Распределение Хофмана (одномерное).

1. Обозначение семейства распределений: $\mathcal{HOFM}$.

2. Параметрическое пространство.

$$\Theta = \{\theta = (\alpha, \beta, \gamma)^T, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma \geq 0\},$$

t – фиксированный момент времени.

3. Обозначение и область значений случайной величины.

$$HOFM(\alpha, \beta, \gamma; t) \in \mathsf{N}.$$

При $t = 1$ положим $HOFM(\alpha, \beta, \gamma, 1) = HOFM(\alpha, \beta, \gamma)$.

4. Функция распределения и плотность распределения.

4.1.

$$\mathcal{HOFMAN}(k; \alpha, \beta, \gamma; t), \quad k \in \mathsf{N}.$$

Явный вид весьма сложен.

4.2.

$$hofman(0; \alpha, \beta, \gamma; t) = \exp\{-\psi(t; \alpha, \beta, \gamma)\},$$

где

$$\psi(t; \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} \alpha t & \text{при} \quad \gamma = 0, \\ \frac{\alpha}{\beta(1-\gamma)}((1+\beta t)^{1-\gamma} - 1) & \text{при} \quad \gamma \neq 1, \\ \frac{\alpha}{\beta} \ln(1+\beta t) & \text{при} \quad \gamma = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Для $k = 1, 2, \ldots$

$$hofman(k; \alpha, \beta, \gamma; t) = (-1)^k \frac{t^k}{k!} \frac{d^k}{dt^k} \{\exp\{-\psi(t; \alpha, \beta, \gamma)\}\}. \tag{2}$$

Положим $hofman(k; \alpha, \beta, \gamma; t) = h(k)$. Справедливо следующее рекуррентное соотношение

$$(k+1)h(k+1) = \frac{\alpha t}{(1+\beta t)^\gamma} \sum_{i=0}^{k} \frac{\Gamma(i+\gamma)}{\Gamma(\gamma) i!} \left(\frac{\beta t}{1+\beta t}\right)^i h(k-i) \tag{3}$$

Заметим, что представление для $\psi(t;\alpha,\beta,\gamma)$ в форме (1) справедливо и в форме

$$\psi(t;\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\alpha t}{\beta t(1-\gamma)}((1+\beta t)^{1-\gamma}-1), \tag{4}$$

Если неопределенность при $\gamma=1$ доопределять, в соответствии с правилом Лейбница, как

$$\psi(t;\alpha,\beta,1)\equiv\frac{\alpha}{\beta}\ln(1+\beta t).$$

Из (4) следует, что если какая либо формула или утверждение получено для $t=1$ и (α,β,γ), то оно автоматически переносится на произвольное t, если сделать подстановку: параметр (α,β,γ) заменить на $(\alpha t,\beta t,\gamma)$.

Пусть $\gamma \neq 1, \quad t=1.$ Тогда

$$
\begin{aligned}
h(0) &= \exp\left\{-\frac{\alpha}{\beta(1-\gamma)}((1+\beta)^{1-\gamma}-1)\right\},\\
h(1) &= \frac{\alpha}{(1+\beta)^{\gamma}}h(0),\\
h(2) &= \left\{\frac{\alpha^2+\alpha\gamma\beta(1+\beta)^{\gamma-1}}{2!(1+\beta)^{2\gamma}}\right\}h(0),\\
h(3) &= \left\{\frac{\alpha^3+3\alpha^2\gamma\beta(1+\beta)^{\gamma-1}+\alpha\gamma(\gamma+1)\beta^2(1+\beta)^{2(\gamma-1)}}{3!(1+\beta)^{3\gamma}}\right\}h(0),\\
h(4) &= \left\{\frac{\alpha^4+3\alpha^3\gamma\beta(1+\beta)^{\gamma-1}+3\alpha^3\gamma\beta(1+\beta)^{2(\gamma-1)}+4\alpha^2\gamma(\gamma+1)\beta^2(1+\beta)^{2(\gamma-1)}}{4!(1+\beta)^{4\gamma}}+\right.\\
&+ \left.\frac{3\alpha^2\gamma^2\beta^2(1+\beta)^{2(\gamma-1)}+\alpha\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\beta^3(1+\beta)^{3(\gamma-1)}}{4!(1+\beta)^{4\gamma}}\right\}h(0),\\
h(5) &= \left\{\frac{\alpha^5+7\alpha^4\gamma\beta(1+\beta)^{\gamma-1}+3\alpha^4\gamma\beta(1+\beta)^{2(\gamma-1)}+10\alpha^3\gamma(\gamma+1)\beta^2(1+\beta)^{2(\gamma-1)}}{5!(1+\beta)^{5\gamma}}+\right.\\
&+ \frac{15\alpha^3\gamma^2\beta^2(1+\beta)^{2(\gamma-1)}+5\alpha^2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\beta^3(1+\beta)^{3(\gamma-1)}}{5!(1+\beta)^{5\gamma}}+\\
&+ \left.\frac{10\alpha^2\gamma^2(\gamma+1)\beta^3(1+\beta)^{3(\gamma-1)}+\alpha\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)\beta^4(1+\beta)^{4(\gamma-1)}}{5!(1+\beta)^{5\gamma}}\right\}h(0),\\
h(6) &= \left\{\frac{\alpha^6+3\alpha^5\gamma\beta(1+\beta)^{2(\gamma-1)}+12\alpha^5\gamma\beta(1+\beta)^{\gamma-1}+20\alpha^4\gamma(\gamma+1)\beta^2(1+\beta)^{2(\gamma-1)}}{6!(1+\beta)^{6\gamma}}+\right. \qquad (5)\\
&+ \frac{15\alpha^4\gamma^2\beta^2(1+\beta)^{3(\gamma-1)}+30\alpha^4\gamma^2\beta^2(1+\beta)^{2(\gamma-1)}}{6!(1+\beta)^{6\gamma}}+\\
&+ \frac{15\alpha^3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\beta^3(1+\beta)^{3(\gamma-1)}+60\alpha^3\gamma^2(\gamma+1)\beta^3(1+\beta)^{3(\gamma-1)}}{6!(1+\beta)^{6\gamma}}+\\
&+ \frac{15\alpha^3\gamma^3\beta^3(1+\beta)^{3(\gamma-1)}+6\alpha^2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)\beta^4(1+\beta)^{4(\gamma-1)}}{6!(1+\beta)^{6\gamma}}+\\
&+ \frac{15\alpha^2\gamma^2(\gamma+1)(\gamma+2)\beta^4(1+\beta)^{4(\gamma-1)}+10\alpha^2\gamma^2(\gamma+1)^2\beta^4(1+\beta)^{4(\gamma-1)}}{6!(1+\beta)^{6\gamma}}+\\
&+ \left.\frac{\alpha\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)\beta^5(1+\beta)^{5(\gamma-1)}}{6!(1+\beta)^{6\gamma}}\right\}h(0),\\
h(7) &= \left\{\frac{\alpha^7+3\alpha^6\gamma\beta(1+\beta)^{2(\gamma-1)}+18\alpha^6\gamma\beta(1+\beta)^{\gamma-1}+35\alpha^5\gamma(\gamma+1)\beta^2(1+\beta)^{2(\gamma-1)}}{7!(1+\beta)^{7\gamma}}+\right.\\
&+ \frac{33\alpha^5\gamma^2\beta^2(1+\beta)^{3(\gamma-1)}+72\alpha^5\gamma^2\beta^2(1+\beta)^{2(\gamma-1)}}{7!(1+\beta)^{7\gamma}}+\\
&+ \frac{35\alpha^4\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\beta^3(1+\beta)^{3(\gamma-1)}+45\alpha^4\gamma^2(\gamma+1)\beta^3(1+\beta)^{4(\gamma-1)}}{7!(1+\beta)^{7\gamma}}+\\
&+ \frac{165\alpha^4\gamma^2(\gamma+1)\beta^3(1+\beta)^{3(\gamma-1)}+105\alpha^4\gamma^3\beta^3(1+\beta)^{3(\gamma-1)}}{7!(1+\beta)^{7\gamma}}+\\
&+ \frac{21\alpha^3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)\beta^4(1+\beta)^{4(\gamma-1)}}{7!(1+\beta)^{7\gamma}}+\\
&+ \frac{105\alpha^3\gamma^2(\gamma+1)(\gamma+2)\beta^4(1+\beta)^{4(\gamma-1)}+70\alpha^3\gamma^2(\gamma+1)^2\beta^4(1+\beta)^{4(\gamma-1)}}{7!(1+\beta)^{7\gamma}}+\\
&+ \frac{105\alpha^3\gamma^3(\gamma+1)\beta^4(1+\beta)^{4(\gamma-1)}+7\alpha^2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)\beta^5(1+\beta)^{5(\gamma-1)}}{7!(1+\beta)^{7\gamma}}+\\
&+ \frac{21\alpha^2\gamma^2(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)\beta^5(1+\beta)^{5(\gamma-1)}}{7!(1+\beta)^{7\gamma}}+\\
&\ \ 35\alpha^2\gamma^2(\gamma+1)^2(\gamma+2)\beta^5(1+\beta)^{5(\gamma-1)}
\end{aligned}
$$

При $\gamma = 0$

$$\mathcal{L}'(HOFM(\alpha, \beta, 0; t)) = \mathcal{L}'(POIS(\alpha t)), \tag{6}$$

при $\gamma = 1$

$$\mathcal{L}'(HOFM(\alpha, \beta, 1; t)) = \mathcal{L}'\left(NBIN\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{1}{1+\beta t}\right)\right), \tag{7}$$

при $\gamma = \frac{1}{2}$

$$\mathcal{L}'(HOFM(\alpha, \beta, \frac{1}{2}; t)) = \mathcal{L}'\left(POIS/INVG\left(\frac{2\alpha}{\beta}, \beta t\right)\right), \tag{8}$$

при $\gamma = 2$

$$\mathcal{L}'(HOFM(\alpha, \beta, 2; t)) = \mathcal{L}'\left(POLAEP\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta t}{1+\beta t}\right)\right). \tag{9}$$

5. Интерпретация и области применения.

Семейство распределений Хофмана (см. Хофман (1955), Кестеман и Парис (1985)) применяется при моделировании частоты страховых случаев в автостраховании (см. Уолхин и Парис (1999)) и других видах страхования "не - жизни". Это богатое семейство распределений в качестве частных случаев включает в себя *пуассоновское* (*при* $\gamma = 0$)*, отрицательно биномиальное* (*при* $\gamma = 1$)*, пуассон-обратно гауссовское* (при $\gamma = 0.5$), распределения *Полиа-Аэпли* (при $\gamma = 2$), соответствующая параметризация представлена в (6), (7), (8) и (9). При $\gamma \to \infty, \beta \to 0, \gamma\beta \to const$ оно сходится к распределению *Неймана типа* А. Распределения семейства Хофмана являются бесконечно делимыми. Они допускают представления, с одной стороны, как смеси распределений пуассоновских случайных величин, а с другой как распределения сложного пуассоновского процесса.

6. Стохастические представления и тождества.

6.1. Представление в виде составного распределения.

Пусть t – фиксированный момент времени,

$$\nu(t) \stackrel{d}{=} POIS(\psi(t; \alpha, \beta, \gamma)).$$

Рассмотрим последовательность н.о.р. случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ такова, что $\mathbf{P}\{\xi_1 = 0\} = 0$,

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi_1 = r\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 = r-1\}} = a + \frac{b}{r}, \quad r > 1, \quad r - \text{целые}, \tag{10}$$

т.е. $\xi_i \in D(a, b, 1)$. Положим

$$a = \frac{\beta t}{1+\beta t}, \quad b = (\gamma - 2)\frac{\beta t}{1+\beta t}. \tag{11}$$

Предположим, что пуассоновский процесс $\nu(t)$ и случайные величины ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$, независимы. Тогда $HOFM(\alpha, \beta, \gamma; t) \stackrel{d}{=} \sum\limits_{i=1}^{\nu(t)} \xi_i$, причем $HOFM(\alpha, \beta, \gamma; t) = 0$ при $\nu(t) = 0$. Обратим внимание, что на самом деле $\xi_i = \xi_i(t)$! При $\gamma = 0$ вероятности

$$\begin{cases} \mathbf{P}\{\xi_1 = 1\} = 1, \\ \mathbf{P}\{\xi_1 = r\} = 0 \quad \text{для } r = 2, 3, \ldots; \end{cases} \tag{12}$$

при $\gamma > 0$

$$\begin{cases} \mathbf{P}\{\xi_1 = 1\} = \frac{(\gamma-1)\beta t}{(1+\beta t)^\gamma - (1+\beta t)}, \\ \mathbf{P}\{\xi_1 = r\} = \frac{(\gamma-1)(\beta t)^r}{\{(1+\beta t)^\gamma - (1+\beta t)\}(1+\beta t)^{r-1}} \prod\limits_{j=2}^{r} (1 + \frac{\gamma-2}{j}) \quad \text{для } r = 2, 3, \ldots. \end{cases} \tag{13}$$

6.2. Представление в виде смеси пуассоновских распределений.

Предположим, что Λ – случайная величина с функцией распределения

$$\mathcal{L}(\Lambda) = V(u), \quad u > 0. \tag{14}$$

Пусть при $\Lambda = \lambda$

$$\{N(t) | \Lambda = \lambda\} = N(t; \lambda) \stackrel{d}{=} POIS(\lambda t). \tag{15}$$

Если преобразованием Лапласа функции распределения $V(u)$ является

$$\lambda(s; \Lambda) = \exp\{-\psi(s; \alpha, \beta, \gamma)\}, \tag{16}$$

т.е.

$$\lambda(s; \Lambda) = hofm(0; \alpha, \beta, \gamma; s), \tag{16'}$$

то случайная величина $N(t)$, безусловные вероятности которой представляются в виде

$$\mathbf{P}\{N(t) = k\} = \int\limits_0^\infty \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} dV(\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{17}$$

является случайной величиной Хофмана.

Из соотношения (14) получаем

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\{\Lambda; \theta\} = \alpha, \\ &\mathbf{D}\{\Lambda; \theta\} = \alpha\beta\gamma. \end{aligned} \tag{18}$$

Производящая функция семинвариантов для случайной величины Λ определяется как

$$\ln E\{e^{s\Lambda}; \theta\} = \ln h(0; \alpha, \beta, \gamma; -s) = -\psi(-s; \alpha, \beta, \gamma). \tag{19}$$

Из равенства (19) получаем параметрическое представление для семинвариантов

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha t, \\ k_r &= \alpha t(\beta t\gamma)^{r-1}\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\left(1+\frac{2}{\gamma}\right)\dots\left(1+\frac{r-2}{\gamma}\right) \quad \text{для} \quad r \geq 2. \end{aligned} \tag{20}$$

Равенство (16) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно $V(\cdot)$, а именно

$$\int_0^\infty e^{-su}dV(u) = \exp\{-\psi(s;\alpha,\beta,\gamma). \tag{21}$$

Как показали Панжер и Уилмот (1984a)

$$\begin{aligned} V(u) &= V(u;\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_0^u \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta(1-\gamma)}{\alpha}\right)^{1-\gamma}\left\{\exp\left(\frac{\alpha}{\beta(1-\gamma)} - \frac{x}{\beta t}\right)\right\} \times \\ &\times \sum_{r=1}^\infty \frac{\Gamma(r(1-a)-1)}{r!}(-1)^{r-1}\left(\frac{x}{\beta t}\left(\frac{\beta(1-\gamma)}{\alpha}\right)^{1-\gamma}\right)^{-(r(1-\gamma)-1)} \sin((1-\gamma)r\pi)dx. \end{aligned} \tag{22}$$

В общем случае функция распределения весьма сложна. Однако, если $\gamma = 1$, то

$$\mathcal{L}(\Lambda) = \mathcal{L}\left(G\left(\frac{\alpha}{\beta},\beta\right)\right), \tag{23}$$

т.е. априорное распределение принадлежит семейству гамма распределений. Далее, если, например, $\gamma = \frac{1}{2}$, то

$$\mathcal{L}(\Lambda) = \mathcal{L}\left(INVG\left(\frac{2\alpha}{\beta},\alpha\right)\right). \tag{24}$$

7. Характеристические преобразования распределений.

7.1. Производящая функция

$$\Pi(z) = \Pi(z;N(t)) = E\{z^{N(t)};\theta\} = \exp\{-\psi(t(1-z);\alpha,\beta,\gamma)\}.$$

В частности, при $\gamma = 0$ (пуассоновский случай)

$$\Pi(z) = \exp\{-\alpha t(1-z)\}, \tag{25}$$

при $\gamma = 1$ (отрицательно - биноминальный случай)

$$\Pi(z) = \left(\frac{1}{1+\beta t(1-z)}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}, \tag{26}$$

при $\gamma = 2$ (случай Пойа - Иппли распределенности)

$$\Pi(z) = \exp\left\{\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{1+\beta t(1-z)} - 1\right)\right\}, \tag{27}$$

при $\gamma = \frac{1}{2}$ (случай Пуассон/обратногауссовской распределенности)

$$\Pi(z) = \exp\left\{\frac{2\alpha}{\beta}\left(1 - \sqrt{1 + \beta t(1-z)}\right)\right\}, \tag{28}$$

при $\gamma \to \infty, \beta \to \infty, \gamma\beta \to \infty$ (случай сходимости к распределению Неймана типа A)

$$\Pi(z) \to \exp\left\{-\frac{\alpha}{\nu}\left(1 - \exp \nu t(1-z)\right)\right\}. \tag{29}$$

7.2. Производящая функция моментов.

$$M(s) = M(s; N(t)) = E\exp\{sN(t)\} = \exp\{-\psi(t(1-e^s); \alpha, \beta, \gamma)\}.$$

8. Моментные характеристики случайной величины Хофмана при $\gamma \neq 1$. [1]

8.1.

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha t, \\ a_2 &= \alpha^2 t^2 + \alpha\beta\gamma t^2 + \alpha t, \\ a_3 &= \alpha^3 t^3 + 3\alpha^2\beta\gamma t^3 + 2\beta^2\gamma(\gamma+1)t^3 + 3\alpha^2 t^2 + 3\alpha\beta\gamma t^2 + \alpha t. \end{aligned} \tag{30}$$

8.2.

$$\begin{aligned} m_2 &= \alpha\beta\gamma t^2 + \alpha t, \\ m_3 &= \\ m_4 &= \end{aligned} \tag{31}$$

8.3.

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha t, \\ f_2 &= \alpha^2 t^2 + \alpha\beta\gamma t^2, \\ f_3 &= \alpha^3 t^3 + 3\alpha^2\beta\gamma t^3 + \alpha\beta^2\gamma(\gamma+1)t^3. \end{aligned} \tag{32}$$

[1]Моменты распределения Хофмана при $\gamma = 1$ в соответствии с равенством (5) можно получить на основе п. 8 раздела "Отрицательно биноминальное распределение."