Проверка гипотезы пуассоновости против отрицательной биномиальности данных на основе вида "$\pi-\pi$" графика

Пусть $y=(y_1,\dots,y_n)^T$, y_i – н.о.р. случайные величины, $i=\overline{1,n}$.

1. Предположим, что справедлива гипотеза

$$\Gamma_1 : y_1 \overset{d}{=} POIS(\theta_0), \quad \theta_0>0, \quad \mathcal{L}'(y_i)=\frac{\theta_0^k e^{-\theta_0}}{k!}, \quad k=0,1,2,\dots \tag{1}$$

$$\pi(z;POIS(\theta_0))=\exp(\theta_0(z-1)) \tag{2}$$

$$\breve{a}_1(POIS(\breve{\theta}))=\bar{y}_n=\theta_0+0_p(1) \tag{3}$$

$$\begin{cases} R=\hat{\pi}_n(z)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} z^{y_i}=E\{z^{y_i};POIS(\theta_0)\}+0_p(1)=\exp(\theta_0(z-1))+0_p(1) \\ r=\breve{\pi}(z;POIS(\breve{\theta}))=\exp\{\bar{y}_n(z-1)\}=\exp(\theta_0(z-1))+0_p(1) \end{cases} \tag{4}$$

$$R=r+0_p(1) \text{ при } n\to\infty. \tag{5}$$

Итак, при справедливости гипотезы Γ_1 в первом квадранте плоскости (r,R) будет наблюдаться график кривой в окрестности биссектрисы единичного квадрата.

2. Возникает вопрос, что будет наблюдаться в единичном квадрате плоскости (r,R), если справедлива гипотеза

$$\Gamma_2 : y_1 \overset{d}{=} NBIN(\nu_0,\tau_0); \quad \nu_0>0, \quad 0<\tau_0<1, \tag{6}$$

$$\mathcal{L}'(y_1)=\frac{\Gamma(\nu_0+k)}{\Gamma(\nu_0)k!}\tau_0^{\nu_0}(1-\tau_0)^k, \quad k=0,1,2,\dots \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\pi(z;NBIN(\nu_0,\tau_0)) &= \left(\frac{\tau_0}{1-(1-\tau_0)z}\right)^{\nu_0}= \\ &=\left(\frac{\tau_0}{\tau_0-(1-\tau_0)(z-1)}\right)^{\nu_0}, \quad |z|<\frac{1}{1-\tau_0}.\end{aligned} \tag{8}$$

Ордината "$\pi-\pi$" графика R в случае справедливости гипотезы Γ_2 принимает вид

$$\begin{aligned}R=\hat{\pi}_n(z)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z^{y_i} &= E\{z^{y_i};NBIN(\nu_0,\tau_0)\}+0_p(1)= \\ &=\left(\frac{\tau_0}{\tau_0-(1-\tau_0)(z-1)}\right)^{\nu_0}+0_p(1),\end{aligned} \tag{9}$$

$$a_1(NBIN(\nu_0,\tau_0)) = \nu_0\frac{1-\tau_0}{\tau_0}, \tag{10}$$

$$\hat{a}_1(NBIN(\nu_0,\tau_0)) = \bar{y}_n = \nu_0\frac{1-\tau_0}{\tau_0} + 0_p(1). \tag{11}$$

А абсцисса $"\pi - \pi"$ графика задается соотношением

$$r = \hat{\pi}(z; POIS(\hat{a}_1(NBIN(\nu_0,\tau_0)))) = \exp\left(\nu_0\frac{1-\tau_0}{\tau_0}(z-1)\right) + 0_p(1), \tag{12}$$

откуда получаем неравенство

$$\exp\left\{-\nu_0\frac{1-\tau_0}{\tau_0}\right\} \le r \le 1. \tag{13}$$

Из соотношения (12) подстановка

$$(1-\tau_0)(z-1) = \frac{\tau_0 \ln r}{\nu_0} + 0_p(1) \tag{14}$$

в соотношение (9) приводит к представлению

$$R = \left(\frac{1}{1-\frac{\ln r}{\nu_0}}\right)^{\nu_0} + 0_p(1),\ \exp\left(-\nu_0\frac{1-\tau_0}{\tau_0}\right) \le r \le 1. \tag{15}$$

Итак, при справедливости гипотезы Γ_2 в первом квадранте плоскости (r, R) будет наблюдаться график кривой в окрестности одной из кривых каталога кривых, определяемого главной частью соотношения (15), см.рис.1.

Далее предположим, что поведение $"\pi - \pi"$ графика данных y реализуется согласно модели формулы (15).

В соответствии с "решающим правилом графического анализа" (см.§2.2 в разделе "Графические методы статистического анализа данных") кривую типа (15) с помощью преобразования (16)

$$\begin{cases} \tilde{R} = \exp\{\nu_0(1 - R^{-\frac{1}{\nu_0}})\} \\ \tilde{r} = r \end{cases} \tag{16}$$

распрямим, превратив в биссектрису первого координатного угла. Если при $n \to \infty$ и при подстановке в соотношение (16) вместо ν_0 и τ_0 их состоятельных оценок $\hat{\nu}_n$ и $\hat{\tau}_n$ преобразованный $"\pi - \pi"$ график данных y будет лежать в окрестности биссектрисы, это будет свидетельствовать в пользу справедливости гипотезы Γ_2 .

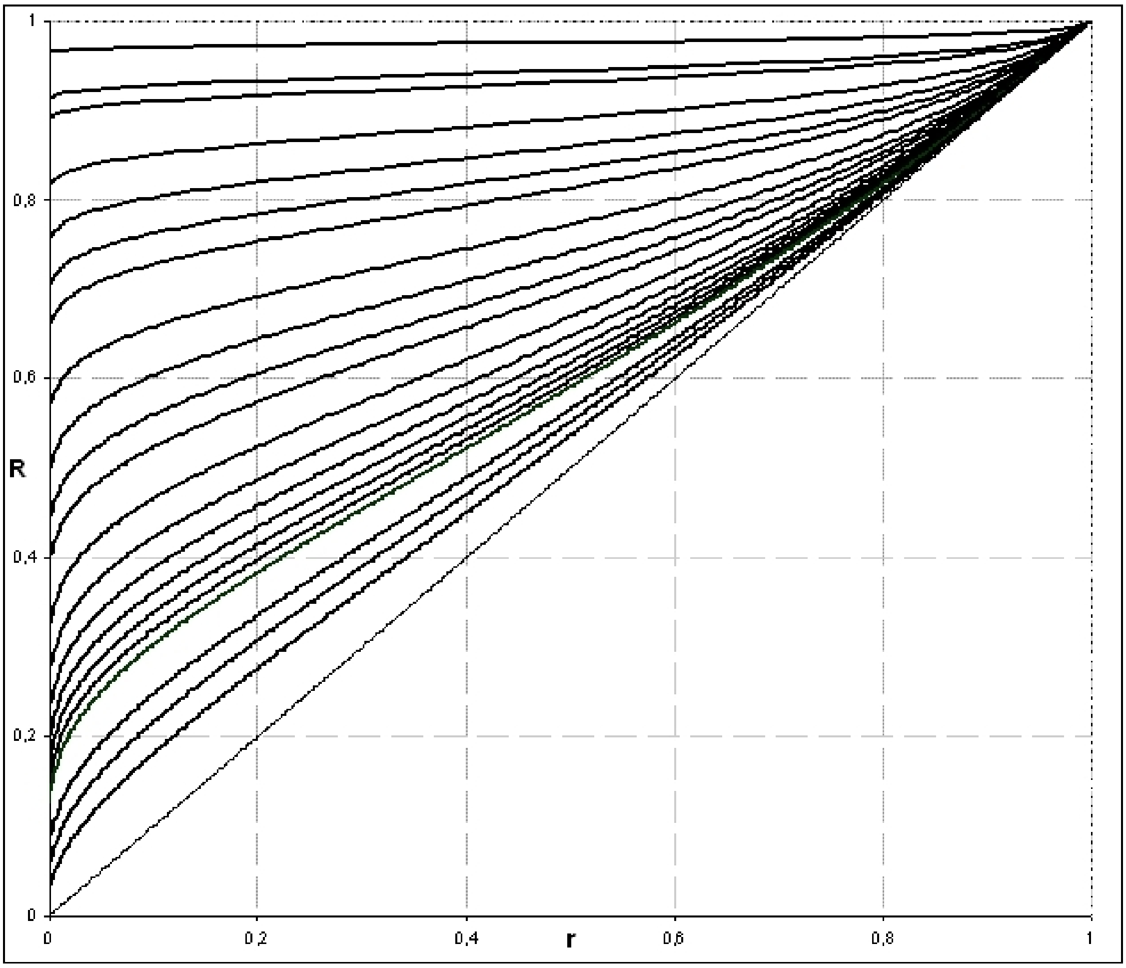

Рис. 1: Графический каталог предельных "$\pi - \pi$" графиков типа (5) и (15) в задаче проверки гипотезы пуассоновости выборки против ее отрицательной биномиальности.