Статистический практикум

Статистический анализ характеристик российской системы "Обязательного страхования гражданской ответственности владельцев транспортных средств (ОСАГО)" типа "Бонус-Малус".

Чепурин Е.В.

Информационная поддержка: Власова Н.В., Нифонтова Т.А., Новикова Е.В.

1 Введение

С 1 июля 2003 года в соответствии с законом РФ №40-ФЗ все лица, являющиеся владельцами транспортных средств (т.е. собственники или лица, управляющие ими от имени собственника) обязаны страховать свою "гражданскую ответственность за (финансовое) возмещение вреда жизни, здоровью или имуществу потерпевшего", см. [1]. Это означает, что владельцы транспортного средства – объекта повышенной опасности для окружающих, должны из личных средств застраховать (т.е. стать *страхователями*) в одной и только в одной из страховых компаний, входящих в РСА (Российский союз страховщиков) свой *риск* быть виновником причинения ущерба (жизни, здоровья или имуществу) каким либо лицам или организациям. При возникновении такой ситуации (т.е. *страхового случая*, оговоренного в *договоре* страхования) страховая компания (*страховщик*) оплачивает *иски* (*требования* на финансовое возмещение ущерба) пострадавшей стороны. Взаимоотношения страхователя, страховщика и пострадавшей стороны, включая и пределы выплат пострадавшей стороне, оговорены в законе РФ №40-ФЗ (см. [1]), Гражданском кодексе РФ, Постановлениях Правительства РФ, см. [2] и [3], документах, связанных с деятельностью ФССН – Федеральной службы страховго надзора, см. сайт . В эти акты регулярно вносятся добавления и поправки, в которых отражается практика реализации закона №40-ФЗ и соответствующих подзаконных актов. Тем самым определяются:

– организационные формы данного вида страхования, которые в дальнейшем будем называть *страхованием ОСАГО*;

– величина и структура *страховых тарифов*, т. е. премий $\mathcal{S}_{ij}$ -размера стоимости страхования ответственности j -го страхователя в i -ый год страхования;

– порядок, величина и структура *страховых выплат* пострадавшим лицам или организациям, не являющимися виновниками дорожно-транспортного происшествия (ДТП), со стороны страховой компании виновника ДТП.

С момента введения в силу Закона №40 РФ об ОСАГО в июле 2003 года и по март 2009 года страховыми компаниями (СК), входящих в РСА, выдано более 178 млн. полисов ОСАГО, собрано более 360 млрд. рублей премий, урегулировано около 7.5 млн. страховых случаев. Объем страховых выплат составил более 174 млрд. рублей. Отсюда видно, что данный вид страхования (а дальше только и его мы будем иметь в виду) приобрел большую социальную и экономическую значимость в качестве финансового инструмента смягчений последствий ДТП.

2 Организационные и финансовые характеристики ОСАГО

Опишем кратко организационные и финансовые аспекты ОСАГО, которые определяются и регулируются государственными органами РФ. Они отражены в законодательных актах []

2.1 О тарифах страхования ОСАГО.

При первичном вхождении в систему ОСАГО каждый страхователь вносит в кассу страховщика *премию* – стоимость своего *страхового полиса* (т.е. *договора* на страхование) в размере $\mathcal{S}_1$. В свою очередь страховая компания (страховщик) берет на себя обязательство выплатить потерпевшим денежную компенсацию (*страховую сумму*) за причиненный материальный ущерб или вред здоровью (жизни) со стороны страхователя. Тем самым страховая компания обеспечивает защиту страхователя в течение *страхового периода*, а по некоторым видам ущерба и вне этого периода, см. [1],[2]. Всюду дальше простоты ради будем считать, что страховой период равен году. Пусть $\mathcal{S}_i$ – значение страховой премии в i-ом году, $i = 2, 3 \dots$. Величина $\mathcal{S}_i$ определяется значением $\mathcal{S}_1$ и наличием или отсутствием *страховых случаев* (т.е. *страховой историей*) в предшествующие страховые периоды. Порядок изменения величин $\mathcal{S}_i$, т.е. изменение стоимости (*тарифа*) премии в зависимости от номера года страхования излагается в разделе "О системе "Бонус-Малус"и динамике изменения в ней страховых премий".

Что касается значения $\mathcal{S}_1$, то оно определяется Правительством РФ, см. [2], с учетом ряда *факторов* и их *уровней*, характеризующих страхователя и его транспортное средство. Среди факторов, характеризующих владельца транспортного средства:

– возраст и стаж вождения страхователя;

– его статус: физическое или юридическое лицо;

– цель и регион использования транспортнного средства;

– срок и период использования транспортного средства.

При назначении размера $\mathcal{S}_1$ учитывается

– тип транспортного средства;

– мощность двигателя;

– грузоподъемность (для грузовых автомобилей);

– вместимость (для пассажирского транспорта), и т.д. см. [2].

В результате каждый страхователь приобретает *свой индивидуальный код* – набор значений уровней факторов, т.е. своеобразный портрет или паспорт страхователя. Все сообщество страхователей в системе ОСАГО страны классифицируется тем самым в группы или *"элементарные портфели ОСАГО"*(ЭПО). [1] На основе одинакового значения индивидуального кода страхователя, который, тем самым, становится и кодом ЭПО. Как надеются разработчики системы страхования ОСАГО, все страхователи, образующие ЭПО, однородны по отношению к риску причинения ущерба сторонним лицам. Заметим попутно, что проблема однородности ЭПО требует статистической проверки.

Далее, для всех страхователей из ЭПО вводится значение $\mathcal{L}_0$ – *базового тарифа* ЭПО (а также свой для ЭПО набор $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_t\}$ – *нагрузочных коэффициентов* [2] уровней факторов. Смысл введения нагрузочных коэффициентов состоит в том, чтобы учесть вклад уровня каждого из r факторов, характеризующих конкретного страхователя, в возможность реализации риска нанесения ущерба сторонним лицам. В соответствии с [2] значение премии $\mathcal{S}_1$ страхователя представляется в виде произведения $\mathcal{L}_0$ и всех значений нагрузочных коэффициентов страхователя. т.е. $\mathcal{S}_1 = \mathcal{L}_0 \prod_{j=1}^{r} \lambda_j$. В российской системе ОСАГО $r = 9$.

Отметим, что значения параметров ОСАГО под давлением страхового лобби с разной степени регулярности меняются на основе постановлений Думы и Правительства РФ.

С другой стороны, регулярные управляющие воздействия на параметры ОСАГО в условиях меняющейся "среды обитания"российской системы ОСАГО (инфляционные явления, рост и качественное изменение автопарка, изменение правил взаимодействия "страхователи – страховщик"и т.д.) на основе учета явных статистических показателей трендов в функционировании системы и возможны, и необходимы.

Реально, порфель ОСАГО каждой *страховой компании* (СК) состоит из большого числа ЭПО. В то же время, по смыслу страховой философии, средства на выполнение страховых обязательств по конкретному ЭПО должны браться из собранных премий только этого же ЭПО. Поэтому, в

[1] В настоящее время насчитывается 12320 ЭПО

[2] Для фактора "возраст и стаж водителя"примером способа образования*уровней* фактора и назначение им соответствующих нагрузочных коэффициентов служит разбиение страхователей на группы вида:

– возраст до 22 лет со стажем вождения до двух лет включительно, $\lambda_1 = 1.3$;

– возраст до 22 лет со стажем вождения свыше двух лет, $\lambda_1 = 1.2$;

– возраст от 22 лет со стажем вождения до двух лет включительно, $\lambda_1 = 1.15$;

– возраст от 22 лет со стажем вождения свыше двух лет, $\lambda_1 = 1$.

Аналогично образуются уровни и других факторов, см. [2].

дальнейшем статистический анализ естественно сосредоточить на исследовании характеристик отдельного ЭПО.

2.2 О системе "Бонус-Малус"и динамике изменения в ней страховых премий.

Система страхования "Бонус-Малус"(СБМ) предназначена для того, чтобы с одной стороны поощрять страхователей не имеющих страховых случаев понижением в следующем страховом периоде значения их премии, а с другой – наказывать страхователей повышением значения их премий в следующем страховом периоде, если в предшествующем ему у страхователя были страховые случаи.

С этой целью в системе "Бонус-Малус"вводятся R тарификационных групп или *классов*. Чаще классы обозначаются номерами $\{0,1,2,\ldots,R-1\}$, хотя в российской СБМ вводятся следующие классы: $\{M,0,1,2,\ldots,13\}$ с $R=15$. Каждый страхователь в течение страхового года считается приписанным к одному из R класс системы. При этом в начале года он платит премию размера $q_\rho\mathcal{S}_1$, где ρ – индикатор, номер (или символ) класса СБМ, к которому он приписан на очередной срок страхования, а q_ρ – платежный коэффициент (КБМ), $q_\rho>0$, $\rho=\overline{0,R-1}$. Отметим, что q_ρ – монотонная функция ρ. В российской СБМ постулирован набор КБМ, приведенный во втором столбце таблицы 1. Он един для всех ЭПО.

Таким образом, если $q_\rho<1$, то страхователю предоставляется поощрение ("бонус") в виде снижения уровня премии относительно $\mathcal{S}_1$ на величину $(1-q_\rho)\mathcal{S}_1$, если же $q_\rho>1$, то он штрафуется (получает "малус") в виде увеличения уровня премии относительно $\mathcal{S}_1$ на величину $(q_\rho-1)\mathcal{S}_1$. При первом вхождении в российскую систему страхования ОСАГО страхователь помещается в класс "3 где $q_3=1$, и платит премию в размере $\mathcal{S}_1$.

В дальнейшем пусть ρ_i – номер класса СБМ, в котором страхователь находится в i-ом году, а δ_i число исков, предъявленных СК по вине ее страхователя в течение i-го года, $\delta_i\geq 0$, δ_i – целое, $i=1,2,\ldots$. В этом случае в $(i+1)$-ом году страхователь будет принудительно приписан к классу $c(\rho_i;\delta_i)\in\{0,1,\ldots,R-1\}$, т.е. $\rho_{i+1}=c(\rho_i;\delta_i)$.

Если δ_i можно считать случайными величинами, то ρ_i – случайное блуждание с множеством состояний $\{0,1,\ldots,R-1\}$. Далее, пусть δ_i – н.о.р. случайные величины, т.е. вероятности $p_k=\mathbf{P}\{ delta_i=k\}$ не зависят от i, $i=1,2,\ldots$, для всех $k=0,1,2\cdots$, а ρ_i однородная марковская цепь с переходной матрицей $\mathcal{A}$, элементы которой выражаются через вероятности p_k. Таким образом, при исследовании характеристик СБМ можно опираться на результаты теории марковских цепей, см. [4], [5], [6]. В частности, если удастся статистически оценить вероятности p_k, то в этой ситуации легко прогнозировать величину сборов премий в предстоящие годы. В табл. 1 приводится перечень классов российской СБМ, значения КБМ—платежных коэффициентов q_j, а также значения величин $c(k;j)$. Первый столбец таблицы 1 образует перечень классов российской СБМ, во втором столбце приводятся значения КБМ-платежных коэффициентов q_j $(j=M,0,1,\ldots,13)$ СБМ. В столбцах 3-6 таблицы на пересечении j-строки и $(k+2)$-го столбца содержатся значения $c(j;k)$ $(j=M,0,1,\ldots,13;k=0,1,2,\ldots)$ – элементов матрицы $\mathbf{C}$. В табл. 2 приводится структура

Таблица 1: Таблица платежных коэффициентов (КБМ) и набор элементов управляющей матрицы $\mathbf{C}$.

Класс страхователя на начало очередного срока страхования	КБМ q_j	Класс страхователя по окончании очередного срока страхования с учетом наличия				
		0	1	2	3	≥ 4
		страховых случаев по вине страхователя				
M	2.45	0	M	M	M	M
0	2.3	1	M	M	M	M
1	1.55	2	M	M	M	M
2	1.4	3	1	M	M	M
3	1	4	1	M	M	M
4	0.95	5	2	1	M	M
5	0.9	6	3	1	M	M
6	0.85	7	4	2	M	M
7	0.8	8	4	2	M	M
8	0.75	9	5	2	M	M
9	0.7	10	5	2	1	M
10	0.65	11	6	3	1	M
11	0.6	12	6	3	1	M
12	0.55	13	6	3	1	M
13	0.5	13	7	3	1	M

переходной матрицы $\mathcal{A}$ однородной марковской цепи ρ_i, $i = 1, 2, \ldots$, соответствующая матрице $\mathbf{C}$. Здесь число исков (ДТП), порожденных отдельным страхователем за i-ый год страхования, $i = 1, 2, \ldots)$.

Таблица 2: Общий вид переходной матрицы $\mathcal{A}$ Российской системы "Бонус-Малус".

	M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
M	$1-p_0$	p_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$1-p_0$	0	p_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	$1-p_0$	0	0	p_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	$1-p_0-p_1$	0	p_1	0	p_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	$1-p_0-p_1$	0	p_1	0	0	p_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	$1-p_0-p_1-p_2$	0	p_2	p_1	0	0	p_0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	$1-p_0-p_1-p_2$	0	p_2	0	p_1	0	0	p_0	0	0	0	0	0	0	0
6	$1-p_0-p_1-p_2$	0	0	p_2	0	p_1	0	0	p_0	0	0	0	0	0	0
7	$1-p_0-p_1-p_2$	0	0	p_2	0	p_1	0	0	0	p_0	0	0	0	0	0
8	$1-p_0-p_1-p_2$	0	0	p_2	0	0	p_1	0	0	0	p_0	0	0	0	0
9	$1-p_0-p_1-p_2-p_3$	0	p_3	p_2	0	0	p_1	0	0	0	0	p_0	0	0	0
10	$1-p_0-p_1-p_2-p_3$	0	p_3	0	p_2	0	0	p_1	0	0	0	0	p_0	0	0
11	$1-p_0-p_1-p_2-p_3$	0	p_3	0	p_2	0	0	p_1	0	0	0	0	0	p_0	0
12	$1-p_0-p_1-p_2-p_3$	0	p_3	0	p_2	0	0	p_1	0	0	0	0	0	0	p_0
13	$1-p_0-p_1-p_2-p_3$	0	p_3	0	p_2	0	0	0	p_1	0	0	0	0	0	p_0

Таким образом, функционирование СБМ для отдельного ЭПО определяется базовой премией $\mathcal{S}_1$, вектором платежных коэффициентов $\mathbf{q} = (q_0, \ldots, q_{R-1})^T$, управляющей матрицей $\mathbf{C} = (c(a,b);\ 0 \le a \le R-1,\ 0 \le b)$, определяющей блуждание страхователя по классам СБМ в зависимости от его страховой истории. Подробнее с принципами построения СБМ и набором характеристик, определяющих ее свойства, можно ознакомиться по монографиям [7], [8].

2.3 Об объемах и структуре страховых выплат по ОСАГО.

Объем *страховых сумм* (объем выплат), как и объем премий регламентируется страховым законодательством, [2]. При наступлении страхового случая страховщик обязан оплатить ущерб в пределах до 400 000[3] рублей. Таким образом, 400 000 рублей – *предел удержания*, т. е. верхняя граница выплат со стороны СК. Эта сумма состоит из 260 тыс. рублей – предела удержания выплат по возмещению ущерба жизни или здоровья суммарно нескольким потерпевшим (160 тыс. рублей, если потерпевший один) и 160 тыс. рублей возмещения материального ущерба нескольким потерпевшим (120 тыс. рублей, если потерпевший – один).

[3]Объемы страховых выплат и их структура с течением времени могут меняться на основе управляющих воздействий Правительства РФ.

При стохастическом моделировании распределения объема выплат (*убытков* – в терминологии страховщиков) придется учитывать, что точкам 120, 160, 240, 280, 320, 380, 420, 400 тыс. рублей может соответствовать ненулевая вероятностная мера.

2.4 О специфике расчета базовой премии в системе "ОСАГО".

Все виды страхования "иные, чем страхование жизни"(см. можно условно поделить на два класса. К одному из классов отнесем те виды, где ответственность страховой компании простирается на строго определенное полисом время. В этом случае премия определяется, как правило, в соответствии с одним из подходов, перечисленных в приложении в разделе "О некоторых подходах к определению премии". Ко второму классу отнесем отнесем те виды страхования, для которых по некоторым специальным страховым событиям ответственность распространяется за временные рамки, определенные страховым полисом для четко определенного набора "стандартных" страховых случаев. В большей степени это касается выплат за ущерб, причиненный "жизни и здоровью" потерпевшего. Урегулирование этих рисков может затянуться на несколько лет, см. [3], что более характерно для страхования жизни и пенсий Таким образом, для такого вида страхования премия должна рассчитываться с учетом будущих неопределенных страховых выплат, которые предстоит осуществить по искам договоров, срок действия которых был уже закончен. ОСАГО относится именно к такому виду страхования. Все страховые случаи, рассматриваемые в ОСАГО, можно подразделить на три типа:

ЗУ. Заявленные и урегулированные, т. е. страховой компанией по ним были проведены выплаты. Обозначим d'_j – число ЗУ-исков, поступивших за год по j-ому договору конкретного ЭПО, $j=\overline{1,n}$, $d'=\sum\limits_{j=1}^{n} d'_j$ – общее число ЗУ-исков, n – число договоров, составляющих ЭПО страховой компании. Далее, пусть V_{jl} – l-ые выплаты, $l=\overline{1,d'_j}$, осуществленные СК по искам к j-ому страхователю, $j=\overline{1,n}$ причем,

$$W_{\text{бр}}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{d'_j} W_{jl}$$

это суммарные (брутто) выплаты по ЭПО за год. Последовательности выплат $\mathbf{w}=\left(\{W_{j1},W_{j2},\ldots,W_{jd_j}\},\quad j=\overline{1,n}\right)$, считаются н.о.р. в совокупности случайными величинами, функцию распределения которых $\mathcal{L}(W_{jl})$ предстоит определить по статистическим данным $\mathbf{w}$.

ЗНУ. Заявленные, но неурегулированные , т. е. страховой компанией выплат по этим искам произведено не было. Среди причин такого положения могли быть как судебные тяжбы, так и поступление заявления об иске слишком близко к окончанию срока действия договора. Сюда же относятся и страховые события, связанные с выделением средств страховщиком на лечение или протезирование потерпевшего. На определние объема необходимых средств может потребоваться значительное время. Но все эти иски предстоит урегулировать в обязательном порядке. Обозначим d''_j – число ЗНУ-исков, поступивших по j-ому договору, $d''=\sum\limits_{i=1}^{n} d''_j$ – общее число ЗНУ-исков.

Далее, пусть V_{jl} – l-ые заявленные претензии на выплаты, $l=\overline{1,d''_j}$, по искам к j-ому страхователю, $j=\overline{1,n}$. Причем, после урегулирования V_{jl} превращается в выплаты W_{jl}, $l=\overline{1,d''_j}$, но известно это будет только после завершения годового цикла страхования. Таким образом, СК в будущем встретиться с необходимостью выплатить сумму величины

$$\tilde{W}_{\text{бр}}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{d''_j}\tilde{W}_{jl}$$

по всем ЗНУ-искам.

ПНЗ. Произошедшие, но незаявленные и, естественно, неурегулированные. Считается, что по объективным причинам, не зависящим от клиента, о них не было заявлено в течение действия полиса, но, тем не менее, законодательство требует, чтобы страховая компания урегулировала предъявленные по ним требования на оплату ущерба. Заметим, попутно, страховые события из ЗУ и ЗНУ могут дополнительно породить события типа ПНЗ, если будет доказано, что они являются следствием заявленных событий.

Далее, пусть U_j – объем ПНЗ-исков, предъявленные по j-ому страховому полису, $j=\overline{1,n}$, $U_{\text{бр}}=\sum\limits_{j=1}^{n}U_j$.

Итак, СК берет на себя риск выплатить пострадавшим от ее страхователей сумму в объеме

$$Z_{\text{бр}}=W_{\text{бр}}+W_{\text{бр}}+U_{\text{бр}}.$$

И если, для первого слагаемого, имея статистику за несколько предшествующих страховых периодов, можно его характеристики как-то оценить, то для второго и третьего слагаемых в $Z_{\text{бр}}$ необходимый объем статистики за обозримое время собрать весьма трудно: дело в том, что за каждый годовой период наблюдается лишь небольшое число ПНЗ-исков.

В то же время, для урегулирования ущербов по событиям типа ЗНУ и ПНЗ, объем которых в момент окончания полисов неизвестен, страховая компания должна сформировать из собранных премий резервы, а именно: **РЗНУ** – *резерв для урегулирования ущербов по событиям типа ЗНУ* и **РПНЗ** – *резерв для урегулирования ущербов по событиям типа ПНЗ.*

С другой стороны, расчет премии страхователя должен проводится на основе свойств н.о.р. случайных величин

$$Z_j=\sum_{l=1}^{d'_j}W_{jl}+\sum_{l=1}^{d'_j}\tilde{W}_{jl}+U_j,$$

выражающих объем ущерба для СК, порождаемого j-ым страхователем, $j=\overline{1,n}$. Но, опять же, недостаточность статистической информации на начальном периоде действия ОСАГО не позволило оценить характеристики распределения величин Z_j. Поскольку публикаций на тему обоснованных методах расчета характеристик Z_j, а также РЗНУ и РПНЗ на момент их "озаконивания", то можно предположить, что параметры ОСАГО были приняты на основе экспертных суждений и имеющихся аналогий, то естественно оценивать степень адекватности сборов и выплат, т.е. справедливости данного вида страхования.

3 Коэффициент убыточности как характеристика адекватности тарификации ОСАГО

Поскольку ОСАГО обязательный, а не добровольный вид страхования, то государственным органам приходится заботиться не только о безубыточности СК (иначе они уйдут с этого рынка) и приближении характеристик этого вида страхования к мировым стандартам, но и о его доступности широким слоям граждан РФ. В связи с этим отслеживание экономических параметров ОСАГО—в зоне постоянного внимания регулирующих органов. В принципе, управление степенью доходности ОСАГО для СК связано с изменением значений или (и) базовой ставки, или/и нагрузочных коэффициентов, или/и объема и структуры выплат.

Одной из важнейших характеристик степени финансовой устойчивости страховой компании является ее коэффициент убыточности по данному виду страхования за фиксированное время функционирования

$$\gamma = \frac{W^*_{\text{бр}} + \text{РЗУ} + \text{РПНУ}}{\mathcal{S}_{\text{бр}}}, \tag{1}$$

где $W^*_{\text{бр}}$ – суммарные (брутто) выплаты СК ущерба, причиненные СК ее страхователями, $\mathcal{S}_{\text{бр}}$ – суммарный объем полученных СК премий (плат за страхование). Все перечисленные в (1) характеристики, как и все последующие относятся к одному и тому же конечному интервалу времени. Таким интервалом естественно считать интервал длины одного года. При этом величина $\mathcal{S}_{\text{бр}}$ интерпретируется как объем *заработанной премии* к началу интервала. В соотношении (1) принято полагать $\text{РЗУ} = 1,03V_{\text{бр}}$, а $\text{РПНУ} = 0,1\mathcal{S}_{\text{бр}}$. Здесь $V_{\text{бр}}$ – суммарные заявленные претензии, т. е. сумма ЗНУ - исков. В результате получается точечная оценка для γ:

$$\hat{\gamma} = \frac{W^*_{\text{бр}} + 1,03V_{\text{бр}} + 0,1\mathcal{S}_{\text{бр}}}{\mathcal{S}_{\text{бр}}}. \tag{2}$$

Поскольку 23% $\mathcal{S}_{\text{бр}}$ по законодательству (см. [?]) предоставляется СК для организации процесса страхования (см. [?]), то при $\hat{\gamma} \geq 0,77$ СК считается убыточной. В принципе, используя оценку (2), можно оценить долю убыточных компаний. Однако в структуре оценки (2) нет прямой информации о причине убыточности и возможных управляющих воздействиях. В то же время можно найти альтернативное представление для оценки (2), которое уже будет содержать необходимую информацию.

Для этого портфель СК (т. е. совокупность полисов страхователей ОСАГО) разбивается на непересекающиеся группы – элементарные портфели ОСАГО (ЭПО) по принципу одинакового значения базовой премии и всех нагрузочных коэффициентов. Для конкретной СК обозначим $\{\text{ЭПО}; h\}$ ее h-е ЭПО, $h = \overline{1, M}$, M – общее число ЭПО в СК. Далее положим W_h, V_h, $\mathcal{S}_h$ и N_h – соответственно суммарные выплаты, суммарные претензии, суммарные премии и число страхователей в $\{\text{ЭПО}; h\}$. В этих обозначениях

$$\hat{\gamma}_h = \frac{W_h + 1,03V_h + 0,1\mathcal{S}_h}{\mathcal{S}_h} \tag{3}$$

– точечная оценка коэффициента убыточности $\{\text{ЭПО}; h\}$, $h = \overline{1, M}$. Пусть $L_h = \frac{\mathcal{S}_h}{\mathcal{S}_{\text{бр}}}$, $\sum_{h=i}^{M} L_h = 1$. Тогда из (2) и (3) вытекает представление

$$\hat{\gamma} = \sum_{h=0}^{M} L_h \hat{\gamma}_h, \tag{4}$$

поскольку $W^*_{\text{бр}} = \sum_{h=1}^{M} W_h$, $V_{\text{бр}} = \sum_{h=1}^{M} V_h$, $\mathcal{S}_{\text{бр}} = \sum_{h=1}^{M} \mathcal{S}_h$, $N = \sum_{h=i}^{M} N_h$ – общее число страхователей СК. Пусть W_{ih}, V_{kh} и Π_h соответственно выплаты, претензии и премии страхователей из $\{\text{ЭПО}; h\}$. Здесь $i = \overline{0, \eta_h}$, $k = \overline{0, \varkappa_h}$, η_h и $\varkappa_h$ – случайное число выплат ущербов и число претензий на выплату ущербов. Ясно, что $\eta_h + \varkappa_h = d_h$, где d_h – число заявленных страховых исков оплаты ущербов. При фиксированных значениях $\eta_h = f_h$ и $\varkappa_h = g_h$ последовательности $W_{1h}, W_{2h}, \ldots, W_{f_h h}$ и $V_{1h}, V_{2h}, \ldots, V_{h_h h}$ не зависимы между собой, а каждая из них состоит из независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин (с.в.), $W_h = \sum_{i=1}^{\eta_h} W_{ih}$, $V_h = \sum_{i=1}^{d_h - \eta_h} V_{ih}$. Кроме того, $\mathcal{S}_h = N_h \Pi_h$.

В широких предположениях о свойствах возникших здесь случайных величин при $N_h \to \infty$ справедлив закон больших чисел в следующей форме:

$$\frac{1}{N_h} \sum_{i=1}^{\eta_h} W_{ih} = a_h + o_p(1) \quad \text{и} \quad \frac{1}{N_h} \sum_{i=1}^{d_h - \eta_h} V_{ih} = b_h + o_p(1), \tag{5}$$

где a_h и b_h – постоянные, определяемые объективными условиями процесса порождения ущербов и их оплатой и не зависящие от $\Pi_h = \frac{\mathcal{S}_h}{N_h}$. Таким образом, при $N_h \to \infty$, $h = \overline{1, M}$, из (4) и (5)

$$\hat{\gamma} = \sum_{h=1}^{M} L_h \frac{a_h + b_h}{\Pi_h} + o_p(1). \tag{6}$$

Здесь и далее обозначение $\xi_n = o_p(1)$ понимается так, что для $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\{||\xi_n|| > \varepsilon\} = 0.$$

Из разложений (4) и (6) вытекает важный вывод: для безубыточности СК достаточно безубыточности каждого ЭПО СК. С точки зрения базового принципа страхования – „каждый оплачивает цену своего риска“, это и необходимо: в ЭПО собраны страхователи с одинаковым риском.

Итак, представление (6) (если удается достаточно точно оценить величины a_h и b_h) или оценки (3) и (4) можно использовать как для текущего контроля состояния, так и для глобального и локального управления убыточностью страхового рынка.

При этом необходимо помнить, что значение оценок $\hat{\gamma}$ и $\hat{\gamma}_h$ при относительно небольших значениях N_h с течением времени могут сильно флуктуировать: число ДТП и объемы выплат по искам являются случайными величинами, а потому даже в случае экономически сбалансированных тарифов для коэффициентов убыточности (3) и (4) справедливо утверждение:

$$\mathbf{P}\{\hat{\gamma}_h > 0,77\} > 0, \ \mathbf{P}\{\hat{\gamma} > 0,77\} > 0. \tag{7}$$

Таким образом, с одной стороны, необходимо учитывать относительность информативности коэффициента убыточности в проблеме оценки экономической сбалансированности ОСАГО, а с другой стороны, следует установить выборочные свойства оценок (3) и (4) на основе анализа статистических данных о функционировании системы ОСАГО.

4 О стохастической модели ОСАГО

Рассмотрим упрощенную модель системы ОСАГО, при которой имеем дело с одним ЭПО объема n, причем все страхователи оформили полис сроком на один год в один и тот же день, никто из них досрочно из страхования в СК не вышел и никто дополнительно в течение года к ЭПО не присоединился. Конечно, в реальности число страхователей с течением времени меняется, время и начало действия полисов у разных страхователей могут не совпадать и т.д. Перенос результатов анализа идеальной схемы на реальную можно осуществить посредством методов интенсивного компьютерного моделирования с использованием статистических оценок значений характеристик идеализированной системы ОСАГО.

Перечислим основные компоненты, определяющие функционирование системы. Для удобства анализа и представления данных временной промежуток длительности в год отобразим в отрезок $[0,1]$. Обозначим через $d_i(t)$ число ущербов, порожденных i-м страхователем на временном промежутке $[0,t]$, $0 < t \leq 1$, $d_i(0) = 0$, $i = \overline{1,n}$. Выборочная траектория ординарного считающего процесса $d_i(t)$ на $[0,t]$ задается последовательностью $\{t_{i1} < t_{i2} < \ldots < t_{id_i}\}$ и значением $d_i(1) = d_i$. Случайные процессы $d_i(t)$ и $d_j(t)$ при $i \neq j$ независимы, их тип и вероятностные характеристики предстоит определить на основе статистических данных, представляющих функционирование портфеля ЭПО в течение года (или нескольких лет, следующих друг за другом, если, конечно, удастся подтвердить однородность данных, полученных в разные годы).

Портрет функционирования ЭПО дополняют порождаемые процессами ДТП потоки ущербов, представленные объемами выплат и претензий. Общепринято считать (см. [?], [?]), что при фиксированном значении числа ДТП индивидуальные объемы выплат и претензий являются н.о.р. непрерывными с.в. Анализ данных о выплатах и претензиях российской системы ОСАГО на одногодичном временном промежутке этой гипотезе не противоречит. При анализе данных на нескольких годичных промежутках придется озаботиться устранением влияния инфляционных явлений. Проблематика статистического анализа независимых одинаково распределенных случайных величин, описывающих ущербы, в теоретическом и прикладном аспекте проработана достаточно основательно. В связи с этим сосредоточим свои усилия на статистическом анализе свойств точечных процессов ДТП.

4.1 О смешанных пуассоновских процессах

Итак, среди возможных гипотез о типе $d_1(t)$ естественно рассмотреть следующие:

$H_1 : d_1(t)$ – однородный пуассоновский процесс;

$H_2 : d_1(t)$ – смешанный пуассоновский процесс, при котором для $\Delta \geq 0$ и $0 < t \leq 1 - \Delta$

$$\mathbf{P}\{d_1(t+\Delta) - d_1(t) = k\} = \int_0^\infty e^{-\lambda\Delta} \frac{(\lambda\Delta)^k}{k!} d\mathcal{U}(\lambda). \qquad (8)$$

Здесь $\mathcal{U}(\lambda)$ – смешивающая функция распределения. Легко показывается, что это процесс со стационарными, но зависимыми приращениями. Если $\mathcal{U}(\lambda) \equiv \mathcal{U}(\lambda, \theta_0)$, где $\theta_0 \in \Theta \in R^m$, θ_0 – порождающее значение параметра, $m \geq 1$, m – целое, то процесс $d_1(t)$ назовем параметрическим смешанным пуассоновским процессом.

Среди параметрических смешанных пуассоновских процессов, которые предлагались в качестве модели для описания статистических данных, аналогичных данным ОСАГО, упомянем отрицательно-биномиальный [7] и [**?**], пуассон-обратногауссовский [13] и [14], Хофмана [15]. В работе [16] в качестве модели для $d_1(t)$ предлагается использовать непараметрический смешанный пуассоновский процесс. В монографиях [7] и [**?**] приводятся ряд важных эврестических соображений в пользу гипотезы H_2.

Обозначим символом $\mathcal{L}'(\xi)$ плотность распределения, а символом $L(\xi)$ – распределение (или функцию распределения) случайной величины ξ. Для случайных величин ξ_1 и ξ_2 символ $\xi_1 \stackrel{d}{=} \xi_2$ означает лишь одинаковую распределенность ξ_1 и ξ_2.

При гипотезе H_2 (заметим, что гипотеза $H_1 \subset H_2$) для $i = \overline{1,n}$ и $r > 0$ условная плотность равна

$$\mathcal{L}'\left(\bigcap_{k=1}^{r} \{t_{ik} = \tau_k\};\ 0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_r | d_i(1) = r\right) = r! \qquad (9)$$

Соотношение (9) означает, что условное совместное распределение вектор-строки $(t_{i1}, t_{i2}, \ldots, t_{id_i(1)})$ при условии $d_i(1) = r$ совпадает с распределением вариационного ряда выборки объема r равномерно распределенных на $[0,1]$ н.о.р. с.в. Отсюда следует, что при гипотезе H_2 величина $d_i(1)$ является *достаточной статистикой* для случайного процесса $d_i(t)$, если $0 \leq t \leq 1$. Это означает, что в случае справедливости какой-либо частной гипотезы из H_2 статистические выводы можно осуществлять на основе анализа независимой выборки $\mathbf{d} = (d_1(1), \ldots, d_n(1))^T$. В том числе и выбор самой частной гипотезы из H_2 должен осуществляться на основе набора данных d.

Гипотеза пуассоновости $d_i(t)$ – процесса ДТП многими авторами (см. [**?**], [**?**]) отвергается, поскольку свойство

$$\mathbf{E}d_i(t) = \mathbf{D}d_i(t), \quad t \in [0,1], \quad i = 1, 2, \ldots, \qquad (10)$$

пуассоновской с.в. статистическими данными не подтверждается. Обычно проверка свойства (10) строится на основе моментных оценок с использованием центральной предельной теоремы. Однако данные многих ЭПО российской системы ОСАГО статистически значимо этим критерием свойства (10) не отвергают. В связи с этим имеет смысл рассмотреть возможность применения для проверки пуассоновости более мощные характеризационные критерии, см. [**?**].

4.2 О характеризационном критерии пуассоновости

Пусть $d_i(1) = d_i$, d_i – н.о.р. дискретные с.в., $d_i \in \mathsf{N}_+$, $i = \overline{1,n}$. Будем проверять гипотезу

$$H_1 \ : \ d_1 \stackrel{d}{=} POIS(\theta), \quad \theta > 0,$$

против альтернативы

$$H_2 \ : \ d_1 \stackrel{d}{\neq} POIS(\theta), \quad \theta > 0.$$

Как известно, семейство пуассоновских распределений обладает полной достаточной статистикой:

$$\mathcal{S}(\mathbf{d}) = \sum_{i=1}^{n} d_i,$$

где $\mathcal{S}(\mathbf{d}) \stackrel{d}{=} POIS(n\theta)$.

Характеристическим свойством для гипотезы H_1 является утверждение [[**?**]c. 153-156] , что

$$\mathbf{d}|(\mathcal{S}(\mathbf{d}) = s) \stackrel{d}{=} MULTI(s; n; \vec{\pi}_n), \tag{11}$$

где $MULTI(s; n; \vec{\pi}_n)$ – полиномиальная случайная величина. Причем, s – число экспериментов, на основе которых она строится; n – число исходов в каждом эксперименте; $\vec{\pi}_n = (\pi_1, \ldots, \pi_n)^T$, а $\pi_j = \frac{1}{n}$, $j = \overline{1,n}$. Характеристическое свойство (11) и будем проверять. Для проверки полиномиальности с известным вектором $\vec{\pi}_n$ обычно рекомендуется применять критерий хи-квадрат в той или иной его форме. Однако если $s << n$, то критерий хи-квадрат уже не применим, так как невозможна группировка данных с априорно асимптотически нормальными частотами. А именно с ситуацией, когда $s << n$, имеем дело при анализе данных российской системы ОСАГО.

В качестве альтернативного подхода рассмотрим рандомизированный несмещенный критерий неймановской структуры. Для его построения используем метод достаточного эмпирического усреднения (ДЭУ-метод) [**?**].

Заметим, что вектор $\left(\frac{d_1}{n}, \cdots, \frac{d_n}{n}\right)$ является несмещенной оценкой с минимальной обобщенной дисперсией вектора $\vec{\pi}_n$. Естественно поэтому в качестве статистики критерия на каждой из гиперповерхностей $\{\mathbf{d} : \mathcal{S}(\mathbf{d}) = s\}$ взять величину

$$T(\mathbf{d}) = \max_{1 \le i \le n} \left| \frac{d_i}{n} - \frac{1}{n} \right|. \tag{12}$$

Найти условную функцию распределения

$$\Psi(u) = \mathbf{P}\{T(d) < u | \mathcal{S}(\mathbf{d}) = s\} \tag{13}$$

статистики $T(\mathbf{d})$ на атоме достаточной статистики $\{\mathbf{d} : \mathcal{S}(\mathbf{d}) = s\}$ не удается, так как это весьма сложная многомерная переборная задача. Однако методами статистического моделирования возможно достаточно точно оценить условный наблюдаемый уровень значимости

$$\alpha_{\text{набл.}}(s) = 1 - \Psi(T(\mathbf{d})). \tag{14}$$

Действительно, пусть $Z = (z_1, \ldots, z_s)^T$, где z_i, $i = \overline{1,s}$ – н.о.р. одномерные с.в. с функцией распределения

$$F_0(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(i < u), \tag{15}$$

где $\mathbb{1}(A)$ – индикатор события A. Тогда, положив

$$d_i^* = \sum_{j=1}^{s} \mathbb{1}(i = z_j), \quad i = \overline{1,n} \tag{16}$$

для $\mathbf{d}^* = (d_1^*, \ldots, d_n^*)$, получим, стохастическое равенство

$$\mathbf{d}^* \stackrel{d}{=} d | \mathcal{S}(d) = s. \tag{17}$$

С.в. $\mathbf{d}^*$ назовем вариантом данных $\mathbf{d}$, так как ее безусловное распределение совпадает с распределением с.в. $\mathbf{d}$, т.е. содержит одинаковое с d количество информации о гипотезе H_1.

Напомним, что

$$\alpha_{\text{набл.}}(s) = \mathbf{P}\{T(\mathbf{d}^*) \geq T(\mathbf{d}) | \mathcal{S}(\mathbf{d}) = s\}. \tag{18}$$

Если породить независимую выборку вариантов данных $\{d^*(1), \ldots, d^*(B)\}$ объема B, где $d^*(j) \stackrel{d}{=} d | \{\mathcal{S}(\mathbf{d}) = s\}$ для $j = \overline{1,B}$, то величина

$$\hat{\alpha}_{\text{набл.}}(s) = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^{B} \mathbb{1}\left(T(d^*(j)) \geq T(\mathbf{d})\right) \tag{19}$$

является состоятельной несмещенной оценкой для $\hat{\alpha}_{\text{набл.}}(s)$, [?]. Более того, при фиксированном значении $\alpha_{\text{набл.}}(s)$ имеем

$$B\hat{\alpha}_{\text{набл.}}(s) \stackrel{d}{=} BIN(B; \alpha_{\text{набл.}}(s)), \tag{20}$$

где $BIN(B, \theta)$ – биномиальная с.в., т.е. число успехов в B независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха в отдельном испытании, равной θ, $0 < \theta < 1$.

Из (19) и (20) следует, что ДЭУ-оценка (19) подчиняется закону больших чисел (см. [?], [?]), т.е. при $B \to \infty$

$$\hat{\alpha}_{\text{набл.}}(s) = \alpha_{\text{набл.}}(s) + o_p(1),$$

а скорость сближения $\hat{\alpha}_{\text{набл.}}(s)$ и $\alpha_{\text{набл.}}(s)$ определяется равномерно по всем возможным значениям $\alpha_{\text{набл.}}(s)$ лишь величиной B – числом моделирующих экспериментов. Заметим, что B можно брать сколь угодно большим: его выбор ограничен лишь компьютерным временем вычислений и мощностью датчика псевдослучайных равномерно распределенных чисел.

Но ни первая, ни вторая причина реально не является препятствием для получения достаточно точной оценки значения величины $\alpha_{\text{набл.}}(s)$. С одной стороны, существуют датчики случайных чисел практически неограниченной мощности [?]. С другой стороны, проблема нахождения

$\hat{\alpha}_{\text{набл.}}(s)$ идеально структурируется для проведения соответствующих вычислений на мощных многопроцессорных компьютерных системах.

Что касается выбора величины B, то ее можно осуществить или на основании двустадийной процедуры построения γ–доверительного интервала заранее заданной ширины для $\alpha_{\text{набл.}}(s)$ [?], или на основании очевидного асимптотического равенства, следующего из теоремы Муавра-Лапласа для $0 < \beta < 1$ при $B \to \infty$:

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{B}\left|\frac{\hat{\alpha}_{\text{набл.}}(s) - \alpha_{\text{набл.}}(s)}{\sqrt{\alpha_{\text{набл.}}(s)\left(1 - \alpha_{\text{набл.}}(s)\right)}}\right| \leq u_{\frac{1+\beta}{2}}\right\} = \beta + o\left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right), \tag{21}$$

(см. [?]). Здесь u_β – β-квантиль стандартного нормального распределения, т.е. $\Phi(u_\beta) = \beta$, $0 < \beta < 1$.

Из последнего равенства следует, что ошибка в оценивании $\alpha_{\text{набл.}}(s)$ с вероятностью β не превосходит $\zeta = \frac{u_{\frac{1+\beta}{2}}}{2\sqrt{B}}$. Задав ζ и β, получим, что

$$B \approx \left(\frac{u_{\frac{1+\beta}{2}}}{2\zeta}\right)^2. \tag{22}$$

Если ошибка первого рода α_1 задана, то соответствующий несмещенный критерий асимптотического (по B) уровня α_1 будет строится в соответствии со следующим правилом (см. [?]):

$$\begin{cases} H_1 \quad \text{отвергается, если } \hat{\alpha}_{\text{набл.}} < \alpha_1, \\ H_1 \quad \text{принимается, если } \hat{\alpha}_{\text{набл.}} \geq \alpha_1. \end{cases} \tag{23}$$

■

4.3 О неоднородном пуассоновском процессе

В качестве очередной гипотезы о структуре ДТП – процесса $d_1(t)$ естественно рассмотреть:

H_3: неоднородный пуассоновский процесс, т.е. процесс с независимыми приращениями, для которого

$$\mathbf{P}\{d_1(t+\Delta) - d_1(t) = k\} = \frac{(\Lambda(t,\Delta))^k e^{-\Lambda(t,\Delta)}}{k!}, \tag{24}$$

где $\Lambda(t,\Delta) = \int\limits_t^{t+\Delta} \lambda(u)du$ – структурная функция, $\lambda(u)$ – функция интенсивности, $\lambda(u) \geq 0$, $0 < t \leq 1 - \Delta$, $\Delta > 0$, $0 \leq u \leq 1$.

При справедливости гипотезы H_3 для $r > 0$ условная плотность распределения данных имеет вид

$$\mathcal{L}'\left(\bigcap_{k=1}^{r}\{t_{ik} = \tau_k\};\ 0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_r | d_i = r\right) = \frac{r! \prod\limits_{i=1}^{r} \lambda(\tau_i)}{(\Lambda(1))^r}. \tag{25}$$

Из соотношения (25) следует, что условное распределение вектор-строки $(t_{i1},\dots,t_{i\ d_i(1)})$ при условии $d_i(1)=r$ совпадает с распределением вариационного ряда выборки объема r н.о.р. случайных величин с плотностью распределения $\frac{\lambda(u)}{\Lambda(1)}$, где $0\le u\le 1$.

Различие в типе условной плотности распределения данных $(t_{i1},\dots,t_{id_i(1)})$ при фиксированных $d_i(1)$, $i=\overline{1,n}$ при гипотезах H_2 (см. соотношение (19)) и H_3 (см. соотношение (25)) предопределяют и выбор критерия при проверке гипотезы H_2 против H_3. Ясно, что при $n\to\infty$ состоятельным критерием будет критерий Колмогорова [?].

Приведем алгоритм построения соответствующего критерия для проверки гипотезы H_2 против H_3:

1) объединим в единую последовательность все элементы вектор-строк $(t_{i1},\dots,t_{id_i(1)})$, $i=\overline{1,n}$;

2) построим эмпирическую функцию $\hat F_m(u)$ вида

$$F_m(u)=\frac{1}{m}\sum_{\substack{j=\overline{1,d_i(1)}\\ i=\overline{1,n}}}\mathbb{1}(\tau_{ij}<u), \tag{26}$$

где $m=\sum\limits_{i=1}^{n}d_i(1)$, а τ_{ij} реализованное значение t_{ij}, $j=\overline{1,d_i(1)}$, $i=\overline{1,n}$;

3) в качестве статистики критерия предлагается принять

$$D_m=\sqrt{m}\sup_{0<u<1}\left|\hat F_m(u)-u\right|; \tag{27}$$

4) гипотезу H_2 следует принять, если наблюденный уровень значимости

$$\alpha_{\text{набл.}}=1-\mathcal{K}_m(Dm)\ge\alpha_1,$$

и отвергнуть в пользу H_3, если

$$\alpha_{\text{набл.}}<\alpha_1.$$

Здесь α_1 – ошибка первого рода, а $\mathcal{K}_m(v)$ – функция распределения Колмогорова, см. [?].

Описанный критерий является несмещенным критерием уровня α_1 при проверке сложной гипотезы H_2 против сложной гипотезы H_3.

Необходимо отметить, что для каждой частной гипотезы из H_3 приходится “придумывать” специальный критерий проверки. Например, пусть гипотеза $H_{3,1}$ состоит в том, что $\lambda(t)=\lambda_1$ на интервале (u_1,u_2) (летом) и $\lambda(t)=\lambda_2$ на интервале (u_3,u_4) (зимой), где u_1, u_2, u_3 и u_4 – известные величины, $(0<u_j<1$, $(j=\overline{1,4})$. Гипотезы $\lambda_1\ne\lambda_2$ или $\lambda_1<\lambda_2$ проверяется на основе несмещенных критериев, имеющих неймановскую структуру [?, гл.4]. Выбор значения u_j, $j=\overline{1,4}$, целесообразно определить на основе графических методов.

∎

4.4 О других стохастических моделях ДТП-процессов

Выбор той или иной модели зачастую связан с тем, какое конкретное явление, связанное с ДТП-процессом, предстоит изучить. Например, попытка описать данные посредством неоднородного (по пространству) марковского процесса рождения связано с желанием выявить влияние на склонность водителя к совершению повторных ДТП.

О других возможных гипотезах относительно ДТП-процесса $d_1(t)$ см. монографии [?] и [?]. В то же время проверить адекватность многих моделей весьма затруднительно из-за ограниченности статистического материала в связи с относительной непродолжительностью функционирования российской системы ОСАГО. ■

5 О графических методах анализа дискретных данных

Практически решение любой прикладной статистической задачи на первом этапе связано с нахождением $\hat{\theta}_n$ — квалифицированной точечной оценки параметра θ_0, распределения, порождающего исходный набор данных. В случае непараметрического порождающего распределения в качестве θ_0 выступает само распределение или подходящая его характеристика. Предположим также, что объем анализируемой информации характеризуется в данном разделе параметром n.

Предположения о статистической модели, в рамках которой следует оценить $\hat{\theta}_n$, должны быть четко определены. В частности, если имеется какая-то гипотеза о структуре этой модели, то для того, чтобы формально установить, какие именно уклонения от модели следует проверять (а априорно этого, как правило, установить не удается), необходимо привлечь, в первую очередь, графические методы.

На предварительном (разведочном) этапе статистического анализа, прежде чем остановиться на каком-то, как правило, математически весьма сложном виде обработки данных, приходится решить ряд проблем общего описания структуры данных. Среди них важнейшими являются:

a) выбор наиболее простой математической модели структуры данных,

b) выявление наличия и типа уклонений от выбранной модели.

При решении этих проблем трудно переоценить роль графических методов.

Здесь естественно вспомнить об афоризме, приписываемом выдающемуся статистику Дж. Тьюки, который гласит, что простейший график содержит больше информации, чем груда цифр. Часто именно на основе графического анализа представляется возможным сформулировать гипотезы о структуре данных.

Правда, здесь возникает своя математическая проблема: как для конкретной статистической задачи определить тип графика, который бы наиболее полно суммировал и выявлял искомую информацию. В определенном смысле, на каждый конкретный вопрос к данным необходимо строить свой тип графика.

Далее предлагается использовать при статистическом анализе расширенный класс графиков, который назовем CH-вероятностными графиками.

Идея построения CH-вероятностных графиков для проверки статистических гипотез проста. Предположим, что имеется две гипотезы о структуре случайных данных d, например Γ_1 и Γ_2.

Выберем функционал $\rho(v)$, однозначно определяющий распределение случайных данных d. Здесь v—детерминированный параметр функционала, $v \in U$, U—область допустимых значений v. В дальнейшем $\rho(v)$ будем называть *характеризационным* или CH-функционалом. Чаще всего в качестве CH-функционала при статистическом анализе дискретных распределений берется производящая функция наблюдаемой случайной величины.

CH-функционалы должны обладать тем общим свойством, что для них справедливы утверждения типа теоремы Леви для характеристических функций о непрерывности соответствия $\rho(v)$ и вероятностных мер, порождающих $\rho(v)$.

Предположим, что $\rho(v)$ при справедливости гипотезы Γ_1 имеет форму $\rho_1(v)$, а когда гипотеза Γ_1 не справедлива, т.е. имеет место гипотеза Γ_2, CH-функционал имеет вид $\rho_2(v)$.

Далее на основе данных d строятся две состоятельные при $n \to \infty$ оценки для $\rho(v)$. Одна из них $\hat{r}_n(v)$ строится исходя из справедливости гипотезы Γ_1. Поясним: реально нам не известно, какая гипотеза справедлива, но при построении $\hat{r}_n(v)$ считаем, что данные d порождены вероятностной мерой из Γ_1. В этом случае при $n \to \infty$

$$\hat{r}_n(v) = \begin{cases} \rho_1(v) + \delta_{1n}, & \text{когда верна гипотеза } \Gamma_1, \\ m(v) + \delta_{2n}, & \text{когда верна гипотеза } \Gamma_2, \end{cases} \tag{28}$$

где $m(v)$ отлична и от $\rho_1(v)$, и от $\rho_2(v)$. Здесь и далее $\delta_{in} = o_p(1)$ для $i = \overline{1,4}$.

Функция $m(v)$ в (28) отлична и от $\rho_2(v)$, поскольку $\rho(v)$ оценивается не в предположении гипотезы Γ_2, а в предположении, что верна Γ_1.

Вторая состоятельная оценка для $\rho(v)$ строится в предположении справедливости объединенной гипотезы $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ или, что часто более удобно, в предположении справедливости "подходящей" гипотезы $\Gamma_3 \supset (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$. Обозначим эту оценку через $\hat{R}_n(v)$. При $n \to \infty$

$$\hat{R}_n(v) = \begin{cases} \rho_1(v) + \delta_{3n}, & \text{когда справедлива гипотеза } \Gamma_1, \\ \rho_2(v) + \delta_{4n}, & \text{когда справедлива гипотеза } \Gamma_2. \end{cases} \tag{29}$$

Далее, на плоскости Ror строится график кривой, заданной в параметрическом виде:

$$\begin{cases} R = \hat{R}_n(v), & v \in U, \\ r = \hat{r}_n(v), & v \in U. \end{cases} \tag{30}$$

В пределе при $n \to \infty$ график (30) превращается в прямую $R = r$, когда верна гипотеза Γ_1, и в кривую

$$\begin{cases} R = \rho_2(v), & v \in U, \\ r = m(v), & v \in U, \end{cases} \tag{31}$$

когда справедлива гипотеза Γ_2.

Предположим, что во втором из неравенств (31) переменную v можно однозначно выразить через r. Тогда кривая (31) примет вид

$$R = \rho_2(\operatorname{arc} m(r)), \tag{32}$$

где arc – символ обратной функции. Если такое представление аналитически затруднительно, то будем считать, что кривая (32) построена графически на основе равенств (31). Даже при очень сложных функциях $\rho_2(v)$ и $m(v)$ это можно сделать на основе численных методов компьютерной графики.

Итак, из (28) и (29) следует, что при справедливости гипотезы Γ_1 оценочная кривая (30) будет лежать вблизи прямой $R = r$. *В этом случае принимаем гипотезу* Γ_1. При справедливости гипотезы Γ_2 оценочная кривая (30) будет лежать вблизи кривой (32). *В этом случае принимаем гипотезу* Γ_2. И чем сильнее кривая (32) отличается от биссектрисы $R = r$, тем проще будет различить Γ_1 и Γ_2.

Таким образом, полезно сформулировать

Решающее правило графического анализа

Если кривая (30) лежит вблизи прямой $R = r$, то принимается гипотеза Γ_1. Если в кривой (30) прослеживаются систематические уклонения от прямой $R = r$, то следует гипотезу Γ_1 отвергнуть в пользу гипотезы Γ_2.

Дело осложняется тем, что в случае сложной гипотезы Γ_2 отдельные простые гипотезы, ее составляющие, могут порождать свои предельные кривые вида (32). В связи с этим возникает потребность в составлении каталога кривых вида (32) для набора простых гипотез, образующих Γ_2. Конфигурация кривой (30), наиболее близко описываемая одним из элементов этого каталога, предопределит следующую гипотезу, для которой предстоит повторить, и может быть неоднократно, описанную выше процедуру графической проверки гипотезы о типе распределения данных d. Отметим попутно, что специфические геометрические свойства распределений при таком неформальном подходе часто легче выявить, чем при использовании сложных аналитических критериев. Правда, для этого необходим определенный опыт работы с графикой.

В качестве иллюстрации возможности использования CH-графики рассмотрим проблемы проверки гипотезы пуассоновости против отрицательной биномиальности и гипотезы отрицательной биномиальности против гипотезы хофмановости.

Пример 5.1. О проверке гипотезы пуассоновости против гипотезы отрицательной биномиальности.

Пусть $d = (d_1, \ldots, d_n)$, $d_i \in \mathsf{N}_+$, d_i—н.о.р. с.в., ($i = \overline{1,n}$). Рассмотрим задачу проверки гипотезы

$$\Gamma_1 : d_1 \stackrel{d}{=} POIS(\theta_0^{(1)}), \quad \theta_0^{(1)} > 0$$

против альтернативной гипотезы

$$\Gamma_2 : d_1 \stackrel{d}{=} NBIN(\nu_0, \tau_0), \quad \theta_0^{(2)} = (\nu_0, \tau_0)^T, \quad \nu_0 > 0, \quad 0 < \tau_0 < 1.$$

Здесь $\theta_0^{(i)}$ – значения порождающего параметра при гипотезе Γ_i, $i = \overline{1,2}$. В качестве CH-функционала $\rho(v)$ примем производящую функцию с.в. d_1, т.е. $\Pi(v;\theta_0) = \mathbf{E}\{v^{d_1};\theta_0\}$. Как известно, $\Pi(v;\theta_0^{(1)}) = \exp\{-\theta_0^{(1)}(v-1)\}$ при справедливости гипотезы Γ_1, и $\Pi(v;\theta_0^{(2)}) = (\tau_0/(1-(1-\tau_0)v))^{\nu_0} = \left(1 + \frac{1-\tau_0}{\tau_0}(1-v)\right)^{\nu_0}$ при справедливости гипотезы Γ_2.

Обозначим $\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i$. Если справедлива Γ_1, то $\hat{\theta}_n^{(1)} = \bar{d}_n$ – ОМП параметра $\theta_0^{(1)}$. Соотношение (30) в рассматриваемой задаче принимает вид

$$\begin{cases} R = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} v^{d_i}, \\ r = \exp\{-\bar{d}_n(v-1)\}, \end{cases} \tag{33}$$

где $v \in [0,1]$. При $n \to \infty$ и справедливости Γ_1 случайная кривая (33) сходится к биссектрисе $R = r$.

Если же справедлива гипотеза Γ_2, то при $n \to \infty$

$$\begin{cases} R = \left(1 + \frac{1-\tau_0}{\tau_0}\left(1-v\right)\right)^{\nu_0} + o_p(1), \quad v \in [0,1], \\ r = \exp\left\{\nu_0 \frac{1-\tau_0}{\tau_0}(1-v)\right\} + o_p(1), \quad v \in [0,1], \end{cases} \tag{34}$$

поскольку в этом случае

$$\bar{d}_n = \nu_0 \frac{1-\tau_0}{\tau_0} + o_p(1).$$

Из второго предельного для $n \to \infty$ равенства системы (34) выразим величину $\frac{\tau_0(v-1)}{1-\tau_0}$ через r и подставим ее в соответствующее первое предельное равенство. Получим уравнение кривой

$$R = \frac{1}{(1 + \frac{\ln r}{\nu_0})^{\nu_0}}, \quad \exp\{-\nu_0 \frac{1-\tau_0}{\tau_0}\} \le r \le 1, \tag{35}$$

к которой при $n \to \infty$ стремится график (33) при справедливости гипотезы Γ_2.

Гипотеза принимается в соответствии с “Решающим правилом графического анализа” (см. стр. 19). Каталог кривых (35) приведен на рис. 1, который выполнен по моей просьбе моей дипломницей К. Иванюта.

Ясно, что на основе данного подхода можно проверять и другие гипотезы о типе дискретного распределения, а также гипотезы об однородности выборок, о стохастической упорядоченности порождающих распределений и т.д.

Пример 5.2. Графическая проверка гипотезы отрицательной биномиальности против альтернативы хофмановости.

Пусть $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$, $y_i \in \mathsf{N}_+$, y_i – н.о.р. случайные величины, $i = \overline{1,n}$.

При гипотезе Γ_1

$$y_i \stackrel{d}{=} NBIN(\nu_0, \tau_0), \tag{36}$$

с параметрами $\nu_0 > 0$, $0 < \tau_0 < 1$ и производящей функцией

$$\mathbf{E}\left\{z^{y_1}; \Gamma_1\right\} = \pi_1(z; \nu_0, \tau_o) = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{1-\tau_0}{\tau_0}\right)(1-z)\right)^{\nu_0}}. \tag{37}$$

При гипотезе Γ_2

$$y_1 \stackrel{d}{=} HOFM(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \tag{38}$$

с параметрами $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, $\gamma_0 \geq 0$, $\gamma_0 \neq 1$ и производящей функцией

$$\mathbf{E}\left\{z^{y_1};\Gamma_2\right\} = \pi_2(z;\alpha_0,\beta_o,\gamma_0) = \exp\left\{-\frac{\alpha_0}{\beta_0(1-\gamma_0)}\left((1+\beta_0(1-z))^{1-\gamma_0}-1\right)\right\}. \tag{39}$$

При построении "$\pi-\pi$" вероятностного графика полагаем

$$\begin{cases} R = \pi_2(z;\hat{\alpha}_n,\hat{\beta}_n,\hat{\gamma}_n), \\ r = \pi_1(z;\hat{\nu}_n,\hat{\tau}_n), \end{cases} \tag{40}$$

где $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$, $\hat{\gamma}_n$ состоятельные оценки параметров α_0, β_0 и γ_0 в предположении справедливости гипотезы Γ_2, а $\hat{\nu}_n$, $\hat{\tau}_n$ – состоятельные оценки параметров ν_0 и τ_0 в предположении справедливости гипотезы Γ_1.

Обратим внимание, что в (40) представление R выбрано правильно. Дело в том, что соответствующую формулу можно считать правильной для производящей функции и при объединенной гипотезе $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, т.к.

$$\lim_{\gamma_0\to 1}\pi_2(z;\alpha_0,\beta_0,\gamma_0) = \pi_1(z;\nu_0,\tau_0), \tag{41}$$

где $\nu_0 = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$, $\tau_0 = \frac{1}{1+\beta_0}$ в параметризации гипотезы Γ_2. Таким образом, при $n \to \infty$ и справедливости гипотезы Γ_1 предельная форма кривой (40) является биссектрисой (т.е. прямой) первого квадранта.

Перейдем к определению предельной формы кривой (40) в случае справедливости гипотезы Γ_2. В качестве упомянутых выше состоятельных оценок можно, в принципе, взять оценки любого типа. Однако, будем считать, что все оценки и при Γ_1, и при Γ_2, получены по методу моментов. Выбор метода оценивания связан с тем, что для рассматриваемых статистических моделей значение оценок и их предельное значение легко получить в явном виде.

Если

$$\hat{f}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i(y_i-1)\cdots(y_i-k+1)$$

эмпирические факториальные моменты, то при гипотезе Γ_1 оценки $\hat{\nu}_n$ и $\hat{\tau}_n$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \hat{f}_1 = \hat{\nu}_n\frac{1-\hat{\tau}_n}{\hat{\tau}_n}, \\ \hat{f}_2 = \hat{\nu}_n(\hat{\nu}_n+1)\left(\frac{1-\hat{\tau}_n}{1-\hat{\tau}_n}\right)^2, \end{cases} \tag{42}$$

а $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$ и $\hat{\gamma}_n$ при Γ_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \hat{f}_1 = \hat{\alpha}_n, \\ \hat{f}_2 = \hat{\alpha}_n^2 + \hat{\alpha}_n\hat{\beta}_n\hat{\gamma}_n, \\ \hat{f}_3 = \hat{\alpha}_n^3 + 3\hat{\alpha}_n^2\hat{\beta}_n\hat{\gamma}_n + \hat{\alpha}_n\hat{\beta}_n^2\hat{\gamma}_n(\hat{\gamma}_n+1). \end{cases} \tag{43}$$

Из системы (42) получаем, что

$$\begin{cases} \hat{\nu}_n = \frac{\hat{f}_1^2}{\hat{f}_2-\hat{f}_1^2}, \\ \hat{\tau}_n = \frac{\hat{f}_2}{\hat{f}_2-\hat{f}_1^2+f_1}, \\ \frac{1-\hat{\tau}_n}{\hat{\tau}_n} = \frac{f_2-\hat{f}_1^2}{\hat{f}_1}. \end{cases} \tag{44}$$

При справедливости гипотезы Γ_1 и $n \to \infty$ оценки

$$\begin{cases} \hat{\nu}_n = \nu_0 + o_p(1), \\ \hat{\tau}_n = \tau_0 + o_p(1), \\ \frac{1-\hat{\tau}_n}{\hat{\tau}_n} = \frac{1-\tau_0}{\tau_0} + o_p(1), \end{cases} \tag{45}$$

а при справедливости гипотезы Γ_2 и $n \to \infty$

$$\begin{cases} \hat{\nu}_n = \frac{\alpha_0}{\beta_0\gamma_0} + o_p(1), \\ \hat{\tau}_n = \frac{1}{1+\beta_0\gamma_0} + o_p(1), \\ \frac{1-\hat{\tau}_n}{\hat{\tau}_n} = \beta_0\gamma_0 + o_p(1). \end{cases} \tag{46}$$

Таким образом, чтобы найти в плоскости $r-0-R$ каталог кривых $R = R(r;\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$, определяемых при Γ_2 параметрическим представлением (40), выразим $(z-1)$ через r, α_0, β_0 и γ_0, используя второе из равенств системы (40):

$$r = \frac{1}{(1+\beta_0\gamma_0(1-z))^{\frac{\alpha_0}{\beta_0\gamma_0}} + o_p(1)}. \tag{47}$$

Из (47) имеем

$$(1-z) = \frac{1}{\beta_0\gamma_0}\left(r^{-\frac{\beta_0\gamma_0}{\alpha_0}} - 1\right). \tag{48}$$

С учетом явного вида (39) производящей функции $\pi_2(z;\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$, подставим в правую часть равенства (48) вместо $(z-1)$ правой части первого из системы равенств (40) и получим

$$R = \exp\left\{-\frac{\alpha_0}{\beta_0(1-\gamma_0)}\left(\left\{1+\frac{1}{\gamma_0}\left(r^{-\frac{\beta_0\gamma_0}{\alpha_0}} - 1\right)\right\}^{1-\gamma_0} - 1\right)\right\} + o_p(1). \tag{49}$$

Таким образом, если кривая (40), реально построенная на основе данных y с использованием оценок вида (44), уклонается от биссектрисы в сторону одной из кривых вида (49), то гипотезу Γ_1 имеет смысл отклонить в пользу гипотезы Γ_2.

Надо отметить однако, что на глаз определить тип кривой вида (49) не просто. Имеет смысл ее распрямить, т.е. положить.

$$\tilde{R} = \left\{\gamma_0\left(\left\{-\frac{\beta_0(1-\gamma_0)}{\alpha_0}\ln R + 1\right\}^{\frac{1}{1-\gamma_0}} - 1\right) + 1\right\}^{-\frac{\alpha_0}{\beta_0\gamma_0}}, \tag{50}$$

то в плоскости $r-0-R$ кривые (49) преобразуются в кривые вида

$$\tilde{R} = r + o_d(1). \tag{51}$$

Для этого в (50) вместо $\frac{\alpha_0}{\beta_0}$ и γ_0 необходимо взять их моментные оценки. Попутно заметим, что кривые (49) и преобразование (50) зависит не от индивидуальных значений α_0 и β_0, а лишь от их отношений $\frac{\alpha_0}{\beta_0}$. ∎

6 О состоянии и необходимых управляющих воздействиях на рынок "ОСАГО"

В 2006 и 2008 годах мною вместе с моим студентом механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова И. Дехтеревым по поручению руководства Федеральной службы страхового надзора РФ проведены исследования статистических данных о функционировании страхового рынка "ОСАГО"с целью оценки степени его убыточности и выработки предложений по корректировке тарифной системы. Нами было отмечено, что

1. Динамика функционирования системы ОСАГО отчетливо демонстрирует рост убыточности СК составляющих рынок ОСАГО. Основная причина убыточности СК – относительно высокие уровни интенсивности страховых случаев. Интенсивность страховых случаев по разным компаниям иногда отличается в 6 раз. Соответственно имеем и суммарный рост выплат, хотя изменение по годам средних выплат незначительно, что свидетельствует о слабом влиянии на них инфляционных явлений.

2. Принятая система ”Бонус-Малус” правильно реагирует ростом убыточности при росте интенсивности страховых случаев и размеров средних выплат при фиксированных тарифах. И характеризуется слабой реакцией на рост величины средней премии, рост которой соответствует росту риска. Однако то, что около 20% СК убыточны, заставляет искать средства для предотвращения абсолютной убыточности рынка ОСАГО. Решение о пропорциональном увеличении базовых тарифов неприемлемо. Если их увеличить так, что наиболее убыточная компания будет иметь ее на уровне 0,77 (по Закону это ситуация справедливых выплат и справедливых премий при фиксированной модели рынка), то средняя убыточность СК станет 0,5, а наименьшая будет 0,35. Таким образом, подавляющее число страхователей будет платить повышенные премии.

3. Анализ данных о динамике изменения распределения договоров по классам российской системы ОСАГО Бонус-Малус показал, что в полном объеме она не работает. На основании оценки частот страховых случаев можно ожидать, что приблизительно 10 процентов договоров должны переходить ежегодно в "малусные"классы, однако, по многим типам ТС этот процент близок к нулю. Потери страховых компаний рынка ОСАГО в объеме сбора премий составляют приблизительно 5 процентов. Необходимо тщательно отладить систему ОСАГО типа ”Бонус-Малус” путем принудительного пополнения ”малусных” классов за счет водителей с повышенной аварийностью.

4. Изменения базовых тарифов следует применять выборочно лишь для тех транспортных средств, которые первоначально были недостаточно точно тарифицированы. Здесь можно упомянуть следующие транспортные средства: легковые такси, автобусы, используемые в качестве такси, троллейбусы, прицепы к легковым автомобилям, мотоциклы. Относительно рынка в целом в ближайшее время стоит ограничиться изменением в соответствующие моменты времени мультипликативных коэффициентов. Эту процедуру стоит производить ежегодно. Предложена процедура пересчета мультипликативных коэффициентов.

5. Необходимо отметить, что роль выплат по "жизни и здоровью"в убыточности СК пока незначительна. И лишь существенное увеличение лимита выплат по жизни и здоровью может повлиять на убыточность рынка.

6. Дальнейшее развитие российской системы ОСАГО типа Бонус-Малус, с нашей точки зрения, связано с расширением "малусной"зоны с небольшими процентными наказаниями для одного или двух страховых случаев, приводящих к малым ущербам. Это будет способствовать выводу из "тени"определенного процента нерегистрируемых страховых случаев.

Список литературы

[1] РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ.
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЗАКОН №40 от 25.04.2002. *ОБ ОБЯЗАТЕЛЬНОМ СТРАХОВАНИИ ГРАЖДАНСКОЙ ОТВЕТСТВЕННОСТИ ВЛАДЕЛЬЦЕВ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ.* (в ред. Федеральных законов от 23.06.2003 №77-ФЗ, от 29.12.2004 №199-ФЗ, от 21.07.2005 №103-ФЗ, от 25.11.2006 №192-ФЗ, от 30.12.2006 №266-ФЗ, от 01.12.2007 №306-ФЗ с изм., внесенными Федеральным законом от 24.12.2002 №176-ФЗ, Постановлением Конституционного Суда РФ от 31.05.2005 №6-П).

[2] ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПОСТАНОВЛЕНИЕ от 8 декабря 2005 г. №739. *ОБ УТВЕРЖДЕНИИ СТРАХОВЫХ ТАРИФОВ ПО ОБЯЗАТЕЛЬНОМУ СТРАХОВАНИЮ ГРАЖДАНСКОЙ ОТВЕТСТВЕННОСТИ ВЛАДЕЛЬЦЕВ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ, ИХ СТРУКТУРЫ И ПОРЯДКА ПРИМЕНЕИЯ СТРАХОВЩИКАМИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ СТРАХОВОЙ ПРЕМИИ.* (в ред. Постановлений Правительства РФ от 21.06.2007 №390, от 29.02.2008 №130).

[3] ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПОСТАНОВЛЕНИЕ от 7 мая 2003 г. №263. *ОБ УТВЕРЖДЕНИИ ПРАВИЛ ОБЯЗАТЕЛЬНОГО СТРАХОВАНИЯ ГРАЖДАНСКОЙ ОТВЕТСТВЕННОСТИ ВЛАДЕЛЬЦЕВ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ.* (в ред. Постановлений Правительства РФ от 28.08.2006 №525, от 18.12.2006 №775, от 21.06.2007 №389, от 29.02.2008 №129, от 29.02.2008 №131, с изм., внесенными решениями Верховного Суда РФ от 10.07.2006 №ГКПИ06-529, от 24.07.2007 №ГКПИ07-658).

[4] Ширяев А.Н. *Вероятность.* т. 1,2 МЦНМО, М., 2004.

[5] Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложений.* Мир, М., 1984.

[6] Чжун Кай-лай. *Однородные цепи Маркова.* Мир, М., 1964.

[7] Лемер Ж. *Автомобильное страхование. Актуарные модели.* Янус - К, М., 1998.

[8] Лемер Ж. *Системы бонус-малус в автомобильном страховании.* Янус - К, М., 1998.

[9] Мак Т. *Математика рискового страхования.* Олимп - Бизнес, М., 2005.

[10] Гербер Х. *Математика страхования жизни.* Мир, М., 1995.

[11] Фалин Г.И., Фалин А.И. *Актуарная математика в задачах.* ФИЗМАТЛИТ, М., 2003.

[12] Коломина Е.В., Шахова В.В., ред. *Словарь страховых терминов.* Финансы и статистика, М., 1991.

[13] Tremblay L. Using The POISSON-INVERSE GAUSSIAN in Bonus-Malus system. *Astin Bulletin*, 22, 1:97–106, 1992.

[14] Besson J.L., Partrat Ch. Trend et systemes de BONUS-MALUS. *Astin Bulletin*, 22, 1:11–31, 1992.

[15] Walhin J.F., Paris J. Using mixed Poisson processes in connection with Bonus-Malus systems. *Astin Bulletin*, 22, 1:81–99, 1999.

[16] Walhin J.F., Paris J. The true claim amount and frequences distributions within a Bonus-Malus systems. *Astin Bulletin*, 30, 2:391–403, 2000.