Пример. Отрицательно биномиальная величина как сумма пуассоновского числа независимых логарифмически распределенных случайных величин

Производящая функция случайной величины $NBIN(\nu,\tau)$ имеет вид

$$\pi(z;NBIN(\nu,\tau)) = \left(\frac{1-\tau}{1-\tau z}\right)^{\nu}, \ \nu \geq 0, \ 0 \leq \tau \leq 1, \ 0 < z \leq 1. \tag{1}$$

Производящая функция пуассоновского распределения представляется как

$$\pi(z;POIS(\lambda)) = \exp\{\lambda(z-1)\}, \ \lambda > 0, \ z > 0, \tag{2}$$

а логарифмического распределения как

$$\pi(z;LOG(\varkappa)) = \frac{\ln(1-\varkappa z)}{\ln(1-\varkappa)}, \ |z| < \frac{1}{\varkappa}. \tag{3}$$

Пусть случайные величины $POIS(\lambda)$ и $LOG(\varkappa)$ независимы. Тогда $\pi(z;\sum\limits_{i=1}^{\rho} y_i)$ – производящая функция суммы $\sum\limits_{i=1}^{\rho} y_i$ – случайного числа ρ случайных величин y_i, где

$$\begin{cases} \rho \overset{d}{=} POIS(\lambda), \ \lambda > 0, \\ \{y_1, y_2, \ldots\} \ \text{– н.о.р. случайные величины}, \\ y_1 \overset{d}{=} LOG(\varkappa), \ 0 < \varkappa < 1, \\ \rho \text{ и } y_i, \ i = \overline{1,\infty}, \ \text{независимы}, \\ \sum\limits_{i=1}^{\rho} y_i = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\rho} y_i, & \rho > 0, \\ 0, & \rho = 0, \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

с учетом соотношения

$$\pi\left(z;\sum_{i=1}^{\rho} y_i\right) = \exp\lambda\{(\pi(z;LOG(\varkappa)) - 1\} \tag{5}$$

представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \pi\left(z;\sum_{i=1}^{\rho} y_i\right) &= \exp\lambda\left(\frac{\ln(1-\varkappa z)}{\ln(1-\varkappa)} - 1\right) = \\ &= \exp\frac{\lambda}{\ln(1-\varkappa)}\left(\ln\frac{1-\varkappa z}{1-\varkappa}\right) = \\ &= \left(\frac{1-\varkappa}{1-\varkappa z}\right)^{-\frac{\lambda}{\ln(1-\varkappa)}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом, при

$$\begin{cases} \varkappa = \tau, \\ -\frac{\lambda}{\ln(1-\varkappa)} = \nu, \end{cases} \tag{7}$$

правая часть (6) совпадает с представлением (1) для производящей функции отрицательно-биномиального распределения. ■