_1) = BS(u; \alpha_0, \sigma_0) = \Phi(\alpha^{-1}\varepsilon(u/\sigma_0)),\ u > 0, \tag{2}$$

где

$$\xi(u) = u^{1/2} - u^{-1/2},\ u > 0, \tag{3}$$

$$\theta_0 = (\alpha_0, \sigma_0)^T,\ \alpha_0 > 0,\ \sigma_0 > 0,\ \alpha_0 - \text{параметр формы}, \tag{4}$$

$$\sigma_0 - \text{параметр масштаба}. \tag{5}$$

Относительно свойств семейства $\mathcal{BS}$ см. [2] - [5], а также приложение ???.

### 6.1.2 Семейство *логнормальных* распределений ($\mathcal{LOGN}$).

Обозначение случайной величины и принятая параметризация семейства определяется следующим образом:

$$y_1 \stackrel{d}{=} LOGN(\mu_0, \sigma_0), \tag{6}$$

т.е.

$$y_1 \stackrel{d}{=} \exp\{N(\mu_0, \sigma_0^2)\}, \tag{7}$$

$$\mathcal{L}'(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0 u} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln u - \mu_0}{\sigma_0}\right)^2\right\}, \tag{8}$$

$$u > 0, \quad \theta_0 = (\mu_0, \sigma_0^2), \quad -\infty < \mu_0 < \infty, \quad \sigma_0^2 > 0. \tag{9}$$

### 6.1.3 Семейство *обратно-гауссовских* распределений ($\mathcal{INVG}$).

Обозначение случайной величины и принятая параметризация семейства определяется следующим образом:

$$y_1 \stackrel{d}{=} INVG(\alpha_0, \sigma_0), \tag{10}$$

$$\mathcal{L}'(y_1) = invg(u; \alpha_0, \sigma_0) = \frac{1}{\sigma_0}\sqrt{\frac{\alpha_0}{2\pi\left(\frac{u}{\sigma_0}\right)^3}} \cdot \exp\left\{-\frac{\alpha_0\left(\frac{u}{\sigma_0} - 1\right)^2}{2\frac{u}{\sigma_0}}\right\}, \tag{11}$$

$u > 0$,

$$\mathcal{L}(y_i) = \mathcal{INVG}(u; \alpha_0, \sigma_0) = \Phi\left(\sqrt{\frac{\alpha_0\sigma_0}{u}}\left(\frac{u}{\sigma_0} - 1\right)\right) + \tag{12}$$

$$+ e^{2\alpha_0}\Phi\left(-\sqrt{\frac{\alpha_0\sigma_0}{u}}\left(\frac{u}{\sigma_0} + 1\right)\right), \tag{13}$$

$$u > 0, \tag{14}$$

где $\theta_0 = (\alpha_0, \sigma_0)^T$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_0$ – параметр формы, $\sigma_0 > 0$, $\sigma_0$ – параметр масштаба.

### 6.1.4 Семейство *гамма* распределений ($\mathcal{GAMM}$).

Обозначение случайной величины и принятая параметризация семейства определяется следующим образом:

$$y_1 \stackrel{d}{=} G(\alpha_0, \sigma_0), \tag{15}$$

$$\mathcal{L}'(y_1) = \frac{u^{\alpha_0-1}\exp\{-u/\sigma_0\}}{\sigma_0^{\alpha_0}\Gamma(\alpha_0)}, \quad u > 0, \tag{16}$$

$$\theta_0 = (\alpha_0, \sigma_0)^T, \quad \alpha_0 > 0, \quad \sigma_0 > 0. \tag{17}$$

### 6.1.5 Семейство распределений *Вейбулла* ($\mathcal{W}$).

Обозначение случайной величины и принятая параметризация семейства определяется следующим образом:

$$y_1 \stackrel{d}{=} W(\alpha_0, \sigma_0), \tag{18}$$

$$\mathcal{L}'(y_1) = \frac{\alpha_0}{\sigma_0}\left(\frac{u}{\sigma_0}\right)^{\alpha_0-1}\exp\{-\left(\frac{u}{\sigma_0}\right)^{\alpha_0}\}, \quad u > 0, \tag{19}$$

$$\mathcal{L}(y_1) = 1 - \exp\{-\left(\frac{u}{\sigma_0}\right)^{\alpha_0}\}, \quad u > 0, \tag{20}$$

$\theta_0 = (\alpha_0, \sigma_0)^T, \quad \alpha_0 > 0, \quad \sigma_0 > 0.$

### 6.1.6 Семейство распределений *Парето первого рода* ($\mathcal{PAR}$1).

Обозначение случайной величины и принятая параметризация семейства определяется следующим образом:

$$y_1 \stackrel{d}{=} PAR(\alpha, \sigma), \tag{21}$$

$$\mathcal{L}'(y_1) = \alpha_0\frac{\sigma_0^{\alpha_0}}{u^{\alpha_0+1}}\mathbb{I}(u > \sigma_0), \tag{22}$$

$$\mathcal{L}(y_1) = 1 - \left(\frac{\sigma_0}{u}\right)^{\alpha_0}, \tag{23}$$

$\theta_0 = (\alpha_0, \sigma_0)^T$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_0$ – параметр формы, $\sigma_0 > 0$, $\sigma_0$ – одновременно и параметр масштаба, и пороговый параметр носителя меры.

### 6.1.7 Семейство *логлогистических* распределений ($\mathcal{LLOGIST}$).

Обозначение случайной величины и принятая параметризация семейства определяется следующим образом:

$$y_1 \stackrel{d}{=} LLOGIST(\alpha_0, \sigma_0), \tag{24}$$

$$\mathcal{L}'(y_1) = \frac{\alpha_0(\frac{u}{\sigma_0})^{\alpha_0-1}}{\sigma_0(1 + (\frac{u}{\sigma_0})^{\alpha_0})^2}, \tag{25}$$

$$u > 0, \quad \theta_0 = (\alpha_0, \sigma_0), \quad \alpha_0 > 0, \quad \sigma_0 > 0, \tag{26}$$

## 6.2 Семейства распределений $\mathcal{F}_2$, образующих гипотезу $\mathbf{\Gamma_2}$.

### 6.2.1 Семейство распределений *Бирнбаума-Сондерса* ($\mathcal{BS}$), см. пункт 6.1.1.

### 6.2.2 Семейство *логнормальных* распределений ($\mathcal{LOGN}$), см. пункт 6.1.2.

### 6.2.3 Семейство *обратно-гауссовских* распределений ($\mathcal{INVG}$), см. пункт 6.1.3.

### 6.2.4 Семейство *гамма* распределений ($\mathcal{GAMM}$), см. пункт 6.1.4.

### 6.2.5 Семейство распределений *Вейбулла* ($\mathcal{W}$), см. пункт 6.1.5.

### 6.2.6 Семейство распределений *Парето первого рода* ($\mathcal{PAR}\mathbf{1}$), см. пункт 6.1.6.

### 6.2.7 Семейство *логлогистических* распределений ($\mathcal{LLOGIST}$), см. пункт 6.1.7.

## 6.3 О статистиках критериев $T(y)$.

Пусть $y = (y_1, \dots, y_n)^T$, $y_1 \in R^1$, $y_i$ – н.о.р. случайные величины, $i = \overline{1, n}$,

$$\mathcal{L}(y_1) = F_0(u, \theta_0), \theta_0 \in \Theta.$$

При $\Gamma_i$ порождающая функция распределения $F_0(u, \theta_0) \in \mathcal{F}_i$, $i = \overline{1, 2}$.

Для семейств распределений $\mathcal{BS}$, $\mathcal{W}$ и $\mathcal{LLOGIST}$ наблюденные уровни значимости (модифицированных) статистик Колмогорова, Крамера-фон Мизеса, Андерсона-Дарлинга и "остаточного среднего времени жизни" оцениваются на основе метода бутстрепа (см. приложение 5.2), а для семейств распределения $\mathcal{LOGN}$, $\mathcal{INVG}$, $\mathcal{GAMM}$, $\mathcal{PAR}1$ – на основе метода достаточного эмпирического усреднения (см. приложение 5.3). Для остальных статистик (отношения максимумов правдоподобий и критериев типа хи-квадрат) приближенные уровни значимости вычисляются по таблицам распределения хи-квадрат.

### 6.3.1 Статистика Колмогорова

$$T_1(y) = \sqrt{n} \sup_u \mid \hat{F}_n(u) - F_0(u; \hat{\theta}(y)) \mid, \tag{27}$$

где $\hat{\theta}(y)$ – состоятельная оценка для параметра $\theta_0$.

Покажите, что

$$T_1(y) = \max_{1 \le i \le n} \left( \max \left( \left( \frac{i}{n} - Z_{(i)} \right), \left( Z_{(i)} - \frac{i-1}{n} \right) \right) \right), \tag{28}$$

где $Z_{(i)} = F_0 \left( y_{(i)}; \hat{\theta}(y) \right)$.

### 6.3.2 Статистика Крамера-фон Мизеса

$$T_2(y) = n \int_{-\infty}^{\infty} \left( \hat{F}_n(u) - F_0(u; \hat{\theta}(y)) \right)^2 dF_0(u; \hat{\theta}(y)), \tag{29}$$

где $\hat{\theta}(y)$ – 'состоятельная оценка для параметра $\theta_0$.

Покажите, что

$$T_2(y) = \sum_{i=1}^{n} \left( Z_{(i)} - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 + \frac{1}{12n}, \tag{30}$$

где $Z_{(i)} = F_0 \left( y_{(i)}; \hat{\theta}(y) \right)$.

### 6.3.3 Статистика Андерсона-Дарлинга

$$T_3(y) = n \int_{-\infty}^{\infty} \left( \hat{F}_n(u) - F_0(u; \hat{\theta}(y)) \right)^2 \cdot \\ \cdot \left( F_0(u; \hat{\theta}(y))(1 - F_0(u; \hat{\theta}(y))) \right)^{-1} dF_0(u; \hat{\theta}(y)), \tag{31}$$

где $\hat{\theta}(y)$ – состоятельная оценка для параметра $\theta_0$.

Покажите, что

$$T_3(y) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\ln\left(Z_{(i)}(1-Z_{(i)})\right) - n, \tag{32}$$

где $Z_{(i)} = F_0\left(y_{(i)}; \hat{\theta}(y)\right)$.

### 6.3.4 Статистика отношения максимумов правдоподобий

$$T_4(y) = 2\ln\frac{\max_{\theta\in\Gamma_1\cup\Gamma_2} p(y,\theta)}{\max_{\theta\in\Gamma_1} p(y,\theta)}. \tag{33}$$

При выполнении условий *теоремы об отношении максимумов правдоподобий* (см. Приложение ...) и $n \to \infty$

$$T_4(y) \stackrel{d}{=} \chi^2_{\dim\Gamma_1\cup\Gamma_2 - \dim\Gamma_1} + o_d(1), \tag{34}$$

см. приложение 5.3.

### 6.3.5 Статистика "остаточного среднего времени жизни"

Пусть

$$r(u,\theta) = \frac{\int_u^\infty (1 - F_0(v,\theta_0)\, dv}{1 - F_0(u,\theta_0)}, \tag{35}$$

$$r_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - u)\, I\!I(y_i \geq u)}{\sum_{i=1}^n I\!I(y_i \geq u)} - u\ . \tag{36}$$

Статистику критерия можно взять в следующем виде

$$T_5(y) = \sqrt{n}\sup_u \mid r_n(u) - r(u;\hat{\theta}(y)) \mid, \tag{37}$$

где $\hat{\theta}(y)$ – состоятельная оценка для параметра $\theta$.

### 6.3.6 Статистика хи-квадрат Пирсона для проверки сложной гипотезы

Пусть

$$a_0 = -\infty < a_1 < a_2 < \ldots < a_{r-1} < a_r = \infty, \tag{38}$$

$$\nu_j = \sum_{i=1}^n I\!I(a_{j+1} < y_i < a_j), \quad \sum_{j=1}^r \nu_j = n, \tag{39}$$

$$p_j(\theta_0) = F_0(a_{j+1};\theta_0) - F_0(a_j;\theta_0), \tag{40}$$

$$p_j(\theta_0) > 0 \quad \text{для всех } i = \overline{1,r}, \quad \dim\theta_0 = m, \quad \sum_{j=1}^r p_j(\theta_0) = 1. \tag{41}$$

Статистика хи-квадрат критерия Пирсона имеет вид

$$X^2(\tilde{\theta}_n) = \sum_{j=1}^r \frac{(\nu_j - np_j(\tilde{\theta}_n))^2}{np_j(\tilde{\theta}_n)}, \tag{42}$$

$$\text{где } \tilde{\theta}_n = Arg\min_{\theta\in\Theta} X^2(\theta), \tag{43}$$

$$\text{или } \tilde{\theta}_n = Arg\max_{\theta\in\Theta}\prod_{j=1}^r \frac{(p_j(\theta))^{\nu_j}}{\nu_j!}. \tag{44}$$

При выполнении условий теоремы о свойствах хи-квадрат статистики Пирсона при проверке сложной гипотезы (см. Приложение ...) и $n \to \infty$

$$X^2(\tilde{\theta}_n) \stackrel{d}{=} \chi^2_{r-1-m} + o_d(1), \tag{45}$$

см. приложение 5.2.

6.3.7 **Статистика хи-квадрат в форме Никулина-Джапаридзе.** Пусть

$$a_0 = -\infty < a_1 < a_2 < \ldots < a_{r-1} < a_r = \infty, \tag{46}$$

$$\nu_j = \sum_{i=1} \mathbb{I}(a_{j+1} < y_i < a_j), \quad \sum_{j=1}^{r} \nu_j = n, \tag{47}$$

$$p_j(\theta_0) = F_0(a_{j+1};\theta_0) - F_0(a_j;\theta_0), \tag{48}$$

$$p_j(\theta_0) > 0 \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1,r}, \quad \dim\theta_0 = m, \quad \sum_{j=1}^{r} p_j(\theta_0) = 1, \tag{49}$$

$$X^2(\tilde{\theta}_n) = \sum_{j=1}^{r} \frac{(\nu_j - np_j(\tilde{\theta}_n))^2}{np_j(\tilde{\theta}_n)}. \tag{50}$$

Далее предположим, что для всех $\theta \in \Theta$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)^T$, выполнены также следующие условия

$$\mathcal{Y}_1 \ : \ \frac{\partial^2 p_j(\theta)}{\partial\theta_k \partial\theta_s} - \tag{51}$$
$$\text{непрерывные функции} \ \text{ для } \ k, s = \overline{1,m};$$

$$\mathcal{Y}_2 \ : \ \text{матрица} \ \ A(\theta) = \left(\frac{\partial p_j(\theta)}{\partial\theta_k}; j = \overline{1,r}, k = \overline{1,m}\right) \tag{52}$$
$$\text{имеет ранг} \quad m.$$

Введем также следующие величины:

$$\text{вектор} \ \ L(\theta) = (l_1(\theta), \ldots, l_m(\theta))^m, \tag{53}$$

$$l_j(\theta) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\nu_i}{np_i(\theta)} \frac{\partial p_i(\theta)}{\partial\theta_j}, \quad j = \overline{1,m}, \tag{54}$$

$$\text{и матрицу} \ \ J(\theta) = (J_{ks}(\theta), \ \text{ где } \ k, s = \overline{1,m}), \ \text{ где} \tag{55}$$

$$J_{ks}(\theta) = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p_i(\theta)} \frac{\partial p_i(\theta)}{\partial\theta_k} \frac{\partial p_i(\theta)}{\partial\theta_s}, \quad k, s = \overline{1,m}. \tag{56}$$

Имеет место следующее утверждение: если оценка $\tilde{\theta}_n$ является $\sqrt{n}$-состоятельной, то $W^2(\tilde{\theta}_n)$ – статистика хи-квадрат в форме Никулина-Джапаридзе обладает следующим свойством:

$$W^2(\tilde{\theta}_n) = X^2(\tilde{\theta}_n) - nL^T(\tilde{\theta}_n)J^{-1}(\tilde{\theta}_n)L(\tilde{\theta}_n) \stackrel{d}{=} \chi^2_{r-1-m} + o_d(1), \tag{57}$$

см.[6]

## 6.4 Набор таблиц данных (таблицы B)

Таблицы 6.1–6.3 содержат экспериментальные данные о времени жизни алюминиевых полос, подверженых изгибающим (18 циклов изгибаний в секунду) нагрузкам. Время жизни полосы исчисляется в числе циклов нагрузок умноженном на $10^{-3}$ до появления в испытуемом образце трещины. Испытания проводились при различных амплитудах изгибаниия: 31 pci (таблица 6.1), 26 pci (таблица 6.2) и 21 pci (таблица 6.3). В таблице 6.4 приводятся данные об объемах исков на выплату ущербов при страховании от пожаров в Швеции. В таблице 6.5 приводится эмпирическая функция распределения объема ущерба $L$ в связи с причинением вреда здоровью.

**Таблица 6.1**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 70 | 90 | 96 | 97 | 99 | 100 | 103 | 104 |
| 104 | 105 | 107 | 108 | 108 | 108 | 109 | 109 |
| 112 | 112 | 113 | 114 | 114 | 114 | 116 | 119 |
| 120 | 120 | 120 | 121 | 121 | 123 | 124 | 124 |
| 124 | 124 | 124 | 128 | 128 | 129 | 139 | 130 |
| 130 | 130 | 131 | 131 | 131 | 131 | 131 | 132 |
| 132 | 132 | 133 | 134 | 134 | 134 | 134 | 134 |
| 136 | 136 | 137 | 138 | 138 | 138 | 139 | 139 |
| 141 | 141 | 142 | 142 | 142 | 142 | 142 | 142 |
| 144 | 144 | 145 | 146 | 148 | 148 | 149 | 151 |
| 151 | 152 | 155 | 156 | 157 | 157 | 157 | 157 |
| 158 | 159 | 162 | 163 | 163 | 164 | 166 | 166 |
| 168 | 170 | 174 | 196 | 212 | | | |

**Таблица 6.2**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 233 | 258 | 268 | 276 | 290 | 310 | 312 | 315 |
| 318 | 321 | 321 | 329 | 335 | 336 | 338 | 338 |
| 342 | 342 | 342 | 344 | 349 | 350 | 350 | 351 |
| 351 | 352 | 352 | 356 | 358 | 358 | 358 | 362 |
| 363 | 366 | 367 | 370 | 370 | 372 | 372 | 374 |
| 375 | 376 | 379 | 379 | 380 | 382 | 382 | 389 |
| 395 | 396 | 400 | 400 | 400 | 403 | 403 | 406 |
| 408 | 408 | 410 | 412 | 414 | 416 | 416 | 416 |
| 420 | 422 | 423 | 426 | 428 | 432 | 432 | 433 |
| 433 | 437 | 438 | 439 | 439 | 443 | 445 | 445 |
| 452 | 456 | 456 | 460 | 464 | 466 | 468 | 470 |
| 470 | 473 | 474 | 476 | 476 | 486 | 488 | 489 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 490 | 491 | 503 | 517 | 540 | 560 | | |

**Таблица 6.3**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 370 | 706 | 716 | 746 | 785 |
| 797 | 844 | 855 | 858 | 886 |
| 886 | 930 | 960 | 988 | 990 |
| 1000 | 1010 | 1016 | 1018 | 1020 |
| 1055 | 1085 | 1102 | 1102 | 1108 |
| 1115 | 1120 | 1134 | 1140 | 1199 |
| 1200 | 1200 | 1203 | 1222 | 1235 |
| 1238 | 1252 | 1258 | 1262 | 1269 |
| 1270 | 1290 | 1293 | 1300 | 1310 |
| 1313 | 1315 | 1330 | 1355 | 1390 |
| 1416 | 1419 | 1420 | 1420 | 1450 |
| 1452 | 1475 | 1478 | 1481 | 1485 |
| 1502 | 1505 | 1513 | 1522 | 1522 |
| 1530 | 1540 | 1560 | 1567 | 1578 |
| 1594 | 1602 | 1604 | 1608 | 1630 |
| 1642 | 1674 | 1730 | 1750 | 1750 |
| 1763 | 1768 | 1781 | 1782 | 1792 |
| 1820 | 1868 | 1881 | 1890 | 1893 |
| 1895 | 1910 | 1923 | 1940 | 1945 |
| 2023 | 2100 | 2130 | 2215 | 2268 |
| 2440 | | | | |

**Таблица 6.4**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,335 | 0,630 | 3,460 | 0,900 | 5,325 | 0,690 | 0,979 | 0,800 |
| 0,565 | 1,000 | 0,839 | 6,100 | 1,250 | 0,500 | 4,708 | 0,000 |
| 0,799 | 5,193 | 1,401 | 2,500 | 1,060 | 0,600 | 1,326 | 0,750 |
| 1,486 | 2,800 | 1,997 | 1,000 | 14,400 | 2,000 | 0,675 | 5,093 |
| 0,625 | 0,510 | 0,830 | 0,000 | 0,564 | 0,696 | 0,350 | 0,875 |
| 3,860 | 10,194 | 1,265 | 1,600 | 3,100 | 0,225 | 1,050 | 0,537 |
| 8,967 | 0,548 | 0,110 | 2,858 | 0,320 | 0,628 | 20,049 | 1,625 |
| 0,687 | 0,544 | 2,890 | 1,377 | 0,510 | 1,382 | 0,550 | 1,500 |
| 6,970 | 4,000 | 0,800 | 3,000 | 1,300 | 2,000 | 0,530 | 1,692 |
| 0,400 | 4,595 | 0,550 | 9,627 | 0,932 | 5,979 | 2,500 | 0,560 |
| 3,085 | 0,505 | 0,466 | 0,508 | 3,553 | 3,258 | 1,127 | 2,300 |
| 5,250 | 1,220 | 1,500 | 0,500 | 0,690 | 0,716 | 0,790 | 1,880 |
| 4,000 | 0,927 | 1,000 | 0,750 | 0,450 | 1,000 | 0,721 | 0,898 |
| 4,800 | 0,768 | 0,740 | 0,610 | 1,125 | 1,000 | 0,600 | 0,654 |
| 1,500 | 0,474 | 1,300 | 5,478 | 1,430 | 0,680 | 0,500 | 1,192 |
| 0,169 | 3,185 | 0,529 | 2,000 | 0,800 | 0,700 | 2,500 | 1,215 |
| 0,575 | 1,188 | 11,641 | 2,784 | 7,354 | 0,500 | 1,439 | 0,586 |
| 3,000 | 0,572 | 31,050 | 2,550 | 0,699 | 1,435 | 0,800 | 0,494 |
| 0,814 | 0,650 | 1,057 | 0,725 | 0,900 | 0,210 | 0,485 | 0,900 |
| 0,787 | 1,280 | 0,588 | 4,200 | 2,151 | 0,837 | 1,289 | 0,785 |
| 0,670 | 1,500 | 19,200 | 0,615 | 1,544 | 0,815 | 0,400 | 3,800 |
| 4,400 | 1,000 | 1,400 | 0,665 | 0,850 | 0,500 | 0,565 | 1,900 |
| 0,500 | 2,544 | 0,995 | 2,600 | 1,400 | 1,050 | 3,500 | 0,580 |
| 0,576 | 1,035 | 1,305 | 0,000 | 1,688 | 1,180 | 0,500 | 1,400 |
| 0,500 | 0,700 | 1,000 | 0,445 | 19,107 | 0,800 | 1,800 | 1,146 |
| 0,678 | 0,800 | 0,600 | 3,500 | 0,366 | 1,100 | 13,000 | 0,500 |
| 0,600 | 0,930 | 3,500 | 0,088 | 1,200 | 1,000 | 0,594 | 34,000 |
| 3,440 | 1,535 | | | | | | |

PAPKA_SP\ZADAN_6\tabl_6_5_w.txt

**Таблица 6.5**
**Эмпирическая функция распределения ущербов $L$**
**в связи с причинением вреда здоровью**

| Интервалы группировки | Пределы удержания | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 5000 | 10000 | 25000 | 50000 | 100000 |
| 250 | 0.31857 | 0.32524 | 0.30137 | 0.30488 | 0.25407 |
| 500 | 0.47708 | 0.47179 | 0.42374 | 0.44095 | 0.38034 |
| 1000 | 0.61849 | 0.57837 | 0.56575 | 0.56194 | 0.50561 |
| 2000 | 0.74463 | 0.70611 | 0.69452 | 0.68549 | 0.63509 |
| 3000 | 0.81430 | 0.77900 | 0.77215 | 0.75610 | 0.71780 |

*см. продолжение на след. стр.*

| Интервалы группировки | Пределы удержания | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 5000 | 10000 | 25000 | 50000 | 100000 |
| 4000 | 0.85366 | 0.82367 | 0.81507 | 0.80745 | 0.77073 |
| 6000 | 0.87283 | 0.89028 | 0.86986 | 0.86425 | 0.83531 |
| 7000 | | 0.90674 | 0.88402 | 0.87644 | 0.85245 |
| 8000 | | 0.92006 | 0.90502 | 0.89730 | 0.87244 |
| 9000 | | 0.93025 | 0.91735 | 0.90725 | 0.88348 |
| 11000 | | 0.93966 | 0.93196 | 0.92908 | 0.90371 |
| 12000 | | | 0.93516 | 0.93261 | 0.90970 |
| 14000 | | | 0.94703 | 0.93806 | 0.91944 |
| 16000 | | | 0.95525 | 0.94961 | 0.92981 |
| 19000 | | | 0.95982 | 0.95764 | 0.93782 |
| 21000 | | | 0.96484 | 0.96502 | 0.94436 |
| 23000 | | | 0.96849 | 0.96727 | 0.94640 |
| 30000 | | | 0.97123 | 0.97593 | 0.96120 |
| 35000 | | | | 0.97818 | 0.96558 |
| 40000 | | | | 0.98042 | 0.96928 |
| 45000 | | | | 0.98267 | 0.97212 |
| 55000 | | | | 0.98556 | 0.97952 |
| 60000 | | | | | 0.98168 |
| 70000 | | | | | 0.98409 |
| 80000 | | | | | 0.98723 |
| 100000 | | | | | 0.99143 |
| | n=3861 | n=1276 | n=2190 | n=3116 | n=16212 |

PAPKA_SP\ZADAN_6\tabl_6_6_w.txt

**Таблица 6.6**
**Группированные данные об ущербах $L$**
**в связи с причинением вреда здоровью (пределы удержания 25.000)**

| Интервалы группировки | Частоты | Значение |
|---|---:|---:|
| 1-250 | 660 | 75,420 |
| 251-500 | 268 | 101,558 |
| 501-1,000 | 311 | 236,068 |
| 1,001-2,000 | 282 | 425,042 |
| 2,001-3,000 | 170 | 437,265 |
| 3,001-4,000 | 94 | 333,232 |
| 4,001-4,999 | 49 | 220,878 |
| 5,000-5,000 | 25 | 125,000 |
| 5,001-6,000 | 46 | 256,168 |
| 6,001-7,000 | 31 | 204,257 |
| 7,001-8,000 | 46 | 332,649 |

*см. продолжение на след. стр.*

| Интервалы группировки | Частоты | Значение |
|---|---:|---:|
| 8,001-9,000 | 27 | 233,143 |
| 9,001-9,999 | 9 | 85,411 |
| 10,000-10,000 | 18 | 180,000 |
| 10,001-11,000 | 5 | 53,475 |
| 11,001-12,000 | 7 | 80,838 |
| 12,001-14,000 | 26 | 340,215 |
| 14,001-15,000 | 13 | 194,393 |
| 15,001-16,000 | 5 | 77,756 |
| 16,001-17,000 | 3 | 49,576 |
| 17,001-18,000 | 5 | 88,431 |
| 18,001-19,000 | 2 | 37,000 |
| 19,001-19,999 | 3 | 58,629 |
| 20,000-20,000 | 5 | 100,000 |
| 20,001-21,000 | 3 | 62,651 |
| 21,001-22,000 | 6 | 128,055 |
| 22,001-23,000 | 2 | 45,000 |
| 23,001-24,000 | 2 | 48,000 |
| 24,001-24,999 | 4 | 97,864 |
| 25,000-25,000 | 34 | 850,000 |
| 25,001- | 29 | 1,491,943 |
| Всего | 2,190 | 7,049,917 |

## 6.5 Ядерные функции

### 6.5.1 $K_1$. Ядро Епанечникова

$$K(u) = \begin{cases} 3(1-u^2)/4, & |u| \le 1 \\ 0, & |u| > 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u)du &= 3/5, \\ \int_{-\infty}^{\infty} u^2 K(u)du &= 1/5. \end{aligned}$$

### 6.5.2 $K_2$. Равнобедренное треугольное ядро

$$K(u) = \begin{cases} 1-|u|, & u \le 1 \\ 0, & u > 1. \end{cases}$$

### 6.5.3 $K_3$. Ядро Коши

$$K(u) = \pi^{-1}(1+u^2)^{-1}.$$

### 6.5.4 $K_4$. Ядро Фежье-Валле-Пуссена (Fejer-de la Valée Poussen)

$$K(x) = \pi^{-1}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.$$

### 6.5.5 $K_5$. Ядро Вейерштрасса (Weierstrasse)

$$K(x) = \pi^{-1/2}e^{-x^2}.$$

### 6.5.6 $K_6$. Ядро Пикара (Picard)

$$K(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

### 6.5.7 $K_7$. Модефицированное ядро Фежье-Валле-Пуссена (Fejer-de la Valée Poussen)

$$K(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)^2.$$

### 6.5.8 $K_8$. Ядро скользящего среднего

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

### 6.5.9 $K_9$. Ядро Фурье

$$K(x) = (\pi x)^{-1}\sin x.$$

### 6.5.10 $K_{10}$. Ядро Бартлетта

$$K(u) = \begin{cases} \frac{9}{8}\left(1-\frac{5}{3}u^2\right), & |u| \le 1 \\ 0, & |u| > 1. \end{cases}$$

## 6.6 **Статистический практикум, 3-ий курс. Параметры индивидуальных вариантов заданий для практикума N 6**

PAPKA_SP\ZADAN_6\z6_var_w.txt

| Вариант | $\Gamma_1$ | $\Gamma_2$ | $B$ | $T$ | $\alpha_1$ | $\gamma_1$ | $q$ | Фамилия | $g(\theta_0)$ | Ядро |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6.1 | 1 | 2 | 1 | 7 | 0.04 | 0.99 | 0.01 | | $a_1(\theta_0)$ | $K_1$ |
| 6.2 | 1 | 3 | 2 | 6 | 0.05 | 0.956 | 0.02 | | $R(u;\theta_0)$ | $K_2$ |
| 6.3 | 1 | 4 | 3 | 5 | 0.03 | 0.963 | 0.03 | | $\zeta_q(\theta_0)$ | $K_3$ |
| 6.4 | 1 | 5 | 4 | 5 | 0.02 | 0.968 | 0.94 | | $a_1(\theta_0)$ | $K_4$ |
| 6.5 | 1 | 2 | 1 | 3 | 0.045 | 0.991 | 0.011 | | $R(u;\theta_0)$ | $K_5$ |
| 6.6 | 1 | 3 | 2 | 7 | 0.048 | 0.993 | 0.012 | | $\zeta_q(\theta_0)$ | $K_6$ |
| 6.7 | 1 | 4 | 3 | 6 | 0.031 | 0.994 | 0.013 | | $a_1(\theta_0)$ | $K_7$ |
| 6.8 | 4 | 1 | 4 | 7 | 0.029 | 0.923 | 0.914 | | $R(u;\theta_0)$ | $K_8$ |
| 6.9 | 4 | 2 | 1 | 6 | 0.03 | 0.991 | 0.015 | | $a_1(\theta_0)$ | $K_9$ |
| 6.10 | 4 | 3 | 2 | 7 | 0.04 | 0.992 | 0.021 | | $R(u;\theta_0)$ | $K_1$ |
| 6.11 | 4 | 1 | 3 | 2 | 0.07 | 0.993 | 0.022 | | $\zeta_q(\theta_0)$ | $K_2$ |
| 6.12 | 4 | 2 | 4 | 3 | 0.08 | 0.997 | 0.031 | | $\zeta_q(\theta_0)$ | $K_3$ |
| 6.13 | 2 | 5 | 1 | 6 | 0.1 | 0.998 | 0.032 | | $\zeta_q(\theta_0)$ | $K_4$ |
| 6.14 | 2 | 5 | 2 | 5 | 0.03 | 0.954 | 0.033 | | $\zeta_q(\theta_0)$ | $K_5$ |
| 6.15 | 3 | 2 | 3 | 6 | 0.04 | 0.956 | 0.041 | | $\zeta_q(\theta_0)$ | $K_6$ |
| 6.16 | 3 | 2 | 4 | 7 | 0.06 | 0.963 | 0.942 | | $\zeta_q(\theta_0)$ | $K_7$ |
| 6.17 | 2 | 3 | 4 | 6 | 0.03 | 0.935 | 0.91 | | $a_1(\theta_0)$ | $K_8$ |
| 6.18 | 2 | 3 | 3 | 6 | 0.02 | 0.948 | 0.05 | | $\zeta_q(\theta_0)$ | $K_9$ |
| 6.19 | 3 | 4 | 2 | 5 | 0.1 | 0.955 | 0.95 | | $a_1(\theta_0)$ | $K_8$ |
| 6.20 | 3 | 4 | 1 | 5 | 0.08 | 0.96 | 0.05 | | $\zeta_q(\theta_0)$ | $K_7$ |
| 6.21 | 4 | 5 | 1 | 6 | 0.09 | 0.97 | 0.05 | | $a_1(\theta_0)$ | $K_6$ |
| 6.22 | 4 | 5 | 2 | 6 | 0.06 | 0.98 | 0.01 | | $\zeta_q(\theta_0)$ | $K_5$ |
| 6.23 | 1 | 2 | 3 | 3 | 0.05 | 0.99 | 0.05 | | $a_1(\theta_0)$ | $K_4$ |
| 6.24 | 1 | 3 | 4 | 3 | 0.04 | 0.98 | 0.95 | | $\zeta_q(\theta_0)$ | $K_3$ |
| 6.25 | 1 | 5 | 3 | 2 | 0.03 | 0.97 | 0.95 | | $a_1(\theta_0)$ | $K_2$ |
| 6.26 | 2 | 6 | 2 | 2 | 0.02 | 0.91 | 0.02 | | $R(u;\theta_0)$ | $K_1$ |
| 6.27 | 3 | 7 | 1 | 1 | 0.03 | 0.92 | | | $\zeta_q(\theta_0)$ | $K_1$ |
| 6.28 | 4 | 6 | 2 | 6 | 0.02 | 0.93 | 0.04 | | $a_1(\theta_0)$ | $K_2$ |
| 6.29 | 5 | 2 | 3 | 2 | 0.03 | 0.95 | 0.05 | | $R(u;\theta_0)$ | $K_2$ |
| 6.30 | 6 | 4 | 4 | 3 | 0.04 | 0.96 | 0.99 | | $\zeta_q(\theta_0)$ | $K_3$ |
| Вариант | $\Gamma_1$ | $\Gamma_2$ | $B$ | $T$ | $\alpha_1$ | $\gamma_1$ | $q$ | | $g(\theta_0)$ | Ядро |