Контрольная работа N1

Параметры задания $l, m, n, q, r, \alpha_1, \alpha_2, \gamma, \theta, \nu, \psi_0$.

Обозначим r , $1 \le r \le 100$, идентификационный номер студента (ИНС). Он присваивается студенту преподавателем. Значения величин параметров контрольной работы для студента с идентификационным номером r полагаются равными

$$
\begin{array}{lll}
l = \left[\frac{n+q}{3}\right], & \alpha_1 = 0.01 + \frac{r}{1000}, & \psi_0 = 0.25 + \frac{r}{100}, \\
m = 5 + (8r) \bmod 11, & \alpha_2 = \alpha_1 + (-1)^r 0.01, & \nu_0 = 0.05 + \frac{r}{100}, \\
n = m + (-1)^r 2, & \gamma = 0.9 + (-1)^r \frac{r-1}{1000}, & \mu_0 = (-1)^{r \bmod 2}\{2(r \bmod 2) + \frac{1}{r}\}. \\
q = \left[\frac{m+n}{2}\right], & \theta_0 = 2 + \frac{r}{20}, &
\end{array}
$$

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m)^T$ – независимая выборка из стандартной нормальной совокупности, т.е. x_i – н.о.р. случайные величины, $x_i \stackrel{d}{=} N(0,1)$, $i = \overline{1,m}$; $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ и $z = (z_1, \ldots, z_q)^T$ – независимые выборки из равномерного распределения на [0,1], т.е. y_i и z_j – независимые случайные величины, $y_i \stackrel{d}{=} U(0,1)$, $i = \overline{1,n}$, $z_j \stackrel{d}{=} U(0,1)$, $j = \overline{1,q}$; n, m, q – целые положительные числа.

1. Постройте графики эмпирической функции распределения $\hat{F}_k(u)$ и $F_0(u)$ в одной и той же координатной системе для

   1.1. данных $x, k = m$ и $F_0(u) = \Phi(u)$, где $\Phi(u) = \int\limits_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{v^2}{2}\} dv$, (рис. 1);

   1.2. данных $y, k = n$ и
   $$F_0(u) = \begin{cases} 0, & u \le 0, \\ u, & 0 < u \le 1, \\ 1, & u > 1, \end{cases}$$
   (рис. 2).

   1.3. На графиках рис.1 и рис.2 отметьте вертикальным отрезком значение статистик D_m и D_n с абсциссой в точках достижения их значений.

2. При ошибке первого рода α_1 на основе использования критериев Колмогорова или одностороннего критерия Смирнова проверьте

   2.1. гипотезу $\Gamma_1 : x_1 \stackrel{d}{=} N(0,1)$ против альтернативы $\Gamma_2 : x_1 \stackrel{d}{\neq} N(0,1)$;

   2.2. гипотезу $\Gamma_1 : x_1 \stackrel{d}{=} N((-1)^r \frac{1}{r}, 1)$ против альтернативы $\Gamma_2 : x_1 \stackrel{d}{\neq} N((-1)^r \frac{1}{r}, 1)$;

   2.3. гипотезу $\Gamma_1 : x_1 \stackrel{d}{=} N(0,1)$ против альтернативы $\Gamma_2 : x_1 \stackrel{d}{=} N(\mu, 1)$.

   2.4. Вычислите наблюденный уровень значимости соответствующих критериев.

3. При ошибке первого рода α_1 на основе использования рандомизированных двувыборочных критериев Смирнова проверьте

   3.1. гипотезу Γ_1 об однородности выборок x и y ;

3.2. гипотезу Γ_1 об однородности выборок y и z.

3.3. Вычислите наблюденные уровни значимости критериев.

3.4. Прокомментируйте полученные статистические выводы.

4. Продолжим анализ данных x.Пусть для проверки гипотезы $\Gamma_1 : x_1 \stackrel{d}{=} N(0,1)$ при альтернативе $\Gamma_2 : x_1 \stackrel{d}{=} N((-1)^r \frac{1}{r}, 1)$ используется критерий Неймана-Пирсона с ошибкой первого рода α_1.

4.1. Будет ли принята для данных x гипотеза Γ_1?

4.2. Как часто будет приниматься гипотеза Γ_2 этим критерием, когда Γ_2 верна?

4.3. Каков наблюденный уровень значимости данных x для критерия отношения правдоподобий в задаче проверки Γ_1 против Γ_2?

4.4. Каков объем выборки m необходимо было бы взять, чтобы ошибка второго рода при проверке гипотезы Γ_1 против гипотезы Γ_2 не превзошла α_2?

5. Постройте γ-доверительную полосу $H_\gamma(y)$ для порождающей функции распределения выборки y, считая ее неизвестной.

5.1. Проверьте графически, накроется ли γ-доверительной полосой для порождающей функции распределения выборки y график функции распределения случайной величины $N((-1)^r \frac{1}{r}, 1)$.

5.2. Если такое событие произойдет, то как это объяснить в свете предположения о равномерной распределенности случайных величин $y_i, \quad i = \overline{1,n}$?

5.3. Гипотезу $\Gamma_1 : y_1 \stackrel{d}{=} U(0,1)$ против альтернативы $\Gamma_2 : y_1 \stackrel{d}{\neq} U(0,1)$ будем проверять на основе следующего критерия:

> *если γ-доверительная полоса $H_\gamma(y)$ накрывает функцию распределения $\mathcal{L}(U(0,1))$, то Γ_1 принимается; в противном случае Γ_1 отвергается в пользу Γ_2.*

Определите, какова ошибка первого рода сформулированного выше критерия при проверке Γ_1 против Γ_2.

6. Используя данные y, породите независимую выборку $w = (w_1, \ldots, w_n)^T$ из n наблюдений над пуассоновской случайной величиной с параметром θ_0, т.е. $w_i = POIS(\theta_0), i = \overline{1,n}$. На основе полученных данных w

6.1. Проверьте гипотезу $\Gamma_1 : \theta_0 = 1$ против альтернативы $\Gamma_2 : \theta_0 = 5$, используя *равномерно наиболее мощный* критерий (РНМ-критерий). Примите ошибку первого рода равной α_1.

6.1.1. Какова ошибка второго рода РНМ-критерия для сформулированной выше статистической задачи?

6.1.2. Каково значение функции мощности РНМ-критерия для значения параметра $\theta = 2$?

6.2. Как Вы прокомментируете результат принятия гипотезы Γ_1 или Γ_2 на основе полученных Вами данных?

6.3. Постройте методом сечений γ-доверительный интервал для параметра θ_0. Как будет изменяться длина этого интервала в зависимости от изменения значения доверительной вероятности γ.

6.4. Проиллюстрируйте графически процесс построения γ-доверительного множества для параметра θ_0.

6.5. На основе полученного доверительного интервала постройте γ-доверительный интервал для вероятности $\mathbf{P}\{POIS(\theta_0) > \frac{r}{10}; \theta_0\}$.

6.6. Вычислите значения ОМП и оценки по методу моментов для $g_1(\theta_0) = D(\check{\vartheta}; \theta_0)$ и $g_2(\theta_0) = \mathbf{P}\{POIS(2\theta_0) > \frac{r}{30}; \theta_0\}$.

6.6.1. Являются ли полученные оценки несмещенными?

6.6.2. Найдите дисперсию ОМП для $g_1(\theta_0)$.

7. Используя данные y и z породите независимую выборку $t = (t_1, \ldots, t_l)$, где $t_i \stackrel{d}{=} BIN(1; \psi)$, $0 < \psi < 1$, $i = \overline{1, l}$.

7.1. Постройте методом сечений верхние γ-доверительные границы для параметра ψ_0 и функции $g(\psi_0) = \mathbf{P}\{BIN(40; \psi_0) > 20\}$ на основе полученных данных t.

7.1.1. Проиллюстрируйте графически процесс построения верхних γ-доверительных границ для параметра ψ_0 на основе метода сечений.

7.2. Будет ли принята простая гипотеза $\Gamma_1 : \psi_0 = \nu, \quad 0 < \nu < 1$, против сложной альтернативы $\Gamma_2 : \psi_0 \neq \nu$ критерием значимости с критической функцией

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \bar{\in} (\underline{\theta}(t;\gamma), \bar{\theta}(t;\gamma)) \\ 0, & \frac{1}{2} \in (\underline{\theta}(t;\gamma), \bar{\theta}(t;\gamma)) \end{cases}$$

Здесь $(\underline{\theta}(t;\gamma), \bar{\theta}(t;\gamma))$ – γ-доверительный симметричный по вероятности интервал для ψ_0, построенный для полученной выше выборки t.

7.2.1. Какова формула для ошибки первого рода рассматриваемого критерия?

7.2.2. Какой альтернативный критерий с ошибкой первого рода α_1 для проверки гипотезы Γ_1 против Γ_2 можно предложить? Будет ли критерий на основе $T(t) = \sum_{i=1}^{l} t_i$ несмещенным РНМ-критерием?

8. Для x – независимой выборки из нормальной совокупности с неизвестными средним и дисперсией, т.е. считаем, что $x_i \stackrel{d}{=} N(\mu_0, \sigma_0^2), i = \overline{1, m}$,

8.1. Проверьте, являются ли оценки $\bar{y}_n$ и $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{Q_n}{n-1}$ несмещенными оценками параметров μ_0 и σ_0^2. Достигают ли их дисперсии нижних границ дисперсий оценок Крамера-Рао?

8.2. Постройте γ-доверительные симметричные по вероятности интервалы для μ_0 и σ_0^2.

8.3. Считая, что ошибка первого рода равна α_1, проверьте гипотезы

8.3.1. $\Gamma_1 : \mu_0 = 1.5$ против альтернативы $\Gamma_2 : \mu_0 \neq 1.5$;

8.3.2. $\Gamma_1 : \sigma_0^2 = 2$ против альтернативы $\Gamma_2' : \sigma_0^2 > 2$ (для четных r) или против альтернативы $\Gamma_2'' : \sigma_0^2 < 2$ (для нечетных r).

8.3.3. Прокомментируйте полученные статистические выводы.