Распределения Неймана типа А.

1. Обозначение семейства распределений.

$$\mathcal{ANEYM}$$

2. Параметрическое пространство.

$\Theta = \{\theta = (\theta_1, \theta_2)^T : \theta_1 > 0, \theta_2 > 0\}$.

3. Интерпретация и области применения.

Распределения Неймана типа A используются в страховой сфере (в страховании "не жизни") для статистического описания числа страховых случаев.

4. Обозначение и область значений случайной величины.

$$ANEYM(\theta_1, \theta_2) \in N$$

5. Стохастические представления и тождества.

5.1. *Представление в виде составной случайной величины.*
Пусть

$$\nu \stackrel{d}{=} POIS(\theta_1), \quad (1)$$

$$\xi_i \stackrel{d}{=} POIS(\theta_2), \quad i = 1, 2, \dots. \quad (2)$$

Если ν и последовательность случайных величин $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ независимы в совокупности, то

$$ANEYM(\theta_1, \theta_2) \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i. \quad (3)$$

5.2. *Модель смешанного распределения.* Пусть

$$\eta | \tau \stackrel{d}{=} POIS(\theta_2 \tau), \quad (4)$$

где τ – случайная величина, $\tau \in N$,

$$\tau \stackrel{d}{=} POIS(\theta_1). \quad (5)$$

Тогда безусловным распределением случайной величины η является распределение Неймана типа А,

$$\eta \stackrel{d}{=} ANEYM(\theta_1, \theta_2). \quad (6)$$

Это следует из того, что

$$\Pi(z; \eta) = \exp\{\theta_1(e^{\theta_2(z-1)} - 1)\} = \Pi(z; ANEYM(\theta_1, \theta_2)), \quad (7)$$

см. п.7.3

5.3. Пусть $\nu_1, \dots, \nu_r$ – независимые случайные величины,

$$\nu_i = POIS(\theta_{1i}), \quad i = \overline{1, r}. \quad (8)$$

Далее, пусть последовательность $\{\xi_{ij}; \quad i = \overline{1, r}, \quad j = 1, 2 \dots\}$ н.о.р. случайных величин такова, что

$$\xi_{11} = POIS(\theta_2). \quad (9)$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\nu_i} \xi_{ij} \stackrel{d}{=} ANEYM\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_{1i}, \theta_2\right) \quad (10)$$

6. Функция распределения и плотность распределения.

6.1.

$$\mathcal{L}(ANEYM(\theta_1,\theta_2) = \mathcal{ANEYM}(r;\theta_1,\theta_2)), \quad r = 0, 1, \ldots . \tag{11}$$

6.2.

$$\mathcal{L}'(ANEYM(\theta_1,\theta_2) = aneym(r;\theta_1,\theta_2)), \quad r = 0, 1, \ldots . \tag{12}$$

6.2.1. *Рекуррентное представление вероятностей.*
Пусть $aneym(r;\theta_1,\theta_2) = \pi_r$, $r = 0, 1, \ldots .$
Тогда

$$\pi_r = \frac{\theta_1}{r}\sum_{j=1}^{r} j q_j \pi_{r-j}, \quad r = 1, 2, \ldots , \tag{13}$$

$$\pi_0 = \exp\{-\theta_1(1 - q_0)\}. \tag{14}$$

Пуассоновские вероятности

$$q_r = \frac{\theta_2^r \exp\{-\theta_2\}}{r!}, \quad r = 0, 1, \ldots \tag{15}$$

удобно вычислять рекурсивно

$$q_r = \frac{\theta_2}{r} q_{r-1}, \quad r = 1, 2, \ldots , \tag{16}$$

$$q_0 = \exp\{-\theta_2\}. \tag{17}$$

7. Характеристические преобразования распределений.

7.1. Характеристическая функция.

7.2. Производящая функция моментов.

7.3. Производящая функция.

$$\Pi(z) = \exp\{\theta_1(e^{\theta_2(z-1)} - 1)\}, \quad |z| \le 1. \tag{18}$$

8. Моментные характеристики случайной величины.

8.1. Начальные моменты.

$$a_1 = \theta_1\theta_2. \tag{19}$$

8.2. Центральные моменты.

$$m_2 = \theta_1\theta_2(1 + \theta_2), \tag{20}$$

$$m_3 = \theta_1\theta_2(1 + 3\theta_2 + \theta_2^2), \tag{21}$$

$$m_4 = \theta_1\theta_2(1 + 7\theta_2 + 6\theta_2^2 + 3\theta_1\theta_2(1 + \theta_2)^2 + \theta_2^3). \tag{22}$$

8.3. Факториальные моменты.

8.4. Семиинварианты.

8.5. Коэффициенты асимметрии и эксцесса.

$$\gamma_1 = \frac{1 + 3\theta_2 + \theta_2^2}{(\theta_1\theta_2)^{\frac{1}{2}}(1 + \theta_2)^{3/2}}, \tag{23}$$

$$\gamma_2 = \frac{1 + 7\theta_2 + 6\theta_2^2 + \theta_2^3}{\theta_1\theta_2(1 + \theta_2)^2}. \tag{24}$$

Замечание. Коэффициент асимметрии γ_1, выраженный через a_1 и m_2, выглядит следующим образом

$$\gamma_1 = \frac{3m_2 - 2a_1 + \frac{(m_2-a_1)^2}{a_1}}{m_2^{3/3}}. \tag{25}$$

Из последнего выражения следует, что асимметрия распределения Неймана типа А меньше асимметрии отрицательно-биноминального распределения.

9. Информационные функции.

10. Достаточные статистики.

11. Аналитические свойства распределений.

11.1. При определенном соотношении между θ_1 и θ_2 плотность распределения может иметь более одной модели.

11.2. Семейство распределений $\mathcal{ANEYM}$ принадлежит классу бесконечно делимых распределений (см. п. 5.3)

12. Статистические выводы.

13. Моделирование случайной величины.

Библиография

Панжер, Уилмот(1992)