О вычислении оценок параметра θ по методу моментов

Как известно (см. раздел "Распределение Хофмана (одномерное)"), распределение из семейства Хофмана определяется производящей функцией вида

$$\pi_{\mathcal{H}}(z;\alpha,\beta,\gamma) = exp(-\psi(t(1-z));\alpha,\beta,\gamma),$$

где $\theta = (\alpha,\beta,\gamma)$ и $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma \geq 0$,

$$\psi(t;\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} \alpha t, \text{ если } \gamma = 0, \\ \\ \frac{\alpha}{\beta(1-\gamma)}\left((1+\beta t)^{1-\gamma} - 1\right), \text{ если } \gamma \neq 1, \\ \\ \frac{\alpha}{\beta}\ln(1+\beta t), \text{ если } \gamma = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Всюду дальше полагаем, что $t = 1$. Для вычисления оценок $\hat{\theta}_n$ параметра θ_0 по методу моментов удобнее всего использовать систему, основанную на факториальных моментах. Это верно не только для семейства распределений Хофмана, но и для любых семейств смешанных пуассоновских распределений.

Напомним, что факториальный момент порядка "r" определяется, как

$$f_r = \mathbf{E}\{y_1(y_1-1),\ldots(y_1-r+1);\theta_0\}, \tag{2}$$

а его эмпирическая оценка, как

$$\hat{f}_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{y_i(y_i-1),\ldots,(y_i-r+1)\}. \tag{3}$$

Здесь r – целое число.

Если положить

$$\nu_j = \sum_{i=1}^{n} 1(y_i = j), \tag{4}$$

т. е. числу наблюдений принявших значение j, $j = 0,1,2,\ldots$, то получим

$$\hat{f}_r = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\infty}\{j(j-1)\ldots(j-r+1)\}\nu_j \tag{5}$$

Заметим, что

$$f_r = (\pi_{\mathcal{H}}(z;\alpha,\beta,\gamma))^{(r)}_{z=1} \tag{6}$$

В частности,

$$\begin{aligned} f_1 &= \mathbf{E}\{y_1;\theta_0\} = a_1 = \alpha, \\ f_2 &= \alpha^2 + \alpha\beta\gamma, \\ f_3 &= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta\gamma + \alpha\beta^2\gamma(\gamma+1). \end{aligned} \tag{7}$$

С учетом соотношений (5) и 7) система по методу моментов приобретает вид

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_n = \bar{y}_n, \\ \hat{\alpha}_n^2 + \hat{\alpha}_n \hat{\beta}_n \hat{\gamma}_n = \hat{f}_2, \\ \alpha^3 + 3\alpha^2\beta\gamma + \alpha\beta^2\gamma(\gamma+1) = \hat{f}_3. \end{cases}$$

Решение системы выглядит так:

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_n = \bar{y}_n, \\ \\ \hat{\beta}_n = \frac{\bar{y}_n \hat{f}_3 - \bar{y}_n^2 \hat{f}_2 - \hat{f}_2^2 + \bar{y}_n^4}{\bar{y}_n(\hat{f}_2 - \bar{y}_n^2)}, \\ \\ \hat{\gamma}_n = \frac{(\hat{f}_2 - \bar{y}_n^2)^2}{\bar{y}_n \hat{f}_3 - \bar{y}_n^2 \hat{f}_2 - \hat{f}_2^2 + \bar{y}_n^4} \end{cases}$$

Заметим, что когда параметр γ_0 фиксирован (за исключением случаев $\gamma \neq 0$ и $\gamma \neq 1$), то решение имеет вид:

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_n = \bar{y}_n, \\ \beta_n = \frac{b-a^2}{a\gamma}. \end{cases}$$

■