

О вычислении оценок параметра θ по методу моментов

Как известно (см. раздел "Распределение Хофмана (одномерное)"), распределение из семейства Хофмана определяется производящей функцией вида

$$\pi_{\mathcal{H}}(z; \alpha, \beta, \gamma) = \exp(-\psi(t(1-z))); \alpha, \beta, \gamma, \quad (1)$$

где $\theta = (\alpha, \beta, \gamma)$ и $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma \geq 0$,

$$\psi(t; \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} \alpha t, & \text{если } \gamma = 0, \\ \frac{\alpha}{\beta(1-\gamma)} ((1 + \beta t)^{1-\gamma} - 1), & \text{если } \gamma \neq 1, \\ \frac{\alpha}{\beta} \ln(1 + \beta t), & \text{если } \gamma = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Всюду дальше полагаем, что $t = 1$. Для вычисления оценок $\hat{\theta}_n$ параметра θ_0 по методу моментов удобнее всего использовать систему, основанную на факториальных моментах. Это верно не только для семейства распределений Хофмана, но и для любых семейств смешанных пуассоновских распределений.

Напомним, что факториальный момент порядка " r " определяется, как

$$f_r = \mathbf{E}\{y_1(y_1 - 1), \dots, (y_1 - r + 1); \theta_0\}, \quad (3)$$

а его эмпирическая оценка, как

$$\hat{f}_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{y_i(y_i - 1), \dots, (y_i - r + 1)\}. \quad (4)$$

Здесь r – целое число.

Если положить

$$\nu_j = \sum_{i=1}^n 1(y_i = j), \quad (5)$$

т. е. числу наблюдений принявших значение j , $j = 0, 1, 2, \dots$, то получим

$$\hat{f}_r = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{\infty} \{j(j-1) \dots (j-r+1)\} \nu_j \quad (6)$$

Заметим, что

$$f_r = (\pi_{\mathcal{H}}(z; \alpha, \beta, \gamma))_{z=1}^{(r)} \quad (7)$$

В частности,

$$\begin{aligned} f_1 &= \mathbf{E}\{y_1; \theta_0\} = a_1 = \alpha, \\ f_2 &= \alpha^2 + \alpha\beta\gamma, \\ f_3 &= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta\gamma + \alpha\beta^2\gamma(\gamma + 1). \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом соотношений (6) и 8) система по методу моментов приобретает вид

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_n = \bar{y}_n, \\ \hat{\alpha}_n^2 + \hat{\alpha}_n \hat{\beta}_n \hat{\gamma}_n = \hat{f}_2, \\ \alpha^3 + 3\alpha^2\beta\gamma + \alpha\beta^2\gamma(\gamma + 1) = \hat{f}_3. \end{cases} \quad (9)$$

Решение системы выглядит так:

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_n = \bar{y}_n, \\ \hat{\beta}_n = \frac{\bar{y}_n \hat{f}_3 - \bar{y}_n^2 \hat{f}_2 - \hat{f}_2^2 + \bar{y}_n^4}{\bar{y}_n (\hat{f}_2 - \bar{y}_n^2)}, \\ \hat{\gamma}_n = \frac{(\hat{f}_2 - \bar{y}_n^2)^2}{\bar{y}_n \hat{f}_3 - \bar{y}_n^2 \hat{f}_2 - \hat{f}_2^2 + \bar{y}_n^4} \end{cases} \quad (10)$$

Заметим, что когда параметр γ_0 фиксирован (за исключением случаев $\gamma \neq 0$ и $\gamma \neq 1$), то решение имеет вид:

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_n = \bar{y}_n, \\ \hat{\beta}_n = \frac{b-a^2}{a\gamma}. \end{cases} \quad (11)$$

