Лекция 2

Ответы на вопросы студентов по Контрольной работе №1 .

а) Пусть

$N_1, N_2, \ldots$ – последовательность н.о.р. стандартных нормальных случайных величин, $N_1 \overset{d}{=} N(0,1)$;

$U_1, U_2, \ldots$ – последовательность н.о.р. равномерно на $(0,1)$ случайных величин, $U_1 \overset{d}{=} U(0,1)$.

Тогда

$$\begin{cases} N_1 \overset{d}{=} \sqrt{-2\ln U_1}\sin 2\pi U_2, \\ N_2 \overset{d}{=} \sqrt{-2\ln U_2}\cos 2\pi U_2. \end{cases} \tag{a.1}$$

б) Для порождения $U(0,1)$ – равномерно распределенных случайных величин предлагается использовать датчики псевдо-случайных чисел типа MRG (Multiple Recursive Generator) или MCG (Matrix Congruential Generator), представленные в программном компьютерном обеспечении.

в) Теорема. Пусть $\xi \in R^1$, ξ – *непрерывная* случайная величина, $\mathcal{L}(\xi) = F_0(u)$, $F_0(u)$ – строго монотонная ф.р., $u \in R^1$.
Тогда

$$U(0,1) \overset{d}{=} F_0(\xi), \tag{в.1}$$

$$\xi \overset{d}{=} F_0^{-1}(U(0,1)). \quad \blacksquare \tag{в.2}$$

Соотношение (в.2) используется для моделирования случайной величины, например, для $\xi \overset{d}{=} E(\theta)$. Но, как было объяснено на лекции, формула (в.2) не используется для моделирования $\xi \overset{d}{=} N(0,1)$.

Точечное оценивание.

Пусть данные $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ – независимая выборка объема n , т.е. y_i – н.о.р. случайные величины, $i = \overline{1,n}$, $y_1 \in R_0^1$.

1. Эмпирическая функция распределения (э.ф.р) и ее поточечные свойства: несмещенность, дисперсия, ковариация, распределение.

2. Метод подстановки: в качестве точечной оценки функционала $g(F_0(u))$ принимается непараметрическая точечная оценка $\hat{g}(y) = g(\hat{F}_n(u))$ с последующим анализом вероятностных свойств точечной оценки $\hat{g}(y)$. Оценка $\hat{\theta}_n$ значения порождающего параметра θ_0 получается как решение уравнения

$$g(F_0(u;\hat{\theta}_n) = g(\hat{F}_n(u)),$$

если $\mathcal{L}(y_1) = F_0(u;\theta_0)$.

3. Метод моментов.

Несмещенность и состоятельность выборочных начальных моментов. Оценка $\hat{\theta}_n$ значения θ_0 получается как решение системы $a_k(\theta_0) = \hat{a}_k$, $k = \overline{1,m}$.

О распределении и независимости статистик $\bar{y}_n$ и $Q_n(y) = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_n)^r$ для данных y из нормальной статистической модели.

4. Метод квантилей.

Квантиль ф.р. $F_0(u;\theta)$ уровня q:

$$quant(q; F_0(u;\theta)) = \zeta_q(\theta) = \inf\{u : F_0(u;\theta) \geq q\}.$$

Эмпирическая квантиль уровня q:

$$quant(q; \hat{F}_n(u)) = z_q = \begin{cases} y_{(qn)}, \text{ если } qn \text{ – целое}, \\ y_{([qn]+1)}, \text{ если } qn \text{ – дробное}. \end{cases}$$

Оценка $\hat{\theta}_n$ значения θ_0 получается как решение системы

$$quant(q_i; F_0(u, \hat{\theta}_n)) = quant(q_i; \hat{F}_n(u)), \quad i = \overline{1, m}.$$

Задача на дом. Найти оценки по методу квантилей параметра $\theta_0 = (\alpha_0, \sigma_0)^T$ для семейства распределений Вейбулла, функция распределения $\mathcal{L}(y_1)$ которого имеет вид:

$$\mathcal{L}(y_1) = W(u; \alpha, \sigma) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{-\left(\frac{u}{\sigma}\right)^\alpha\right\}, \ u > 0, \\ 0, \ u \leq 0, \end{cases}$$

$\alpha > 0, \ \sigma > 0$.

По заявленной теме см. [1] – §3, [2] – Введение, [3] – гл. 1, §1.

Список литературы

[1] Беляев Ю.К., Чепурин Е.В. *Основы математической статистики.* часть 1, МГУ, М., 1982.

[2] Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. *Введение в математическую статистику.* ЛКИ, М., 2010.

[3] Леман Э. *Теория точечного оценивания.* Наука, М., 1991.