Распределение Хофмана (одномерное).

1. **Обозначение семейства распределений**: $\mathcal{HOFM}$.

2. **Параметрическое пространство**.

$$\Theta = \{\theta = (\alpha, \beta, \gamma)^T, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma \geq 0\},$$

t – фиксированный момент времени.

3. **Обозначение и область значений случайной величины**.

$$HOFM(\alpha, \beta, \gamma; t) \in \mathsf{N}_+.$$

При $t = 1$ положим $HOFM(\alpha, \beta, \gamma, 1) = HOFM(\alpha, \beta, \gamma)$.

4. **О вероятностях семейства распределений**

4.1. Функциональный вид вероятностей

$$\mathbf{P}\{HOFM(\alpha, \beta, \gamma; t) = k\} = hofman(k; \alpha, \beta, \gamma; t), \quad k \in \mathsf{N}_+,$$

определяются на основе значений производящей функции (см.п.7, формула (36)). При $t = 1$

$$hofman(k; \alpha, \beta, \gamma; 1) = hofman(k; \alpha, \beta, \gamma), \quad k \in \mathsf{N}_+.$$

Далее,

$$hofman(0; \alpha, \beta, \gamma; t) = \exp\{-\psi(t; \alpha, \beta, \gamma)\}, \tag{1}$$

где

$$\psi(t; \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} \alpha t & \text{при} \quad \gamma = 0, \\ \frac{\alpha}{\beta(1-\gamma)}((1+\beta t)^{1-\gamma} - 1) & \text{при} \quad \gamma \neq 1, \\ \frac{\alpha}{\beta} \ln(1+\beta t) & \text{при} \quad \gamma = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Для $k = 1, 2, \ldots$

$$hofman(k; \alpha, \beta, \gamma; t) = (-1)^k \frac{t^k}{k!} \frac{d^k}{dt^k} \{\exp\{-\psi(t; \alpha, \beta, \gamma)\}\}. \tag{3}$$

Положим $hofman(k; \alpha, \beta, \gamma; t) = h(k)$. Справедливо следующее рекуррентное соотношение

$$(k+1)h(k+1) = \frac{\alpha t}{(1+\beta t)^\gamma} \sum_{i=0}^{k} \frac{\Gamma(i+\gamma)}{\Gamma(\gamma) i!} \left(\frac{\beta t}{1+\beta t}\right)^i h(k-i) \tag{4}$$

Заметим, что представление для $\psi(t; \alpha, \beta, \gamma)$ в форме (2) справедливо и в форме

$$\psi(t; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha t}{\beta t(1-\gamma)}((1+\beta t)^{1-\gamma} - 1)^\gamma, \tag{5}$$

если неопределенность при $\gamma = 1$ в соотношении (5) доопределять, в соответствии с правилом Лейбница, как

$$\psi(t; \alpha, \beta, 1) \equiv \frac{\alpha}{\beta} \ln(1 + \beta t).$$

Из представлений (2) и (5) следует, что если какая либо формула или утверждение получено для $t = 1$ и (α, β, γ), то оно автоматически переносится на произвольное t, если сделать при этом подстановку: параметр (α, β, γ) заменить на $(\alpha t, \beta t, \gamma)$.

4.2. Приведем явные выражения для $h(k)$ $(k = \overline{0,7})$. В случае $\gamma \neq 1$ и $t = 1$ имеем:

$$h(0) = \exp\left\{-\frac{\alpha}{\beta(1-\gamma)}((1+\beta)^{1-\gamma} - 1)\right\}, \tag{6}$$

$$h(1) = \frac{\alpha}{(1+\beta)^{\gamma}} h(0), \tag{7}$$

$$h(2) = \left\{\frac{\alpha^2 + \alpha\gamma\beta(1+\beta)^{\gamma-1}}{2!(1+\beta)^{2\gamma}}\right\} h(0), \tag{8}$$

$$h(3) = \left\{\frac{\alpha^3 + 3\alpha^2\gamma\beta(1+\beta)^{\gamma-1} + \alpha\gamma(\gamma+1)\beta^2(1+\beta)^{2(\gamma-1)}}{3!(1+\beta)^{3\gamma}}\right\} h(0), \tag{9}$$

$$\begin{aligned} h(4) = & \left\{\frac{\alpha^4 + 3\alpha^3\gamma\beta(1+\beta)^{\gamma-1} + 3\alpha^3\gamma\beta(1+\beta)^{2(\gamma-1)} + 4\alpha^2\gamma(\gamma+1)\beta^2(1+\beta)^{2(\gamma-1)}}{4!(1+\beta)^{4\gamma}} +\right. \\ + & \left.\frac{3\alpha^2\gamma^2\beta^2(1+\beta)^{2(\gamma-1)} + \alpha\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\beta^3(1+\beta)^{3(\gamma-1)}}{4!(1+\beta)^{4\gamma}}\right\} h(0), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} h(5) = & \left\{\frac{\alpha^5 + 7\alpha^4\gamma\beta(1+\beta)^{\gamma-1} + 3\alpha^4\gamma\beta(1+\beta)^{2(\gamma-1)} + 10\alpha^3\gamma(\gamma+1)\beta^2(1+\beta)^{2(\gamma-1)}}{5!(1+\beta)^{5\gamma}} +\right. \\ + & \frac{15\alpha^3\gamma^2\beta^2(1+\beta)^{2(\gamma-1)} + 5\alpha^2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\beta^3(1+\beta)^{3(\gamma-1)}}{5!(1+\beta)^{5\gamma}} + \\ + & \left.\frac{10\alpha^2\gamma^2(\gamma+1)\beta^3(1+\beta)^{3(\gamma-1)} + \alpha\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)\beta^4(1+\beta)^{4(\gamma-1)}}{5!(1+\beta)^{5\gamma}}\right\} h(0), \end{aligned} \tag{11}$$

$$
\begin{aligned}
h(6) \;=\;& \left\{\frac{\alpha^6+3\alpha^5\gamma\beta(1+\beta)^{2(\gamma-1)}+12\alpha^5\gamma\beta(1+\beta)^{\gamma-1}+20\alpha^4\gamma(\gamma+1)\beta^2(1+\beta)^{2(\gamma-1)}}{6!(1+\beta)^{6\gamma}}+\right.\\
+\;& \frac{15\alpha^4\gamma^2\beta^2(1+\beta)^{3(\gamma-1)}+30\alpha^4\gamma^2\beta^2(1+\beta)^{2(\gamma-1)}}{6!(1+\beta)^{6\gamma}}+\\
+\;& \frac{15\alpha^3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\beta^3(1+\beta)^{3(\gamma-1)}+60\alpha^3\gamma^2(\gamma+1)\beta^3(1+\beta)^{3(\gamma-1)}}{6!(1+\beta)^{6\gamma}}+\\
+\;& \frac{15\alpha^3\gamma^3\beta^3(1+\beta)^{3(\gamma-1)}+6\alpha^2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)\beta^4(1+\beta)^{4(\gamma-1)}}{6!(1+\beta)^{6\gamma}}+\\
+\;& \frac{15\alpha^2\gamma^2(\gamma+1)(\gamma+2)\beta^4(1+\beta)^{4(\gamma-1)}+10\alpha^2\gamma^2(\gamma+1)^2\beta^4(1+\beta)^{4(\gamma-1)}}{6!(1+\beta)^{6\gamma}}+\\
+\;& \left.\frac{\alpha\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)\beta^5(1+\beta)^{5(\gamma-1)}}{6!(1+\beta)^{6\gamma}}\right\}h(0),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
& h(7) =\\
=\;& \left\{\frac{\alpha^7+3\alpha^6\gamma\beta(1+\beta)^{2(\gamma-1)}+18\alpha^6\gamma\beta(1+\beta)^{\gamma-1}+35\alpha^5\gamma(\gamma+1)\beta^2(1+\beta)^{2(\gamma-1)}}{7!(1+\beta)^{7\gamma}}+\right.\\
+\;& \frac{33\alpha^5\gamma^2\beta^2(1+\beta)^{3(\gamma-1)}+72\alpha^5\gamma^2\beta^2(1+\beta)^{2(\gamma-1)}}{7!(1+\beta)^{7\gamma}}+\\
+\;& \frac{35\alpha^4\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\beta^3(1+\beta)^{3(\gamma-1)}+45\alpha^4\gamma^2(\gamma+1)\beta^3(1+\beta)^{4(\gamma-1)}}{7!(1+\beta)^{7\gamma}}+\\
+\;& \frac{165\alpha^4\gamma^2(\gamma+1)\beta^3(1+\beta)^{3(\gamma-1)}+105\alpha^4\gamma^3\beta^3(1+\beta)^{3(\gamma-1)}}{7!(1+\beta)^{7\gamma}}+\\
+\;& \frac{21\alpha^3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)\beta^4(1+\beta)^{4(\gamma-1)}}{7!(1+\beta)^{7\gamma}}+\\
+\;& \frac{105\alpha^3\gamma^2(\gamma+1)(\gamma+2)\beta^4(1+\beta)^{4(\gamma-1)}+70\alpha^3\gamma^2(\gamma+1)^2\beta^4(1+\beta)^{4(\gamma-1)}}{7!(1+\beta)^{7\gamma}}+\\
+\;& \frac{105\alpha^3\gamma^3(\gamma+1)\beta^4(1+\beta)^{4(\gamma-1)}+7\alpha^2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)\beta^5(1+\beta)^{5(\gamma-1)}}{7!(1+\beta)^{7\gamma}}+\\
+\;& \frac{21\alpha^2\gamma^2(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)\beta^5(1+\beta)^{5(\gamma-1)}}{7!(1+\beta)^{7\gamma}}+\\
+\;& \frac{35\alpha^2\gamma^2(\gamma+1)^2(\gamma+2)\beta^5(1+\beta)^{5(\gamma-1)}}{7!(1+\beta)^{7\gamma}}+\\
+\;& \left.\frac{\alpha\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)(\gamma+5)\beta^6(1+\beta)^{6(\gamma-1)}}{7!(1+\beta)^{7\gamma}}\right\}h(0).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

При $\gamma = 0$

$$\mathcal{L}'(HOFM(\alpha,\beta,0;t)) = \mathcal{L}'(POIS(\alpha t)), \tag{14}$$

при $\gamma = 1$

$$\mathcal{L}'(HOFM(\alpha,\beta,1;t)) = \mathcal{L}'\left(NBIN\left(\frac{\alpha}{\beta},\frac{1}{1+\beta t}\right)\right), \tag{15}$$

при $\gamma = \frac{1}{2}$

$$\mathcal{L}'(HOFM(\alpha, \beta, \frac{1}{2}; t)) = \mathcal{L}'\left(POIS/INVG\left(\frac{2\alpha}{\beta}, \beta t\right)\right), \tag{16}$$

при $\gamma = 2$

$$\mathcal{L}'(HOFM(\alpha, \beta, 2; t)) = \mathcal{L}'\left(POLAEP\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta t}{1+\beta t}\right)\right). \tag{17}$$

5. Интерпретация и области применения.

Семейство распределений Хофмана ([1], [2]) используются при моделировании частоты страховых случаев в автостраховании [3] и в других видах страхования "не - жизни" , [4]. Это богатое семейство распределений в качестве частных случаев включает в себя *пуассоновское* (*при* $\gamma = 0$), *отрицательно биноминальное* (*при* $\gamma = 1$), *пуассон-обратно гауссовское* (при $\gamma = 0.5$), распределения *Пойа-Аэпли* (при $\gamma = 2$), соответствующая параметризация представлена в (14), (15), (16) и (17). При $\gamma \to \infty, \beta \to 0, \gamma\beta \to const$ оно сходится к распределению *Неймана типа А*. Распределения семейства Хофмана являются бесконечно делимыми. Они допускают представления, с одной стороны, как смеси распределений пуассоновских случайных величин, а с другой как распределения составного пуассоновского процесса.

6. Стохастические представления и тождества.

6.1. Представление в виде составного распределения (в виде случайного числа случайных слагаемых)

Пусть t – фиксированный момент времени,

$$\nu(t) \stackrel{d}{=} POIS(\psi(t; \alpha, \beta, \gamma)).$$

Рассмотрим последовательность н.о.р. случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ такова, что $\mathbf{P}\{\xi_1 = 0\} = 0$,

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi_1 = r\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 = r-1\}} = a + \frac{b}{r}, \quad r > 1, \quad r - \text{целые}, \tag{18}$$

т.е. $\xi_i \in D(a, b, 1)$. Положим

$$a = \frac{\beta t}{1+\beta t}, \quad b = (\gamma - 2)\frac{\beta t}{1+\beta t}. \tag{19}$$

Предположим, что пуассоновский процесс $\nu(t)$ и случайные величины $\xi_i, \quad i = 1, 2, \ldots$, независимы. Тогда $HOFM(\alpha, \beta, \gamma; t) \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\nu(t)} \xi_i$, причем $HOFM(\alpha, \beta, \gamma; t) = 0$ при $\nu(t) = 0$. Обратим внимание, что на самом деле $\xi_i = \xi_i(t)$! При $\gamma = 0$ вероятности

$$\begin{cases} \mathbf{P}\{\xi_1 = 1\} = 1, \\ \mathbf{P}\{\xi_1 = r\} = 0 \quad \text{для } r = 2, 3, \ldots; \end{cases} \tag{20}$$

при $\gamma > 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{P}\{\xi_1 = 1\} = \frac{(\gamma-1)\beta t}{(1+\beta t)^\gamma-(1+\beta t)}, \\ \mathbf{P}\{\xi_1 = r\} = \frac{(\gamma-1)(\beta t)^r}{\{(1+\beta t)^\gamma-(1+\beta t)\}(1+\beta t)^{r-1}} \prod\limits_{j=2}^{r}(1+\frac{\gamma-2}{j}) \quad \text{для } r=2,3,\ldots. \end{array}\right. \tag{21}$$

6.2. Представление в виде смеси пуассоновских распределений

6.2.1. Предположим, что $\mathcal{K}$ – случайная величина с функцией распределения

$$\mathcal{L}(\mathcal{K}) = V(\varkappa), \quad \varkappa > 0. \tag{22}$$

Пусть при $\mathcal{K} = \varkappa$ условное распределение случайной величины $N(t)$ имеет вид

$$\{N(t)|\mathcal{K} = \varkappa\} = N(t;\varkappa) \stackrel{d}{=} POIS(\varkappa t). \tag{23}$$

Если преобразованием Лапласа функции распределения $V(\varkappa)$ является

$$\lambda(s;\mathcal{K}) = \exp\{-\psi(s;\alpha,\beta,\gamma)\}, \tag{24}$$

т.е.

$$\lambda(s;\mathcal{K}) = hofm(0;\alpha,\beta,\gamma;s), \tag{24$'$}$$

то случайная величина $N(t)$, безусловные вероятности которой представляются в виде

$$\mathbf{P}\{N(t) = k\} = \int\limits_0^\infty \frac{(\varkappa t)^k e^{-\varkappa t}}{k!} dV(\varkappa), \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{25}$$

является случайной величиной Хофмана, [4].

6.2.2. Свойства смешивающей функции $V(\varkappa)$

Из соотношения (21) получаем

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{E}\{\mathcal{K};\theta\} = \alpha, \\ \mathbf{D}\{\mathcal{K};\theta\} = \alpha\beta\gamma. \end{array}\right. \tag{26}$$

Производящая функция семинвариантов для случайной величины $\mathcal{K}$ определяется как

$$\ln E\{e^{s\mathcal{K}};\theta\} = \ln h(0;\alpha,\beta,\gamma;-s) = -\psi(-s;\alpha,\beta,\gamma). \tag{27}$$

Из равенства (27) получаем параметрическое представление для семинвариантов

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha t, \\ k_r &= \alpha t(\beta t\gamma)^{r-1}\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\left(1+\frac{2}{\gamma}\right)\ldots\left(1+\frac{r-2}{\gamma}\right) \quad \text{для} \quad r \geq 2. \end{aligned} \tag{28}$$

Равенство (24) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно $V(\cdot)$, а именно

$$\int\limits_0^\infty e^{-s\varkappa} dV(\varkappa) = \exp\{-\psi(s;\alpha,\beta,\gamma)\}. \tag{29}$$

Как показано в работе [5]

$$\begin{aligned} V(\varkappa) &= V(\varkappa;\alpha,\beta,\gamma) = \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\varkappa} \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta(1-\gamma)}{\alpha}\right)^{1-\gamma}\left\{\exp\left(\frac{\alpha}{\beta(1-\gamma)}-\frac{x}{\beta t}\right)\right\}\times \\ &\times \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma(r(1-a)-1)}{r!}(-1)^{r-1}\left(\frac{x}{\beta t}\left(\frac{\beta(1-\gamma)}{\alpha}\right)^{1-\gamma}\right)^{-(r(1-\gamma)-1)}\times \\ &\times \sin((1-\gamma)r\pi)dx. \end{aligned} \tag{30}$$

В общем случае функция распределения (30) весьма сложна. Однако, если $\gamma=1$, то

$$\mathcal{L}(\mathcal{K})=\mathcal{L}\left(G\left(\frac{\alpha}{\beta},\beta\right)\right), \tag{31}$$

т.е. априорное распределение принадлежит семейству гамма распределений. Далее, если, например, $\gamma=\frac{1}{2}$, то

$$\mathcal{L}(\mathcal{K})=\mathcal{L}\left(INVG\left(\frac{2\alpha}{\beta},\alpha\right)\right), \tag{32}$$

т.е. априорное распределение $V(\varkappa)$ принадлежит семейству обратно-гауссовских распределений.

6.3. Пусть $HOFM(\alpha,\beta,\gamma;t)$ независимы, $\alpha_i>0$, $i=1,2$.

Тогда $HOFM(\alpha_1,\beta,\gamma;t)+HOFM(\alpha_2,\beta,\gamma;t)\overset{d}{=}HOFM(\alpha_1+\alpha_2,\beta,\gamma;t)$.

7. Характеристические преобразования распределений

7.1. Производящая функция

Пусть $N(t)\overset{d}{=}HOFM(\alpha,\beta,\gamma;t)$

$$\begin{aligned} \pi(z) &= \pi(z;N(t);\alpha,\beta,\gamma;t) = \\ &= E\{z^{N(t)};\alpha,\beta,\gamma;t\}=\exp\{-\psi(t(1-z);\alpha,\beta,\gamma)\}. \end{aligned} \tag{33}$$

В частности, при $\gamma=0$ (пуассоновский случай)

$$\pi(z)=\exp\{-\alpha t(1-z)\}, \tag{34}$$

при $\gamma=1$ (отрицательно - биноминальный случай)

$$\pi(z)=\left(\frac{1}{1+\beta t(1-z)}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}, \tag{35}$$

при $\gamma=2$ (случай Пойа - Иппли распределенности)

$$\pi(z)=\exp\left\{\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{1+\beta t(1-z)}-1\right)\right\}, \tag{36}$$

при $\gamma=\frac{1}{2}$ (случай Пуассон/обратногауссовской распределенности)

$$\pi(z)=\exp\left\{\frac{2\alpha}{\beta}\left(1-\sqrt{1+\beta t(1-z)}\right)\right\}, \tag{37}$$

при $\gamma \to \infty, \beta \to \infty, \gamma\beta \to \infty$ (случай сходимости к распределению Неймана типа А)

$$\pi(z) \to \exp\left\{-\frac{\alpha}{\nu}\left(1 - \exp \nu t(1-z)\right)\right\}. \tag{38}$$

7.2. Производящая функция моментов

$$M(s) = M(s; N(t)) = E \exp\{sN(t)\} = \exp\{-\psi(t(1-e^s); \alpha, \beta, \gamma)\}. \tag{39}$$

8. Моментные характеристики случайной величины Хофмана при $\gamma \neq 1$ [1]

8.1. Начальные моменты

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha t, \\ a_2 &= \alpha^2 t^2 + \alpha\beta\gamma t^2 + \alpha t, \\ a_3 &= \alpha^3 t^3 + 3\alpha^2\beta\gamma t^3 + 2\beta^2\gamma(\gamma+1)t^3 + 3\alpha^2 t^2 + 3\alpha\beta\gamma t^2 + \alpha t. \end{aligned} \tag{40}$$

8.2. Центральные моменты

$$m_2 = \alpha\beta\gamma t^2 + \alpha t \tag{41}$$

8.3. Факториальные моменты.

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha t, \\ f_2 &= \alpha^2 t^2 + \alpha\beta\gamma t^2, \\ f_3 &= \alpha^3 t^3 + 3\alpha^2\beta\gamma t^3 + \alpha\beta^2\gamma(\gamma+1)t^3. \end{aligned} \tag{42}$$

9. Информационные функции

10. Аналитические свойства семейства распределений

10.1. Бесконечная делимость

Из соотношения (33) следует, что при целых $n > 0$

$$\left(\pi\left(z; N(t); \frac{\alpha}{n}, \beta, \gamma; t\right)\right)^n = \pi(z; N(t); \alpha, \beta, \gamma; t), \tag{43}$$

т.е. семейство $\mathcal{HOFM}$ принадлежит классу бесконечно делимых распределений.

10.2. Из раздела 6.1 следует, что семейство $\mathcal{HOFM}$ принадлежит классу семейств распределений, порождаемых стохастической моделью "случайного числа случайных величин".

10.3. Из раздела 6.2 следует, что семейство $\mathcal{HOFM}$ принадлежит классу смешанных семейств распределений.

[1] Моменты распределения Хофмана при $\gamma = 1$ в соответствии с равенством (15) можно получить на основе п. 8 раздела "Отрицательно биноминальное распределение."

11. Моделирование случайной величины Хофмана

Алгоритм H_1 **.**

Он основан на представлении случайной величины $HOFM(\alpha, \beta, \gamma; t)$ в виде случайного числа случайных величин (см. пункт 6.1), т.е.

$$HOFM(\alpha, \beta, \gamma; t) \stackrel{d}{=} \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\nu(t)} \xi_i, & \text{если } \nu(t) > 0, \\ 0, & \text{если } \nu(t) = 0, \end{cases} \tag{44}$$

в предположении, что $\gamma > 0$.

В соотношении (44)

$$\nu(t) \stackrel{d}{=} POIS(\psi(t; \alpha, \beta, \gamma)). \tag{45}$$

После реализации значения $\nu(t)$ (см.[6] раздел 11 параграфа "Пуассоновское распределение") порождаются $\nu(t)$ независимых реализаций случайных величин ξ_i, принимающих значения из N с вероятностями

$$\begin{cases} \mathbf{P}\{\xi_1 = 1\} = \frac{(\gamma-1)\beta t}{(1+\beta t)^{\gamma} - (1+\beta t)}, \\ \mathbf{P}\{\xi_1 = r\} = \frac{(\gamma-1)(\beta t)^r}{\{(1+\beta t)^{\gamma} - (1+\beta t)\}(1+\beta t)^{r-1}} \prod\limits_{j=2}^{r} (1 + \frac{\gamma-2}{j}) \quad \text{для } r = 2, 3, \ldots. \end{cases} \tag{46}$$

При $\gamma = 0$ вероятности

$$\begin{cases} \mathbf{P}\{\xi_1 = 1\} = 1, \\ \mathbf{P}\{\xi_1 = r\} = 0 \quad \text{для } r = 2, 3, \ldots, \end{cases} \tag{47}$$

т.е. речь идет о моделировании пуассоновской случайной величины с параметром αt.

Алгоритм H_2 **.**

Пусть

$$\begin{cases} \mathbf{P}\{N(\alpha, \beta, \gamma; t) \le r\} = \mathcal{HOFM}(r; \alpha, \beta, \nu; t) = \\ = \sum\limits_{i=0}^{r} hofm(i; \alpha, \beta, \gamma; t) = \sum\limits_{i=0}^{r} h(i), \ \ r = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{48}$$

Положим

$$U \stackrel{d}{=} U(0, 1). \tag{49}$$

Тогда

$$HOFM(\alpha, \beta, \gamma; t) = \begin{cases} 0, & \text{если } U \le h(0), \\ r, & \text{если } \mathcal{HOFM}(r-1; \alpha, \beta, \gamma; t) < U \le \\ & \quad \le \mathcal{HOFM}(r; \alpha, \beta, \gamma; t), \\ & \quad r = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{50}$$

12. Статистические выводы

Пусть $y = (y_i, \dots, y_n)^T$, $y_i \in \mathsf{N}_+$, y_i – н.о.р. случайные величины,

$$y_1 \overset{d}{=} HOFM(\alpha, \beta, \gamma).$$

12.1. Семейство распределений $\mathcal{HOFM}$ не принадлежит классу семейств экспоненциального типа. Достаточной статистикой для него является вариационный ряд выборки.

12.2. Точечные оценивания

12.2.1. Оценки максимума правдоподобия

Пусть

$$l(\alpha, \beta, \gamma; y) = \ln \prod_{i=1}^{n} \ln hofm(y_i; \alpha, \beta, \gamma) \tag{51}$$

функция правдоподобия. Уравнение максимума правдоподобия

$$grad_{(\alpha,\beta,\gamma)^T} l(\check{\alpha}, \check{\beta}, \check{\gamma}; y) = 0 \tag{52}$$

в явном виде относительно $\check{\theta} = (\check{\alpha}, \check{\beta}, \check{\gamma})^T$ не разрешается. Рекомендуется воспользоваться для получения приближенного решения системы (52) методом Ньютона-Рафсона. В качестве нулевого приближения можно взять оценки по методу факториальных моментов.

12.2.2. Оценки метода факториальных моментов (ОМФМ)

Вектор $(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3)^T$ из первых трех выборочных факториальных моментов

$$\begin{cases} \hat{f}_1 = \bar{y}_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n} i\nu_i, \\ \hat{f}_2 = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{r} i(i-1)\nu_i, \\ \hat{f}_3 = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{r} i(i-1)(i-2)\nu_i, \end{cases} \tag{53}$$

являются состоятельной и асимптотически нормальной оценкой вектора из соответствующих теоретических факториальных моментов, см. пункты 7 и 8:

$$\begin{cases} \hat{f}_1(\alpha, \beta, \gamma) = \pi'_z(1; \alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = \alpha_0, \\ \hat{f}_2(\alpha, \beta, \gamma) = \pi''_z(1; \alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = \alpha_0^2 + \alpha_0\beta_0\gamma_0, \\ \hat{f}_3(\alpha, \beta, \gamma) = \pi'''_z(1; \alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = \alpha_0^3 + 3\alpha_0^2\beta_0\gamma_0 + \alpha_0\beta_0^2\gamma_0(1+\gamma). \end{cases} \tag{54}$$

Система

$$(f_1(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n, \hat{\gamma}_n),\ f_2(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n, \hat{\gamma}_n),\ f_3(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n, \hat{\gamma}_n))^T = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3)^T \tag{55}$$

разрешима относительно $\hat{\theta}_n = (\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n, \hat{\gamma}_n)$:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_n &= \hat{f}_1 \\ \hat{\beta}_n &= \frac{\hat{f}_1^4 + \hat{f}_1\hat{f}_3 - \hat{f}_1^2\hat{f}_2 - \hat{f}_2^2}{\hat{f}_1(\hat{f}_2 - \hat{f}_1^2)} \\ \hat{\gamma}_n &= \frac{(\hat{f}_2 - \hat{f}_1^2)^2}{\hat{f}_1^4 + \hat{f}_1\hat{f}_3 - \hat{f}_1^2\hat{f}_2 - \hat{f}_2^2}. \end{aligned} \tag{56}$$

Оценка ОМФМ $(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n, \hat{\gamma}_n)^T$ является состоятельной и асимптотически нормальной оценкой порождающего параметра $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)^T$.

Список литературы

[1] Hofman M. Uber zusammengezetzte poisson-prozesse und ihre anwendungen. *Bulletin of Swiss Actuaries*, T(55):499–575, 1955.

[2] Kestoment R.M., Paris J. Sur l'ajustement du nombre de sinistres. *Bulletin of Swiss Actuaries*, 8(5):157–164, 1985.

[3] Walhin J.F., Paris J. The true claim amount and frequences distributions within a Bonus-Malus systems. *Astin Bulletin*, 30, 2:391–403, 2000.

[4] Panjer H., Willmot G. *Insurance Risk Models*. Society of Actuaries, 1992.

[5] Panjer H., Willmot G. Computational techniques in reinsurance models. *Transactions of the 22nd International Congress of Actuaries,Sydney*, (4):111–120, 1984.

[6] Чепурин Е.В. *Краткий справочник по вероятностным распределениям*. Электронная версия, 2015.