Представление случайной величины $NBIN(\nu, \tau)$ как смешанной пуассоновской случайной величины

Плотность распределения отрицательно биномиальной величины $NBIN(\nu, \tau)$ имеет вид:

$$nbin(k; \nu, \tau) = \frac{\Gamma(k+\nu)}{\Gamma(\nu) k!} \tau^{\nu} (1-\tau)^k, \qquad k = 0, 1, \dots \ . \tag{1}$$

Пусть Λ – гамма распределенная случайная величина

$$\mathcal{L}'(\Lambda) = \frac{\lambda^{\alpha-1} \exp\{-\lambda/\sigma\}}{\sigma^{\alpha} \Gamma(\alpha)}, \quad \lambda > 0. \tag{2}$$

Тогда

$$p(k; \alpha, \sigma) = \mathbf{P}\{POIS(\Lambda) = k; \alpha, \sigma\} \underset{\text{полной вероятности}}{\overset{\text{по формуле}}{=}} \tag{3}$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \frac{\lambda^k \exp\{-\lambda\}}{k!} \cdot \frac{\lambda^{\alpha-1} \exp\{-\lambda/\sigma\}}{\sigma^{\alpha} \Gamma(\alpha)} d\lambda = \tag{4}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+k)}{k! \Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\sigma^{\alpha} (1+\sigma^{-1})^{k+\alpha}} \underbrace{\int\limits_0^{\infty} \frac{\lambda^{\alpha+k-1} \exp\left\{-\frac{\Lambda}{(1+\sigma^{-1})^{-1}}\right\} d\lambda}{(1+\sigma^{-1})^{-(k+\alpha)} \Gamma(k+\alpha)}}_{\text{ї}} = \tag{5}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+k)}{k! \Gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{\sigma}{1+\sigma}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{1+\sigma}\right)^{\alpha}. \tag{6}$$

Если в (6) положить

$$\begin{gathered} \alpha = \nu \\ \frac{\sigma}{1+\sigma} = \tau, \end{gathered} \tag{7}$$

то вероятность (3) принимает значение правой части соотношения (1). ■