# Отрицательно биномиальное распределение.

1. **Обозначение семейства распределений.**

$$\mathcal{NBIN}$$

2. **Параметрическое пространство.**

$$\Theta = \{\theta = (\nu, \tau)^T,\ \nu > 0,\ 0 < \tau < 1\}$$

3. **Обозначение и область значений случайной величины.**

$$NBIN(\nu, \tau) \in \mathsf{N}_T.$$

4. **Функция распределения и плотность распределения.**

4.1. **Функция распределения и связанные с ней характеристики.**

$$\mathcal{L}(NBIN(\nu, \tau)) = \mathcal{NBIN}(r; \nu, \tau),$$

$$\mathcal{NBIN}(r; \nu, \tau) = \sum_{j=0}^{r} nbin(j; \nu, \tau),\ r \geq 0.$$

4.1.1. Если

$$\mathcal{NBIN}(r; \nu, \tau) = 1 - \mathcal{NBIN}(r; \nu, \tau) = \sum_{j=r+1}^{\infty} nbin(j, \nu, \tau),$$

то

$$\mathcal{NBIN}(r-1; \nu, \tau) = \mathcal{BETA}(1-\tau; r, \nu) = 1 - \mathcal{BIN}(r-1; \nu + r - 1, 1 - \tau).$$

4.1.2.

$$\mathcal{NBIN} = (r; \nu, \tau) = \mathcal{BETA}(\tau; \nu, r+1)$$

4.1.3. Аппроксимации для функции отрицательно биномиального распределения проводятся на основе существующей связи между семействами распределений $\mathcal{NBIN}$, $\mathcal{BIN}$ и $\mathcal{BETA}$ (см. 4.1.1, 4.1.2, и .....).

4.2. **Плотность распределения и связанные с ней характеристики.**

$$\mathcal{L}'(NBIN(\nu, \tau)) = nbin(r; \nu, \tau),$$

где

$$nbin(r; \nu, \tau) = \frac{\Gamma(\nu + r)}{\Gamma(\nu) r!} \tau^{\nu} (1-\tau)^r, \quad r = 0, 1, 2 \ldots.$$

Если $\nu$ – целое, то

$$nbin(r; \nu, \tau) = C_{\nu+r-1}^{r} \tau^{\nu} (1-\tau)^r, \quad r = 0, 1, 2, \ldots.$$

т.е.

4.2.1.

$$\frac{nbin(r+1; \nu; \tau)}{nbin(r; \nu, \tau)} = \frac{(\nu + r)}{(r+1)} (1-\tau), \quad r = 0, 1, \ldots$$

4.2.2. **Модальное значение.**

$$r_{mod} = \begin{cases} \left[(\nu-1)\,\frac{1-\tau}{\tau}\right], & \text{если } (\nu-1)\frac{1-\tau}{\tau} \text{ не целое число} \\ \left.\begin{array}{c} \left[(\nu-1)\frac{1-\tau}{\tau}\right] \\ \frac{\nu(1-\tau)-1}{\tau} \end{array}\right\} & \text{две моды, если} (\nu-1)\frac{1-\tau}{\tau} \ \text{ – целое число} \\ 0, & \text{если } \nu\frac{1-\tau}{\tau} < \frac{1}{\tau}. \end{cases}$$

4.2.3. При фиксированных $r$ и $\nu$

$$nbin(r;\nu,\tau) \downarrow \tau;$$

при фиксированных $r$ и $\tau$

$$nbin(r;\nu,\tau) \uparrow \nu.$$

## 5. Интерпретация и области применения.

Это распределение иногда называют еще распределением *Пойа*. Если $\nu$ –целое, то семейство распределений $\mathcal{NBIN}$ известно также под названием семейства распределений *Паскаля*. В этом случае величина $\nu + NBIN(\nu,\tau)$ интерпретируется как число испытаний Бернулли с вероятностью успеха в отдельном испытании равном $\tau$ до появления $\nu$-го успеха, или $NBIN(\nu,\tau)$ – число осуществления неудач до появления $\nu$-го успеха. Если $\nu = 1$, то имеем дело с семейством геометрических распределений. В страховой сфере (и в частности, в автостраховании) семейство $\mathcal{NBIN}$ используется для моделирования числа страховых случаев.

## 6. Стохастические представления и тождества.

6.1. Если $NBIN(\nu_1,\tau)$ и $NBIN(\nu_2,\tau)$ независимы, то

$$NBIN(\nu_1,\tau) + NBIN(\nu_2,\tau) \stackrel{d}{=} NBIN(\nu_1+\nu_2,\tau).$$

6.1.1. Если $\nu$ – целое положительное число, а $Z_1,\dots Z_\nu$ – н.о.р. случайные величины,

$$Z_1 \stackrel{d}{=} GEOM(\tau),$$

то

$$NBIN(\nu,\tau) \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\nu} Z_i$$

6.2. **Модель смешанного распределения.** Пусть $\eta$ и $\lambda$ – случайные величины,

$$\begin{aligned} \eta/\lambda &\stackrel{d}{=} POIS(\lambda t), \\ \lambda &\stackrel{d}{=} G(\alpha,\sigma). \end{aligned}$$

Тогда

$$\eta \stackrel{d}{=} NBIN(\nu,\tau),$$

где

$$\begin{aligned} \nu &= \alpha, \\ \tau &= \frac{1}{1+\sigma t}. \end{aligned}$$

6.3. **Модель составного распределения.** Пусть $y_1,\dots,y_\nu$ – н.о.р. случайные величины,

$$y_1 \stackrel{d}{=} LOG(\varkappa), \quad 0 < \varkappa < 1,$$

независящие от случайной величины $\nu$, где

$$\nu = POIS(\lambda).$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{\nu} y_1 \stackrel{d}{=} NBIN\left(-\frac{\lambda}{\ln(1-\varkappa)}, 1-\varkappa\right).$$

**6**.4. Если $\nu \to \infty$, то

$$\frac{NBIN(\nu,\tau) - \nu\frac{1-\tau}{\tau}}{\sqrt{\nu\frac{1-\tau}{\tau^2}}} \stackrel{d}{=} N(0,1) + 0_d(1)$$

**6**.5. Если $\nu \to \infty$, $\frac{1-\tau}{\tau} \to 0$, а $\nu\frac{1-\tau}{\tau} \to \lambda < \infty$, то

$$NBIN(\nu,\tau) = POIS(\lambda) + 0_p(1).$$

# **7**. Характеристические преобразования распределений.

## **7**.1. Характеристическая функция.

$$\chi(t) = \left(\frac{\tau}{1-(1-\tau)\exp\{it\}}\right)^{\nu}.$$

## **7**.2. Производящая функция моментов.

$$\mu(t) = \left(\frac{\tau}{1-(1-\tau)e^t}\right)^{\nu}, \quad t < \ln\frac{1}{1-\tau}.$$

## **7**.3. Производящая функция.

$$\pi(t) = \left(\frac{\tau}{1-(1-\tau)z}\right)^{\nu}, \quad |z| < \frac{1}{1-\tau}.$$

## **7**.4. Преобразование Лапласа.

$$\lambda(t) = \left(\frac{\tau}{1-(1-\tau)e^{-t}}\right)^{\nu}, \quad t \geq 0.$$

## **7**.5. Другие характеристические преобразования.

### **7**.5.1. Производящая функция семиинвариантов.

$$k(t) = \nu\ln\tau - \nu\ln(1-(1-\tau)\exp t).$$

# **8**. Моментные характеристики случайной величины.

Моментные характеристики отрицательно биномиального распределения легко получить из соответствующих характеристик биномиального распределения, осуществляя подстановку

$$\begin{cases} n = -\nu \\ \theta = 1 - \frac{1}{\tau}. \end{cases}$$

8.1. **Начальные моменты.**

$$\begin{aligned}
a_1 &= \nu\frac{1-\tau}{\tau},\\
a_2 &= \frac{\nu(1-\tau)}{\tau^2}\{1+\nu(1-\tau)\},\\
a_3 &= \frac{\nu(1-\tau)}{\tau^3}\{1+(1+3\nu)(1-\tau)+\nu^2(1-\tau)^2\},\\
a_4 &= \frac{\nu(1-\tau)}{\tau^4}\{1+(4+7\nu)(1-\tau)+(1+4\nu+6\nu^2)(1-\tau)^2+\\
&+ \nu^3(1-\tau)^3\}.
\end{aligned}$$

8.2. **Центральные моменты.**

$$\begin{aligned}
m_2 &= \frac{\nu(1-\tau)}{\tau^2},\\
m_3 &= \frac{\nu(1-\tau)}{\tau^3}(2-\tau),\\
m_4 &= \frac{\nu(1-\tau)}{\tau^4}\{1+(4+3\nu)(1-\tau)+(1-\tau)^2\}.
\end{aligned}$$

8.3. **Факториальные моменты.**

$$\begin{aligned}
f_1 &= \nu\frac{1-\tau}{\tau},\\
f_2 &= \nu(\nu+1)\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right)^2,\\
f_3 &= \nu(\nu+1)(\nu+2)\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right)^3.\\
f_4 &= \nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right)^4,\\
\dots &\;\dots\;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f_k &= \nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-1)\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right)^k, \quad k=1,2\dots.
\end{aligned}$$

8.4. **Семиинварианты.**

$$\begin{aligned}
k_1 &= \nu\frac{1-\tau}{\tau},\\
k_2 &= \frac{\nu(1-\tau)}{\tau^2},\\
k_3 &= \frac{\nu(1-\tau)}{\tau^3}(2-\tau),\\
k_4 &= \frac{\nu(1-\tau)}{\tau^4}\{1+4(1-\tau)+(1-\tau)^2\},\\
k_{r+1}^{(\nu,\tau)} &= (1-\tau)\frac{\partial k_r(\nu,\tau)}{\partial(1-\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

8.5. **Коэффициент вариации.**

$$\gamma_0 =$$

### 8.6. Коэффициент ассиметрии.

$$\gamma_1 = \frac{2-\tau}{\sqrt{\nu(1-\tau)}}.$$

### 8.7. Коэффициент эксцесса.

$$\gamma_2 = \frac{\tau^2 + 6(1-\varepsilon)}{\nu(1-\tau)}.$$

### 8.8. Другие моментные характеристики.

#### 8.8.1. Среднее уклонение.

$$b_1 = E|NBIN(\nu,\tau) = \frac{2m(\nu+m-1)!\tau^{\nu-1}(1-\tau)^m}{m!(\nu-1)!},$$

где $m = \left[\frac{\nu(1-\tau)}{\tau_1} + 1\right] = [a_1 + 1]$.

#### 8.8.2. Индекс рассеяния.

$$\nu_2 = \frac{m_2}{a_1} = \frac{1}{\tau}.$$

## 9. Информационные функции.

### 9.1. Информационная функция Фишера.

9.1.1. Пусть $\nu$ – известная величина, т.е. единственным неизвестным параметром является $\tau$. Тогда

$$I^0(\tau) = \frac{\nu}{\tau^2(1-\tau)}.$$

9.1.2. Если оба параметра и $\nu$, и $\tau$ не известны, тогда $I^0(\tau,\nu)$ имеет весьма сложный вид

## 10. Аналитические свойства распределений.

10.1. Семейство $\mathcal{NBIN}$ является безгранично делимым, поскольку для любого $n$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$\left(\chi\left(t; NBIN\left(\frac{\nu}{n},\tau\right)\right)\right)^n = \chi(t; NBIN(\nu,\tau)).$$

10.2. О связи "хвостов"распределения отрицательно-биномиальных и биномиальных распределений для целых $\nu$

$$\mathbf{P}\{NBIN(\nu,\tau) \geq m\} = \mathbf{P}\{BIN(m+\nu-1,\tau) \geq m\}.$$

10.2.1.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{NBIN(\nu,\tau) \geq m\} &= \sum_{k=m}^{\nu+m-1} b(k; \nu+m-1,\tau) = \\ &= \frac{(\nu+m-1)!}{(\nu-1)!(m-1)!}\int_0^\tau v^{m-1}(1-v)^{\nu-1}\alpha v.\end{aligned}$$

10.3. Сеьейство $\mathcal{NBIN}$ имеет убывающую интенсивность отказа при $\nu < 1$, возрастающую при $\nu > 1$ и постоянную (свойство отсутствия памяти) при $\nu = 1$, т.е. при геометрическом распределении.

10.4. Если $NBIN(\nu_1,\tau)$ и $NBIN(\nu_2,\tau)$ независимы, то

$$NBIN(\nu_1,\tau) + NBIN(\nu_2,\tau) = NBIN(\nu_1+\nu_2,\tau).$$

**10**.5. Пусть $\nu \to \infty$, $\tau \to 1$, $\nu\left(\frac{1}{\tau}\right) - 1 \to \theta$.
Тогда
$$NBIN(\nu, \tau) = POIS(0) + 0_d(1).$$

**10**.6. Пусть $\tau \to \infty$, $\nu = const$. Тогда.......

**10**.7. **Нормализующие преобразования.**

**10**.7.1.
$$\sqrt{\nu}\sin h^{-1}\sqrt{\frac{NBIN(\nu,\tau)}{\nu}}.$$

**10**.7.2. **Преобразование Anscomb (1948).**
$$\sqrt{\nu - 0.5}\sin h^{-1}\sqrt{\frac{NBIN(\nu,\tau) + 3/8}{\nu - 3/4}}.$$

## **11**. Моделирование случайной величины.

## **12**. Статистические выводы.

### **12**.1. Достаточные статистики.

**12**.1.1. Параметр $\nu$ – известная величина.
Пусть $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $y_i \in \mathsf{N}$, $y_i$ – н.о.р. случайные величины, $i = \overline{1, n}$,
$$y_1 \stackrel{d}{=} NBIN(\nu, \tau).$$
Тогда $S = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$ – полная достаточная статистика,
$$S \stackrel{d}{=} NBIN(n\nu, \tau).$$

**12**.1.2. Оба параметра не известны. Достаточной статистикой является вариационный ряд $(y_{(1)}, \ldots y_{(n)})$.

### **12**.2. Точечное оценивание.

**12**.2.1. Параметр $\nu$ – известная величина.
ОМП имеет вид
$$\check{\tau}_n = \frac{n\nu}{S + n\nu},$$
а
$$\hat{\tau}_n^0 = \frac{n\nu - 1}{S + n\nu - 1}$$
несмещенная оценка с минимальной дисперсией.
Смещением ОМП является
$$b(\tau) = E\{\check{\tau}_n - \hat{\tau}_n^0\} = E\left\{\frac{S}{(S + n\nu)(S + n\nu - 1)}\right\} > 0.$$