Об асимптотической эффективности асимптотически нормальных оценок.

Пусть в этом разделе $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$, y_i – н.о.р. случайные величины, $i = \overline{1,n}$. Далее, пусть $m = m(n)$ – целочисленная функция n, причем $m(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Рассмотрим $\hat{g}_n = \hat{g}_n(y)$ и $\tilde{g}_n = \tilde{g}_n(y)$ – две а.н. оценки функции $g(\theta_0)$ и такие, что

$$\sqrt{n}(\hat{g}_n - g(\theta_0)) \stackrel{d}{=} N(0, \sigma_g^2(\theta_0)) + o_d(1) \tag{1}$$

и

$$\sqrt{n}(\tilde{g}_m - g(\theta_0)) \stackrel{d}{=} N(0, \sigma_g^2(\theta_0)) + o_d(1). \tag{2}$$

Обратим внимание, что оценка $\tilde{g}_m$ в (2) для фиксированного n строится по выборке объема $m(n)$!

Пример 1. Пусть $y_i \stackrel{d}{=} N(\theta_0, 1)$, $-\infty < \theta_0 < \infty$, $i = \overline{1,n}$, $\hat{g}_n = \bar{y}_n$, $\tilde{g}_n = \bar{y}_{[\frac{n}{2}]}$. Не трудно увидеть, что в этом случае $m(n) = 2n$. ■

Определение 1. Асимптотической относительной эффективностью (АОЭ) оценки $\hat{g}_n$ относительно оценки $\tilde{g}_n$ называют величину

$$e(\hat{g}_n, \tilde{g}_n; \theta) = \lim_{n\to\infty} \frac{m(n)}{n}, \tag{3}$$

когда предел в (3) существует и не зависит от конкретного задания последовательности $m(n)$ при выполнении (2). ■

Пример $1'$. Продолжая рассмотрение примера 1, получим в соответствии с (3)

$$e(\hat{g}_n, \tilde{g}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n} = 2.$$

Это означает, что для получения одинакового предельного распределения у оценок $\hat{g}_n$ и $\tilde{g}_m$ (т. е. для получения одинаковой асимптотической точности оценивания), необходимо каждый раз в этом конкретном случае для построения оценки типа $\tilde{g}_n$ брать в два раза больше наблюдений, чем для построения оценки $\hat{g}_n$. Естественно полагать, что оценка $\hat{g}_n$ в два раза эффективнее оценки $\tilde{g}_m$ ■.

Заметим, что воспользоваться непосредственно определением (3) для нахождения АОЭ не всегда просто.

Пример 2. Пусть $y_i \stackrel{d}{=} W(\alpha_0, \sigma_0)$, $\theta_0 = (\alpha_0, \sigma_0)^T$, $\alpha_0 > 0$, α_0 – известно, $\sigma_0 > 0$, σ_0 – неизвестный параметр, $i = \overline{1,n}$. Оценка $\hat{\sigma}_n$ параметра σ_0 по методу квантилей имеет вид

$$\hat{\sigma}_n = \frac{\hat{z}_q}{\left(\ln \frac{1}{(1-q)}\right)^{1/\alpha_0}}, \tag{4}$$

где $\hat{z}_q$ – эмпирический квантиль уровня q, $0 < q < 1$.

Оценка $\check{\sigma}_n$ параметра σ_0 по методу максимального правдоподобия имеет вид

$$\check{\sigma}_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^{\alpha_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_0}}. \tag{5}$$

Обе оценки, и $\hat{\sigma}_n$, и $\check{\sigma}_n$ являются асимптотически нормальными.

Определить же последовательность $m(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, при которой оценка $\hat{\hat{\sigma}}_n = \hat{\sigma}_{m(n)}$ будет иметь одинаковую с $\check{\sigma}_n$ дисперсию асимптотического распределения, исходя лишь из вида оценок (4) и (5), вряд ли возможно. В то же время, легко получить значение v_1^2 и

v_2^2 дисперсий асимптотического распределения оценок $\hat{\sigma}_n$ и $\check{\sigma}_n$ соответственно. На основе теорем об асимптотическом поведении квантильных оценок и ОМП, имеем

$$v_1^2 = \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \cdot \frac{q}{1-q} \cdot \frac{1}{\left(\ln \frac{1}{1-q}\right)^2} \tag{6}$$

$$v_2^2 = \frac{\sigma^2}{1+(\alpha-1)^2}. \tag{7}$$

Возникает вопрос, нельзя ли вычислить АОЭ оценок $\hat{\sigma}_n$ и $\check{\sigma}_n$, зная лишь v_1^2 и v_2^2? ■
Положительный ответ на поставленный выше вопрос дается в следующей теореме.
Теорема 1. Пусть $\hat{g}_{j,n}$ – а.н. оценки функции $g(\theta_0)$, т.е.

$$\sqrt{n}(\hat{g}_{j,n} - g(\theta_0)) \stackrel{d}{=} N(0, \sigma_j^2(\theta_0)) + o_d(1), j = 1, 2. \tag{8}$$

Предположим, что для оценки $\hat{g}_{2,n}$ найдется $m = m(n)$ – объем выборки y, для которого будет иметь место соотношение

$$\sqrt{n}(\hat{g}_{2,m} - g(\theta_0)) \stackrel{d}{=} N(0, \sigma_1^2(\theta_0)) + o_d(1). \tag{9}$$

В этом случае АОЭ $\hat{g}_{1n}$ относительно $\hat{g}_{2n}$ существует и определяется равенством

$$e(\hat{g}_{1,n}; \hat{g}_{2,n}) = \frac{\sigma_2^2(\theta_0)}{\sigma_1^2(\theta_0)}. \tag{10}$$

Доказательство. Имеем

$$\sqrt{n}(\hat{g}_{2,m(n)} - g(\theta_0)) \stackrel{d}{=} \sqrt{\frac{n}{m(n)}}\sqrt{m}(n)(\hat{g}_{2,m(n)} - g(\theta_0)) \tag{11}$$

В соответствии с равенствами (8) и (9) дисперсия предельного распределения левой части равенства (11) равна $\sigma_1^2(\theta_0)$. Для того, чтобы дисперсии предельных распределений левой и правой частей равенства (11) совпали, необходимо и достаточно, чтобы существовал $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{m(n)}}$, и при этом

$$\sigma_1^2(\theta) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{m(n)} \sigma_2^2(\theta_0),$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m(n)}{n} = \frac{\sigma_2^2(\theta_0)}{\sigma_1^2(\theta_0)}.$$

Теорема доказана. ■

Пример 3. Пусть $y_i \stackrel{d}{=} N(\theta_0, 1)$, $i = \overline{1, n}$, $-\infty < \theta_0 < \infty$, u – фиксированное число,

$$g(\theta_0) = \mathbf{P}\{y_i < u; \theta_0\} = \Phi(u - \theta_0).$$

Рассмотрим две а.н. оценки. Первая

$$\hat{g}_{1,n}^0 = \Phi(\sqrt{\frac{n}{n-1}}(u - \bar{y}_n)) \quad -$$

н.о.р.м.д. для $g(\theta_0)$, вторая

$$\hat{g}_{2,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(y_i < u) = \hat{F}_n(u)$$

– несмещенная непараметрическая оценка для $g(\theta_0)$. Имеем

$$\sqrt{n}(\hat{g}^0_{1,n} - g(\theta_0)) \stackrel{d}{=} N(0, (-\Phi'(u-\theta_0))^2) + o_d(1),$$
$$\sqrt{n}(\hat{g}_{2,n} - g(\theta_0)) \stackrel{d}{=} N(0, g(\theta_0)(1-g(\theta_0))) + o_d(1). \tag{12}$$

Из (10) и (11) следует, что

$$e(\hat{g}_{2,n}, g^0_{1,n}) = \frac{(\varphi(u-\theta_0))^2}{\Phi(u-\theta_0)(1-\Phi(u-\theta_0))},$$

где $\varphi(u) = \Phi'(u)$ – плотность стандартного нормального распределения. При $u = \theta_0$ имеем

$$e(\hat{g}_{2,n}, \hat{g}^0_{1,n}) = (1/2\pi) : \frac{1}{4} = \frac{2}{\pi} \approx 0.637. \tag{13}$$

При $|u-\theta_0| \to \infty$, АОЭ $e(g_{2,n}, g^0_{1,n}) \to 0$. Действительно, как показано в работе Сэмпфорда (1953), $e(g_{2,n}, g^0_{1,n})$ является убывающей функцией от $|u-\theta_0|$. См. также работу Лемана (1991), пример 5.21, стр. 306.

Пример 4. Пусть $y_i \stackrel{d}{=} N(\mu_0, \sigma_0^2)$, $\theta_0 = (\mu_0, \sigma_0^2)$, $-\infty < \mu_0 < \infty, \sigma_0^2 > 0$, $g(\theta_0) = \mu_0$. В качестве оценок рассматриваются

$$\hat{g}_{1,n} = \bar{y}_n \stackrel{d}{=} N\left(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n}\right),$$

и

$$\hat{g}_{2,n} = z_{\frac{1}{2}} \stackrel{d}{=} N\left(\mu_0, \frac{\sigma_0^2 \pi}{2n}\right) + o_d\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где $z_{\frac{1}{2}}$ – эмпирическая медиана выборки.

В соответствии с теоремой 1

$$e(\hat{g}_{1,n}; \hat{g}_{2,n}) = \frac{\pi}{2} = 1,57079, \tag{14}$$

т.е. чтобы при использовании медианы в качестве оценки среднего получить ту же точность как при использовании среднего арифметического, нужно увеличить объем в 1.57 раз. И в то же время АОЭ оценки $z_{1/2}$ относительно $\bar{y}_n$

$$e(z_{1/2}; \bar{y}_n) = \frac{1}{e(\bar{y}_n, z_{1/2})} = \frac{2}{\pi} = 0.63661. \qquad \blacksquare \tag{15}$$

Задача 1. Пусть $y_i \stackrel{d}{=} G(1, \theta_0)$, $\theta_0 > 0$, $i = \overline{1,n}$. В качестве оценок для параметра θ_0 берутся $\bar{y}_n$ и cz_q, где z_q – эмпирический q-квантиль, а c – постоянная, обеспечивающая асимптотическую несмещенность оценки cz_q.

Определить q, при котором $e(cz_q; \bar{y}_n)$ максимальна. ■

Задача 2. Пусть $y_i \stackrel{d}{=} N(\mu_0, \sigma_0^2)$, $\theta_0 = (\mu_0, \sigma_0^2), -\infty < \mu_0 < \infty, \sigma_0^2 > 0$, $i = \overline{1,n}$. В качестве оценки $g(\theta_0) = \mu_0 + \sigma_0\zeta_q$, где $\Phi(\zeta_q) = q$, сравниваются $\hat{g}^0_n$ – н.о.р.м. и эмпирическая квантиль z_q. Найти $e(z_q; \hat{g}^0_n)$. ■

Задача 3. Пусть $y_i \stackrel{d}{=} N(\mu_0, \sigma_0^2)$, $\theta_0 = (\mu_0, \sigma_0^2), -\infty < \mu_0 < \infty, \sigma_0^2 > 0$, $i = \overline{1,n}$. В качестве оценки $g(\theta_0) = \sigma_0$ сравниваются $\hat{g}^0_n$ – н.о.р.д. и $\hat{g}_n = c(z_q - z_{1-q})$, где c – постоянная, обеспечивающая асимптотическую несмещенность оценки $\hat{g}_n(q)$. Подобрать q, при котором $e(\hat{g}^0_n; \hat{g}_n(q))$ минимальна. ■

Задача 4. Для статистической модели, рассмотренной в примере 2, выяснить при каких q АОЭ оценки $\hat{\sigma}_n$ относительно $\check{\sigma}_n$ максимальна.

К задаче 4. Имеем

$$e(\hat{\sigma}_n, \check{\sigma}_n) = \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{\alpha_2}{1 + (\alpha - 1)^2} \cdot \frac{1-q}{q} \left(\ln \frac{1}{1-q} \right)^2. \tag{16}$$

Максимум $e(\hat{\sigma}_n, \check{\sigma}_n)$ достигается при q_0, удовлетворяющем уравнению

$$-\ln(1 - q_0) = 2q_0, \tag{17}$$

т.е. при

$$q_0 = 0.797. \tag{18}$$

Замечание 1. Если при точечном оценивании $\theta_0 \in R^m$, $m > 1$ или $g(\theta_0) \in R^r$, $r > 1$, в качестве показателя точности а.н. оценки взята обобщенная дисперсия (т.е. определитель ковариационной матрицы), то АОЭ определится в соответствии с теоремой 1.

Литература

1. Сэмпфорд (Sampford M.R.) (1953) Some inequalities on Mill's ratio and functions. Ann. Math. Statist., 24, 130-132.

2. Э.Леман (Lehman E.L.) (1991) Теория точечного оценивания. М., Наука, 1991.

Асимптотически нормальные оценки (АНО)

Определение.

1. Асимптотическая эффективность АНО.

2. Применения АНО при построении доверительных интервалов и критериев значимости.

   (a) Асимптотически γ – доверительный интервал (метод сечений!). Связать ширину интервала альтернативных оценок с АОЭ.

   (b) Асимптотические критерии значимости.

   (c) Локальные мощности.