

В. В. Жиков, С. Е. Пастухова*

**ВЫВОД ПРЕДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ТОНКИХ СЕТКАХ****

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

1. На рис. 1 изображен конечный связный граф F , называемый далее сингулярной сеткой, причем некоторые из его граничных точек выделены особо: $\gamma_1, \gamma_2, \dots$. Из сингулярной сетки F получим тонкую сетку F^h , если каждое звено I сетки F заменим на полосу (стержень) I^h , ширина которой $2h > 0$, а средняя линия совпадает с I . На этой тонкой сетке и подобных ей будем изучать задачу теории упругости, при этом на выделенных торцах γ_i^h будут поставлены краевые условия закрепления, а на остальной части границы сетки F^h — условие отсутствия напряжений.

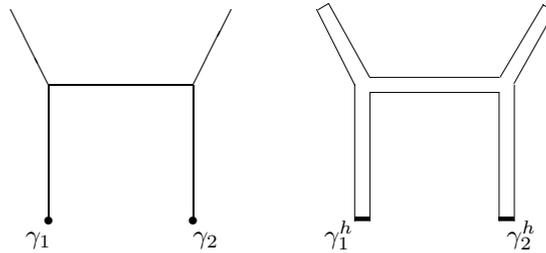


Рис. 1

Через $A = \{a_{ijsp}\}$ обозначим постоянный тензор упругости, подчиненный обычным условиям симметрии: $a_{ijsp} = a_{spij} = a_{jisp}$. Скалярное произведение симметрических матриц $\xi = \{\xi_{ij}\}$, $\eta = \{\eta_{ij}\}$ определим как $\xi \cdot \eta = \xi_{ij} \cdot \eta_{ij}$. Действие тензора A на матрицу ξ есть матрица

*© Жиков В. В., Пастухова С. Е., 2006 г.

**Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 05-01-00621.

$A\xi = \{a_{ijsp}\xi_{sp}\}$. Предполагается, что тензор A положительно определен: $A\xi \cdot \xi \geq c_0\xi \cdot \xi$, $c_0 > 0$. В изотропном случае

$$A\xi = k\xi + k_1(\text{Tr } \xi)E, \quad k > 0, \quad k_1 \geq 0, \\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{12} & \xi_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{Tr } \xi = \xi_{11} + \xi_{22}. \quad (1.1)$$

Плоскому тензору упругости A можно поставить в соответствие на любом отрезке одномерный тензор (константу) путем его «сужения», или релаксации. Эта константа зависит от направления отрезка и задается равенством

$$\rho = (A^{-1}\eta \cdot \eta)^{-1}, \quad \eta = \tau \times \tau, \quad \tau - \text{направляющий орт отрезка,}$$

где по определению $\tau \times \tau = \{\tau^i \tau^j\}$, $\tau = (\tau^1, \tau^2)$.

Для изотропного тензора (см. (1.1)) константа ρ не зависит от направления звена и вычисляется в явном виде. Действительно, в этом случае нетрудно найти обратный тензор:

$$A^{-1}\eta = \frac{\eta}{k} - \frac{k_1}{k(k+2k_1)}E \text{Tr } \eta, \quad A^{-1}\eta \cdot \eta = \frac{\eta \cdot \eta}{k} - \frac{k_1(\text{Tr } \eta)^2}{k(k+2k_1)},$$

где η — произвольная симметрическая матрица. Для матрицы $\eta = \tau \times \tau$ имеем $\eta \cdot \eta = 1$, $\text{Tr } \eta = 1$ и поэтому

$$\rho = (A^{-1}\eta \cdot \eta)^{-1} = \hat{k} \equiv \frac{k(k+2k_1)}{k+k_1}. \quad (1.2)$$

2. Для ясности обсудим сначала классический случай одиночного горизонтального стержня $I^h = I \times [-h, h]$, $I = [0, 1]$. Будем считать, что на левом торце задано условие закрепления, а остальная часть границы стержня I^h свободна. Соответствующая задача теории упругости в обобщенной формулировке имеет вид

$$u^h \in H^1(I^h)^2, \quad u^h|_{x_1=0} = 0, \\ \int_{I^h} Ae(u^h) \cdot e(\varphi) dx = \int_{I^h} (f_1^h \varphi_1 + hf_2^h \varphi_2) dx \quad (1.3) \\ \forall \varphi \in H^1(I^h)^2, \quad \varphi|_{x_1=0} = 0.$$

Рассмотрим поведение при $h \rightarrow 0$ продольной компоненты u_1^h и поперечной компоненты hu_2^h . Чтобы говорить о предельном переходе, нужно

указать, что означает сходимость функции $g^h = g^h(x_1, x_2)$, заданной на I^h , к функции $g = g(x_1)$, заданной на I .

Последовательность $g^h \in L^2(I^h)$ назовем *ограниченной*, если

$$h^{-1} \int_{I^h} |g^h|^2 dx \leq C,$$

где C не зависит от h . Скажем, что ограниченная последовательность g^h слабо сходится к $g \in L^2(I)$, $g^h \rightharpoonup g$, если последовательность поперечных средних

$$\bar{g}^h = \bar{g}^h(x_1) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h g(x_1, x_2) dx_2$$

слабо сходится к g в $L^2(I)$. Очевидно, что L^2 -ограниченная последовательность содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.

Рассмотрим типичный пример: если g^h имеет структуру

$$g^h(x_1, x_2) = b\left(x_1, \frac{x_2}{h}\right), \quad \text{где } b \in L^2(I \times [-1, 1]),$$

то

$$g^h \rightharpoonup g = g(x_1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 b(x_1, x_2) dx_2.$$

Скажем, что g^h сильно сходится к g , $g^h \rightarrow g$, если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{I^h} |g^h - g|^2 dx = 0.$$

В указанном примере сильная сходимость наблюдается лишь в том случае, когда $b = b(x_1)$ не зависит от x_2 .

Обратимся к задаче (1.3) и предположим, что последовательности f_1^h, f_2^h являются ограниченными. Из элементарного неравенства Корна

$$\int_{I^h} (u_1^2 + h^2 u_2^2) dx \leq C \int_{I^h} e(u) \cdot e(u) dx \quad \forall u \in H^1(I^h)^2, \quad u|_{x_1=0} = 0, \quad (1.4)$$

получаем энергетическую оценку

$$\int_{I^h} e(u) \cdot e(u) dx \leq C_1 \int_{I^h} (|f_1^h|^2 + |f_2^h|^2) dx,$$

из которой видно, что последовательности u_1^h, hu_2^h ограничены и можно ставить вопрос о нахождении их слабых пределов.

ТЕОРЕМА 1.1. Предположим, что имеет место сходимость

$$f_1^h \rightharpoonup f_1, \quad \beta^h f_1^h \rightharpoonup g, \quad f_2^h \rightharpoonup f_2,$$

где $\beta^h(x) = \frac{x_2}{h}$. Тогда последовательности u_1^h, hu_2^h также сходятся, а именно

$$u_1^h \rightharpoonup u_1, \quad hu_2^h \rightharpoonup u_2.$$

При этом компонента u_1 (соответственно u_2) есть решение задачи о продольных (поперечных) колебаниях стержня I при условии, что его левый конец закреплен (жестко закреплен), а правый свободен. Более точно,

(i) компонента u_1 есть решение задачи

$$\begin{aligned} u_1 \in H^1(I), \quad u_1(0) = 0, \\ \int_I \rho u_1' \varphi' dx_1 = \int_I f_1 \varphi dx_1 \quad \forall \varphi \in H^1(I), \quad \varphi(0) = 0; \end{aligned} \quad (1.5)$$

(ii) компонента u_2 есть решение задачи

$$\begin{aligned} u_2 \in H^2(I), \quad u_2(0) = u_2'(0) = 0, \\ \frac{1}{3} \int_I \rho u_2'' \psi'' dx_1 = \int_I f_2 \psi dx_1 - \int_I g \psi' dx_1 \\ \forall \psi \in H^2(I), \quad \psi(0) = \psi'(0) = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из (1.5), (1.6) следует, что u_1 есть решение уравнения

$$-\rho u_1'' = f_1$$

с краевыми условиями

$$u(0) = u_1'(1) = 0,$$

а u_2 — решение уравнения

$$\frac{1}{3} \rho u_2'''' = f_2 + g'$$

с краевыми условиями

$$u_2(0) = u_2'(0) = u_2''(1) = u_2'''(1) = 0.$$

Таким образом, на левом конце имеем условия закрепления, а на правом — естественные условия, характеризующие свободный конец.

3. Асимптотическому анализу на тонких структурах посвящена огромная литература, отметим монографии Р. G. Ciarlet [1], С. А. Назарова [2], Г. П. Панасенко [3]. Задачи теории упругости на сочленениях стержней изучались в интересных работах С. А. Назарова и А. С. Слуцкого [4—6]. Главную проблему здесь составляет асимптотическое представление решения в окрестности узлов, формулировка условий сопряжения, которые связали бы известные уравнения на каждом отдельном звене в единую, хорошо поставленную задачу. Назаров и Слуцкий дают важную классификацию составляющих структуру F^h стержней в зависимости от характера выполняющегося на них неравенства Корна и на этой основе формируют асимптотические анзацы и условия сопряжения. Отдельным достижением С. А. Назарова и А. С. Слуцкого являются сами неравенства Корна, описание механизма «передачи» неравенств с одного стержня на другой и т. п.

В настоящей работе используются идеи С. А. Назарова и А. С. Слуцкого, но в целом развивается более простой метод, который не связан напрямую со сложными асимптотическими разложениями и ориентирован на нелинейные задачи теории упругости. Решение u^h задачи теории упругости на тонкой структуре F^h обладает определенными свойствами *ограниченности*; например, hu^h , $e(u^h)$ ограничены на каждом стержне $I^h \subset F^h$ в указанном выше смысле. Представляется естественным рассмотреть произвольную последовательность вектор-функций u^h с этими свойствами ограниченности. Наш подход основан на «структурных» теоремах следующего вида: предел всякой такой последовательности удовлетворяет условиям сопряжения в узлах и другим требованиям, совокупность которых определяет «энергетическое пространство» предельной задачи на F . После этого переход к пределу в интегральном тождестве (на основе некоторых «теорем о плотности») дает саму задачу на графе F . В нелинейном случае структурные теоремы позволяют применить вариационные соображения типа Г-сходимости функционалов энергии и получить нелинейную предельную задачу.

4. Для простоты сформулируем структурные теоремы в простейшем случае, когда F^h — это пучок сходящихся в узле O стержней, $m \geq 2$ — число стержней, закрепления отсутствуют.

Мы говорим, что последовательность функций g^h , заданных на F^h , *ограничена*, если сужения $g^h|_{I_j^h}$ на каждый стержень ограничены в указанном выше смысле. Аналогично определяется сходимость (слабая и сильная) последовательности g^h к функции g , заданной на F . На каждом звене I выбираем (одним из двух возможных способов) правую

пару из продольного и поперечного ортов τ, ν . Для вектора u^h положим

$$u_\tau^h = (u^h \cdot \tau)\tau, \quad u_\nu^h = (u^h \cdot \nu)\nu.$$

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть последовательность $u^h \in H^1(F^h)^2$ такова, что $u_\tau^h, e(u^h)$ ограничены и $u^h \rightharpoonup u$. Тогда $u \cdot \tau_j \in H^1(I_j)$ и найдется вектор C , такой, что

$$(u - C) \cdot \tau_j|_O = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.7)$$

Поясним условие сопряжения (1.7). Рассмотрим m -мерные векторы

$$\tau^{(1)} = (\tau_1^1, \dots, \tau_m^1), \quad \tau^{(2)} = (\tau_1^2, \dots, \tau_m^2).$$

Тогда условие сопряжения (1.7) эквивалентно условию

$$(u \cdot \tau_1, u \cdot \tau_2, \dots, u \cdot \tau_m)|_O \in L(\tau^{(1)}, \tau^{(2)}), \quad (1.8)$$

где $L(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$ — линейная оболочка $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}$ в \mathbb{R}^m . Отсюда видно, что в случае $m = 2$ условие (1.7) всегда выполнено.

Обозначим через \mathcal{T} множество продольных векторов на узле F , удовлетворяющих условию $u \cdot \tau_j \in H^1(I_j)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) и условию сопряжения (1.7). Норму определим как сумму H^1 -норм.

ТЕОРЕМА 1.3 (теорема о плотности). *Продольные компоненты векторов из $C^\infty(\mathbb{R}^2)^2$ плотны в пространстве \mathcal{T} .*

Эта теорема может быть получена как следствие одного результата о соболевских пространствах теории упругости на сингулярных структурах [7, лемма 6.1]. Для удобства чтения мы приводим несколько иное доказательство в п. 3 § 4.

Для скалярных функций аналог теоремы 1.2 выглядит проще.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть последовательность $u^h \in H^1(F^h)$ такова, что $u^h, \nabla u^h$ ограничены и $u^h \rightharpoonup u$. Тогда $u|_{I_j} \in H^1(I_j)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) и u непрерывна в узле. При этом сходимость u^h к u является сильной, $u^h \rightarrow u$.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть $hu^h, e(u^h)$ ограничены и $hu^h \rightharpoonup v$. Тогда

- (i) вектор v непрерывен на F ;
- (ii) на каждом звене $v \cdot \nu_j \in H^2(I_j)$, $v \cdot \tau_j = \text{const}$;
- (iii) выполнено условие сопряжения

$$(v \cdot \nu_i)'|_O = (v \cdot \nu_j)'|_O, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.9)$$

где штрих означает продольную производную:

$$(v \cdot \nu)' = \frac{d(v \cdot \nu)}{d\tau}.$$

При этом сама сходимость $h u^h$ к v является сильной, т. е. $h u^h \rightarrow v$.

Очевидно, что производная $\frac{d(v \cdot \nu)}{d\tau} = (v \cdot \nu)'$ не зависит от выбора вектора τ . Аналогично вектор $\nu(v \cdot \nu)''$ не зависит от выбора τ и обозначается через v'' , поскольку продольная составляющая вектора v постоянна. Видим, что инвариантно определены нечетные производные проекции $(v \cdot \nu)', (v \cdot \nu)''', \dots$, а также четные производные вектора v'', v''''', \dots . Аналогично обстоит дело с продольным вектором u . Для него инвариантно определены $(u \cdot \tau)', u''$.

Свойства (i)–(iii) означают, что в окрестности узла вектор v хорошо аппроксимируется жесткими перемещениями, т. е. векторами вида

$$C + t\omega(x), \quad C \in \mathbb{R}^2, \quad \omega(x) = (-x_2, x_1), \quad t \in \mathbb{R}^1. \quad (1.10)$$

Действительно, пусть узел совпадает с началом координат. Полагая $v(0) = C$, имеем

$$\begin{aligned} v(x) \cdot \tau_j &= C \cdot \tau_j, \\ v(x) \cdot \nu_j &= C \cdot \nu_j + v_j(s), \quad s = x \cdot \tau_j, \quad 0 \leq s \leq 1. \end{aligned}$$

Согласно свойствам (i)–(iii) выполнено

$$v_j \in H^2(0, 1), \quad v_j(0) = 0, \quad v_j'(0) = t, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Отсюда по формуле Тейлора

$$v(x) \cdot \nu_j = C \cdot \nu_j + ts + \int_0^s (s - \theta) v_j''(\theta) d\theta = C \cdot \nu_j + t\omega(x) \cdot \nu_j + O(|s|^{3/2}),$$

так как $ts = t(x \cdot \tau_j) = t\omega(x) \cdot \nu_j$.

Выведем из теоремы 1.5 одно важное следствие.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполнены условия теоремы 1.5 и дополнительно ограничены продольные компоненты $u^h \cdot \tau_1|_{I_1^h}$, $u^h \cdot \tau_2|_{I_2^h}$ для двух неколлинеарных стержней. Тогда вектор v является поперечным, т. е. $v \cdot \tau_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, и выполнено условие

$$v|_O = 0 \quad (\text{мягкое закрепление}).$$

Действительно, в этом случае $v \cdot \tau_1|_{I_1} = v \cdot \tau_2|_{I_2} = 0$, и поэтому для $C = v(0)$ имеем

$$C \cdot \tau_1 = C \cdot \tau_2 = 0 \implies C = 0 \implies v \cdot \tau_j = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

5. Теоремы 1.2—1.5 составляют основу техники перехода к пределу в интегральных тождествах. Важную роль будут играть различные неравенства Корна для сочленений стержней. Стоит отметить, что мы выводим эти неравенства с помощью теорем 1.2—1.5 из «элементарных» неравенств Корна на одиночном стержне. Кроме неравенства (1.4), используем еще два неравенства для одиночного стержня:

$$h^2 \int_{I^h} |\nabla u|^2 dx \leq C \int_{I^h} (e(u) \cdot e(u) + h^2 |u|^2) dx, \quad u \in H^1(I^h)^2, \quad (1.11)$$

$$\int_{I^h} |u_\tau|^2 dx \leq C \int_{I^h} (e(u) \cdot e(u) + h^2 |u_\nu|^2) dx, \quad \int_{I^h} u_\tau dx = 0, \quad u \in H^1(I^h)^2, \quad (1.12)$$

где u_τ , u_ν — продольная и поперечная составляющие вектора u .

Отметим также полезное неравенство

$$\frac{1}{2h} \int_{I^h} Ae(u) \cdot e(u) dx \geq \rho \int_I \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} \right)^2 + 3 \left(\overline{\beta^h \frac{\partial u_1}{\partial x_1}} \right)^2 \right] dx_1, \quad (1.13)$$

где $\beta^h(x) = \frac{x_2}{h}$, а черта сверху означает поперечное среднее.

Докажем это неравенство. Так как

$$Ae(u) \cdot e(u) \geq 2e(u) \cdot \xi - A^{-1}\xi \cdot \xi,$$

то, полагая

$$\xi = (p(x_1) + \beta^h(x_2)q(x_1))\eta, \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p, q \in L^2(I),$$

получим

$$\begin{aligned} \int_{I^h} Ae(u) \cdot e(u) dx &\geq 2 \int_{I^h} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} (p + \beta^h q) dx - \rho^{-1} \int_{I^h} (p + \beta^h q)^2 dx = \\ &= 2 \int_{I^h} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} p dx - \rho^{-1} \int_{I^h} p^2 dx + 2 \int_{I^h} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \beta^h q dx - \rho^{-1} \int_{I^h} \frac{x_2^2}{h^2} q^2 dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{1}{2h} \int_{I^h} Ae(u) \cdot e(u) dx \geq$$

$$\geq \int_I \left(2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} p - \rho^{-1} p^2 \right) dx_1 + \int_I \left[2 \left(\overline{\beta^h \frac{\partial u_1}{\partial x_1}} \right) q - \frac{\rho^{-1}}{3} q^2 \right] dx_1.$$

Взяв верхнюю грань по p, q , получим (1.13). Позже мы убедимся, что неравенство (1.13) является асимптотически точным.

§ 2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

1. С тонкой сеткой F^h свяжем соболевское пространство W_h — замыкание множества

$$(C_\gamma^\infty)^2 = \{ \varphi : \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)^2, \varphi \equiv 0 \text{ в окрестности выделенных торцов } \gamma_i^h \} \quad (2.1)$$

по норме

$$\left(\int_{F^h} (|\varphi|^2 + |e(\varphi)|^2) dx \right)^{1/2}.$$

При малых h рассмотрим задачу на отыскание

$$u^h \in W_h, \quad \int_{F^h} Ae(u^h) \cdot e(\varphi) dx = \int_{F^h} (hf^h + \tilde{f}^h) \cdot \varphi dx \quad \forall \varphi \in W_h, \quad (2.2)$$

причем вектор \tilde{f}^h является продольным.

Это — обобщенная, или вариационная, формулировка краевой задачи для системы теории упругости $-\operatorname{div} Ae(u^h) = hf^h + \tilde{f}^h$ в области F^h , когда на торцах γ_i^h задано условие закрепления, т. е. условие Дирихле $u^h = 0$, а на остальной части границы F^h — условие отсутствия напряжений $Ae(u^h) \cdot n = 0$, n — нормаль к границе.

Для определенности считаем, что на каждом стержне I_j^h задан «свой» вектор f_j^h , а на пересечении стержней эти векторы складываются, т. е.

$$\int_{F^h} f^h \cdot \varphi dx = \sum_j \int_{I_j^h} f_j^h \cdot \varphi dx.$$

Аналогично продольный вектор \tilde{f}^h определяется как сумма заданных на отдельных стержнях векторов \tilde{f}_j^h , $\tilde{f}_j^h \cdot \nu_j = 0$.

Предполагается, что векторы f^h , \tilde{f}^h ограничены и имеет место слабая сходимость

$$f^h \rightharpoonup f, \quad \tilde{f}^h \rightharpoonup \tilde{f}, \quad \beta^h(\tilde{f}^h \cdot \tau)\nu \rightharpoonup g, \quad (2.3)$$

где функция β^h на стержне I^h задается равенством

$$\beta^h(x) = \frac{(x - x_0) \cdot \nu}{h}, \quad x_0 \in I.$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Если граф F связан и в нем непусто множество γ (точек закрепления), то для любого стержня I^h справедливо неравенство Корна*

$$\int_{I^h} h^2 |u|^2 dx \leq C \int_{F^h} e(u) \cdot e(u) dx \quad \forall u \in (C_\gamma^\infty)^2. \quad (2.4)$$

Основные результаты будут установлены при условии связности, допускающем довольно сложные для анализа структуры. По этой причине рассмотрим сначала граф, подчиненный некоторым дополнительным условиям, указывающим, как точки закрепления γ соединяются с остальными звеньями.

Назовем путем составленную из звеньев графа ломаную. Путь называем прямым, если он принадлежит прямой.

Произведем классификацию звеньев, присваивая некоторым из них целочисленные метки. Метку «0» получают звенья прямых путей, исходящих из множества γ , в частности те звенья, у которых один из концов принадлежит множеству γ . Метку « $j+1$ » получает ранее не помеченное звено, из одного конца которого выходят два неколлинеарных звена с метками, не превосходящими « j ». Процесс присвоения меток заканчивается за конечное число шагов. *Звенья*, получившие метку, назовем *малоподвижными*, а не получившие таковой — *подвижными*.

Узел, не принадлежащий множеству γ , называем *малоподвижным*, если из него выходят два неколлинеарных малоподвижных звена. В противном случае *узел* называем *подвижным*.

ТЕОРЕМА 2.2. *Для любого малоподвижного стержня I^h выполнено неравенство Корна*

$$\int_{I^h} (|u \cdot \tau|^2 + h^2 |u|^2) dx \leq C \int_{F^h} e(u) \cdot e(u) dx \quad \forall u \in (C_\gamma^\infty)^2. \quad (2.5)$$

Назовем граф F *жестким относительно множества γ* , если подвижные звенья отсутствуют. Такими графами мы и займемся в первую очередь.

Полагая в тождестве (2.2) $\varphi = u^h$, выводим энергетическую оценку

$$\int_{F^h} \epsilon(u^h) \cdot \epsilon(u^h) dx \leq C_1 \int_{F^h} (|f^h|^2 + |\tilde{f}^h|^2) dx, \quad (2.6)$$

из которой заключаем, что u_τ^h , hu^h , $\epsilon(u^h)$ ограничены на F^h . Требуется установить сходимость $u_\tau^h \rightarrow u$, $hu^h \rightarrow v$ и найти уравнения для предельных функций.

В наших предположениях предельная задача распадается на две отдельные задачи для продольной и поперечной компонент вектора. Чтобы привести вариационную постановку этих задач, определим соответствующие им энергетические пространства.

Пространство \mathcal{T}_γ — это множество векторов v , заданных на сетке F , для которых выполнены следующие условия:

- 1) $u \cdot \nu = 0$ всюду вне узлов (условие тангенциальности);
- 2) $u \cdot \tau \in H^1(I)$ для каждого звена I (условие гладкости);
- 3) для каждого узла O найдется вектор C , такой, что имеет место равенство (1.7) (условие сопряжения в узлах);
- 4) $u|_\gamma = 0$ (условие закрепления).

Пространство \mathcal{N}_γ — это множество векторов v , заданных на сетке F , для которых выполнены следующие условия:

- 1) $v \cdot \tau = 0$ всюду вне узлов (условие поперечности);
- 2) $v \cdot \nu \in H^2(I)$ для каждого звена I (условие гладкости);
- 3) в каждом узле O имеет место равенство (1.9) (условие сопряжения в узлах);
- 4) $v = 0$ в каждом узле сетки (условие закрепления);
- 5) $v = v' = 0$ на γ (жесткое закрепление в выделенных концах).

Предельная задача для продольной компоненты имеет следующий вид: *найти вектор $u \in \mathcal{T}_\gamma$, для которого выполнено тождество*

$$\int \rho u' \cdot \varphi' d\mu = \int \tilde{f} \cdot \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}_\gamma, \quad (2.7)$$

где через μ обозначена мера, сосредоточенная на F и пропорциональная там линейной мере Лебега.

Предельная задача для поперечной компоненты имеет следующий вид: *найти вектор $v \in \mathcal{N}_\gamma$, для которого выполнено тождество*

$$\frac{1}{3} \int \rho v'' \cdot \psi'' d\mu = \int (f_\nu \cdot \psi - g \cdot \psi') d\mu \quad \forall \psi \in \mathcal{N}_\gamma. \quad (2.8)$$

Можно дать классическую постановку этих задач.

Из вариационного тождества (2.7) вытекает на каждом звене уравнение

$$-\rho u'' = \tilde{f},$$

в каждом узле O — естественное условие в виде векторного равенства для связки ортов

$$\sum_i \rho_i (u \cdot \tau_i)' \tau_i|_O = 0, \quad (2.9)$$

а в граничных точках сетки F вне γ — естественное краевое условие $u' = 0$.

Из вариационного тождества (2.8) вытекает на каждом звене уравнение

$$\frac{\rho}{3} v'''' = f_\nu + g', \quad (2.10)$$

а также в каждом узле O — естественное условие вида

$$\sum_i \rho_i (v \cdot \nu_i)''|_O = 0. \quad (2.11)$$

Кроме того, в граничных точках сетки F вне γ выполнено естественное краевое условие $v'' = v'''' = 0$.

Отметим, что в соотношениях (2.9), (2.11) все орты τ_i считаются направленными из точки O (или в точку O). К указанным естественным условиям необходимо, конечно, добавить условия сопряжения и закрепления, которые входят в определение пространств \mathcal{J}_γ и \mathcal{N}_γ .

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть u^h — решение исходной задачи (2.2), u, v — решения задач (2.7), (2.8) соответственно. Тогда

$$u_\tau^h \rightarrow u, \quad hu_\nu^h \rightarrow v, \quad u_\tau^h - u + \beta^h (v \cdot \nu)' \tau \rightarrow 0.$$

Рассмотрим некоторые примеры. Начнем обсуждение с задачи для продольной компоненты и переформулируем естественное условие в узле.

Положив

$$b_i = \rho_i (u \cdot \tau_i)',$$

непосредственно замечаем, что

$$(2.9) \iff \sum b_i \tau_i = 0 \iff b \perp L(\tau^{(1)}, \tau^{(2)}).$$

Рассмотрим простые структуры, изображенные на рис. 2. В случае a задача (2.7) распадается, оба стержня растягиваются или сжимаются независимо. Действительно, в этом случае $m = 2$, $L^\perp = \{0\}$ и

$$b_1\tau_1 + b_2\tau_2 \implies b_1 = b_2 = 0 \implies \left. \frac{d(u_\tau \cdot \tau_1)}{d\tau_1} \right|_O = \left. \frac{d(u_\tau \cdot \tau_2)}{d\tau_2} \right|_O = 0.$$

Структура b аналогична: получаем два отдельных стержня, связь в узле утрачивается, так как здесь $m = 4$, $\tau_1 = -\tau_2$, $\tau_3 = -\tau_4$,

$$(b_1 - b_2)\tau_1 + (b_3 - b_4)\tau_3 = 0 \implies b_1 = b_2, \quad b_3 = b_4.$$

В случае c задача уже не распадается, т. е. три стержня представляют связанную конструкцию.

Рассмотрим на тех же примерах задачу о поперечных колебаниях. Для всех структур a , b , c задача не распадается, стержни оказываются связанными в узле O .

Структуры d («ворота») и e не являются жесткими относительно точек закрепления и требуют дополнительного рассмотрения.

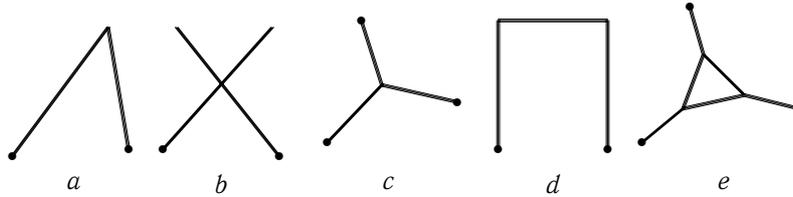


Рис. 2

2. Теперь рассмотрим граф общего вида, подчиненный только условию связности. Будем предполагать, что на подвижных стержнях продольная сила \tilde{f}^h подчинена условию

$$\int_{I^h} \tilde{f}^h dx = 0. \tag{2.12}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Справедлива энергетическая оценка (2.6).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в тождестве (2.2) $\varphi = u^h$, получим

$$c_0 \int_{F^h} e(u^h) \cdot e(u^h) dx \leq \int_{F^h} Ae(u^h) \cdot e(u^h) dx =$$

$$= \int_{F^h} h f^h \cdot u^h dx + \int_{F^h} \tilde{f}^h \cdot u_\tau^h dx = T_1 + T_2.$$

Из (2.4) следует

$$\begin{aligned} |T_1| &\leq \left(\int_{F^h} |f^h|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{F^h} h^2 |u^h|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C_1 \left(\int_{F^h} |f^h|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{F^h} e(u^h) \cdot e(u^h) dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Чтобы оценить T_2 , рассмотрим отдельно малоподвижные и подвижные стержни. На малоподвижном стержне используем неравенство

$$\int_{I^h} |u_\tau^h|^2 dx \leq C \int_{F^h} e(u^h) \cdot e(u^h) dx,$$

а для подвижного стержня запишем (см. (2.12))

$$\int_{I^h} \tilde{f}^h \cdot u_\tau^h dx = \int_{I^h} \tilde{f}^h \cdot (u_\tau^h - m^h) dx,$$

где m^h — среднее значение u_τ^h на I^h . С помощью неравенств (1.12), (2.4) разность $u_\tau^h - m^h$ оценивается через $e(u^h)$. В результате для T_2 получается неравенство вида (2.13) и энергетическая оценка (2.6) доказана.

Итак, последовательности hu^h , $e(u^h)$ ограничены на F^h . Требуется установить сходимость $hu^h \rightarrow v$ и найти уравнение для предельной функции v .

Через V_γ обозначим множество векторов v на F , удовлетворяющих условиям:

- (i) v непрерывен на F ;
- (ii) $v \cdot \nu_i \in H^2(I_i)$, $v \cdot \tau_i = c_i \equiv \text{const}$;
- (iii) в каждом узле выполнено условие сопряжения (1.9);
- (iv) $v = v' = 0$ на γ .

Норму на V_γ определим как сумму H^2 -норм сужений $v|_I$.

Отметим некоторые свойства пространства V_γ .

1°. Вектор $v \in V_\gamma$ является поперечным на любом малоподвижном стержне, т. е. $c_i = 0$. Действительно, для стержней с нулевой меткой это следует из непрерывности v и условия закрепления $v|_\gamma = 0$, аналогично для стержней с меткой «1» и т. д.

2°. Для любого подвижного звена I найдется вектор $v \in V_\gamma$, такой, что $v \cdot \tau \neq 0$.

Эти свойства можно принять в качестве другого (аналитического) определения малоподвижных и подвижных звеньев.

Теперь введем предельную задачу:

$$v \in V_\gamma, \quad \frac{1}{3} \int_F \rho v'' \cdot \psi'' d\mu = \int_F [f \cdot \psi - g \cdot \psi'] d\mu \quad \forall \psi \in V_\gamma. \quad (2.14)$$

Ниже будет показано, что эта задача имеет единственное решение.

По сравнению с задачей (2.8) здесь правая часть содержит дополнительные слагаемые, связанные с продольной компонентой на подвижных звеньях, а именно

$$\int_I f_\tau \cdot \alpha d\mu,$$

где I — подвижное звено и α — постоянная на нем продольная компонента пробного вектора $\psi \in V_\gamma$. Поперечная компонента решения v по-прежнему удовлетворяет уравнению (2.10) на каждом звене. Условие закрепления действует заведомо лишь в малоподвижных узлах, а в подвижных узлах оно заменяется в общем положении на некоторое более слабое условие сопряжения для поперечной компоненты. В результате теперь естественные краевые условия в узлах не исчерпываются соотношениями вида (2.11). К ним добавляются равенства для производных третьего порядка, число и вид которых зависят от геометрии графа F (углов между ребрами) и статуса ребер.

Разберем подробно естественные условия нового типа. В узлах O_1 и O_2 на подвижном звене I_0 (рис. 3, *a*) в ситуации общего положения (когда требование непрерывности вектора $v = \chi\nu + c\tau \in V_\gamma$ не приводит к условию закрепления $\chi_0|_{O_1} = \chi_0|_{O_2} = 0$) имеется связь между производными третьего порядка в каждом узле O_1 и O_2 , а также аналогичная связь между пучками в узлах O_1 и O_2 :

$$\sum_{O_1} \chi_k'''(\nu_0 \cdot \nu_k) = 0, \quad \sum_{O_2} \chi_j'''(\nu_0 \cdot \nu_j) = 0, \quad \sum_{O_1} \chi_k'''(\tau_0 \cdot \nu_k) = \sum_{O_2} \chi_j'''(\tau_0 \cdot \nu_j),$$

где суммирование ведется по всем звеньям, исходящим из указанного узла; при этом предполагается изотропность тензора A , т. е. $\rho_j = \rho = \text{const}$. Ситуация может видоизменяться и даже сильно упрощаться,

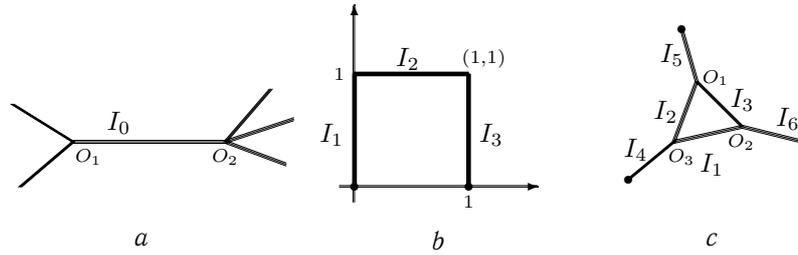


Рис. 3

если непрерывность вектора $v = \chi\nu + c\tau \in V_\gamma$ влечет условие закрепления для χ в концах подвижного звена I_0 . В разобранный ниже примере с «прямыми воротами» присутствует лишь треть из дополнительных естественных условий.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть u^h — решение исходной задачи. Тогда имеет место сильная сходимость $hu^h \rightarrow v$, где v — решение задачи (2.14).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Предельная задача (2.14) имеет единственное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что величина

$$\left(\int_F |(v \cdot \nu)''|^2 d\mu \right)^{1/2}$$

задает на \mathcal{T}_γ эквивалентную норму. В свою очередь, для этого достаточно оценки

$$J(v) \equiv \int_F (|v|^2 + |(v \cdot \nu)'|^2) d\mu \leq k \int_F |(v \cdot \nu)''|^2 d\mu, \quad v \in V_\gamma, \quad k = \text{const}(F).$$

Допуская, что эта оценка не имеет места, найдем такую последовательность $v^\varepsilon \in V_\gamma$, что

$$J(v^\varepsilon) = 1, \quad \int_F |(v^\varepsilon \cdot \nu)''|^2 d\mu \rightarrow 0. \quad (2.15)$$

Можно считать, что $v^\varepsilon \rightharpoonup v$ в V_γ , и тогда из соображений компактности получим

$$J(v) = 1. \quad (2.16)$$

Из (2.15) следует, что $v \cdot \nu$ линейна на каждом звене. Рассмотрим произвольный путь, исходящий из множества γ . Тогда $v = 0$ на непосредственно выходящем из γ звене, как это ясно из условия закрепления $v = v' = 0$ на γ . Тогда из непрерывности и условия сопряжения (1.9) следует, что $v = 0$ на следующем звене и т. д. Получим, что $v = 0$ на F , а это противоречит (2.16). Предложение доказано.

ПРИМЕР. Рассмотрим структуру d , рис. 2. Здесь штанги I_1, I_2 малоподвижны, перекладина I_3 подвижна (см. рис. 3, c). Для вектора $v \in V_\gamma$ выполнено

$$\begin{aligned} v &= (v_1(x_2), 0) \text{ на } I_1, & v &= (v_2(x_2), 0) \text{ на } I_2, \\ v &= (c, v_3(x_1)) \text{ на } I_3, & 0 &\leq x_2 \leq 1, \quad 0 \leq x_1 \leq 1. \end{aligned}$$

Условия закрепления и сопряжения дают

$$\begin{aligned} v_1(0) &= v_1'(0) = v_2(0) = v_2'(0) = 0, \\ v_1(1) &= v_2(1) = c, & v_3(0) &= v_3(1) = 0, \\ v_1'(1) &= -v_3'(0), & v_3'(1) &= -v_2'(1). \end{aligned}$$

Для простоты считаем, что тензор A изотропен. Естественные условия дают еще три соотношения:

$$v_3''(0) = v_1''(1), \quad v_3''(0) = v_2''(1), \quad v_1'''(1) = v_2'''(1),$$

которые вместе с предыдущими десятью однозначно определяют функции v_1, v_2, v_3 и константу c .

3. Рассмотрим вопрос о поведении продольной составляющей.

Выше было определено пространство \mathcal{T}_γ продольных векторов. Для любого $u \in \mathcal{T}_\gamma$ определим вектор \tilde{u} равенством

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{на малоподвижном звене,} \\ u - c & \text{на подвижном звене, где } c \text{ — среднее от } u \text{ по звену.} \end{cases}$$

Множество всех таких векторов \tilde{u} обозначим $\tilde{\mathcal{T}}_\gamma$. Норму на $\tilde{\mathcal{T}}_\gamma$ определим как сумму H^1 -норм на звеньях.

Введем задачу

$$\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{T}}_\gamma, \quad \int \rho \tilde{u}' \cdot \varphi' d\mu = \int \tilde{f} \cdot \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in \tilde{\mathcal{T}}_\gamma. \quad (2.17)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Задача (2.17) разрешима единственным образом.

Доказательство. Требуется установить, что величина

$$\left(\int |\tilde{u}'|^2 d\mu \right)^{1/2}$$

задает на $\tilde{\mathcal{T}}_\gamma$ эквивалентную норму. В свою очередь, для этого достаточно оценки

$$\int |\tilde{u}|^2 d\mu \leq k \int |\tilde{u}'|^2 d\mu, \quad \tilde{u} \in \tilde{\mathcal{T}}_\gamma, \quad k = \text{const}(F),$$

которая устанавливается примерно тем же рассуждением от противного, что и в предложении 2.6. Предложение доказано.

Напомним, что

$$\int_I \tilde{f} d\mu = 0$$

на подвижных звеньях. Отсюда вытекает, что пробные вектор-функции в (2.17) можно брать из \mathcal{T}_γ , а не только из $\tilde{\mathcal{T}}_\gamma$. Из теоремы 1.3 о плотности следует, что множество $(C_\gamma^\infty)^2$ плотно в пространстве \mathcal{T}_γ . В результате получаем эквивалентную формулировку задачи (2.17), а именно

$$\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{T}}_\gamma, \quad \int \rho \tilde{u}' \cdot \varphi' d\mu = \int \tilde{f} \cdot \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in (C_\gamma^\infty)^2. \quad (2.18)$$

Пусть W_γ — это множество продольных векторов u , удовлетворяющих следующим условиям:

- (i) $u \cdot \tau \in H^1(I)$ на каждом звене I ;
- (ii) для каждого малоподвижного узла выполнено условие согласования (1.7);
- (iii) $\int_I u d\mu = 0$ для каждого подвижного звена I ;
- (iv) $u|_\gamma = 0$.

Далее мы рассматриваем графы, для которых

$$W_\gamma = \tilde{\mathcal{T}}_\gamma. \quad (2.19)$$

Это геометрическое условие выполнено, например, для структур d , e , рис. 2, а также для любого графа, если из подвижных узлов его выходит только два ребра, или в том случае, если имеется только один подвижный узел.

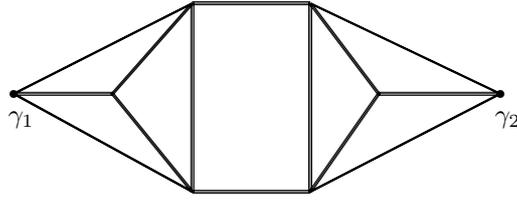


Рис. 4

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть u^h — решение исходной задачи, \tilde{u} — решение задачи (2.17). Тогда при выполнении условия (2.19) имеем:

- (i) сходимость $u_\tau^h \rightarrow \tilde{u}$ на каждом малоподвижном стержне;
- (ii) сходимость $u_\tau^h - m^h \rightarrow \tilde{u}$ на каждом подвижном стержне, где m^h — среднее u_τ^h по стержню;
- (iii) сходимость напряжений

$$A(e(u^h)) \rightarrow \rho(\tilde{u} \cdot \tau)' \eta, \quad \eta = \tau \times \tau. \quad (2.20)$$

На рис. 4 показан граф F , для которого не выполнено условие (2.19). Поведение продольной компоненты на тонкой структуре F^h с подобного рода скелетом осталось не выясненным.

§ 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ОДИНОЧНОМ СТЕРЖНЕ

1. Уточним ранее введенную слабую сходимость функции g^h , заданной на $I^h = I \times [-h, h]$, к функции g , заданной на отрезке I . Справедливо следующее свойство: если $g^h \rightarrow g$, $p^h \rightarrow p$, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{I^h} g^h p^h dx = \int_I g p dx_1. \quad (3.1)$$

Действительно, это ясно из равенства

$$\frac{1}{2h} \int_{I^h} g^h p^h dx = \int_I \bar{g}^h p dx_1 + \frac{1}{2h} \int_{I^h} g^h (p^h - p) dx,$$

так как второе слагаемое сходится к нулю в силу ограниченности g^h и сильной сходимости $p^h - p \rightarrow 0$. В частности,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{I^h} g^h \varphi dx = \int_I g \varphi dx \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2),$$

поскольку $\varphi|_{I^h} \rightarrow \varphi|_I$. Полезно также следующее свойство:

$$p^h \rightarrow p \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{I^h} |p^h|^2 dx = \int_I p^2 dx_1.$$

Чтобы не писать множитель $\frac{1}{2h}$, иногда удобно перейти от меры dx на I^h к нормированной мере μ^h , сосредоточенной на I^h и равной там $\frac{dx}{2h}$. Тогда вместо «ограниченности» можно говорить об «ограниченности в $L^2(d\mu^h)$ ».

Отметим еще некоторые простые свойства слабой сходимости.

ЛЕММА 3.1. Пусть $v^h \in H^1(I^h)$ и $v^h, \frac{\partial v^h}{\partial x_1}$ ограничены. Тогда (с точностью до подпоследовательности)

$$v^h \rightharpoonup v, \quad \frac{\partial v^h}{\partial x_1} \rightharpoonup \frac{\partial v}{\partial x_1}, \quad \text{где } v \in H^1(I).$$

При этом сходимость \bar{v}^h поперечных средних равномерна на I . Если дополнительно $v^h|_{x_1=0} = 0$, то $v(0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как

$$\frac{\partial \bar{v}^h}{\partial x_1} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \frac{\partial}{\partial x_1} v^h(x_1, x_2) dx_2, \quad (3.2)$$

то достаточно ссылки на простейшие свойства соболевского пространства $H^1(I)$. Равенство $v(0) = 0$ обеспечивается равномерной сходимостью $\bar{v}^h \rightarrow v$ на I .

ЛЕММА 3.2. Если $v^h, \nabla v^h$ ограничены, то v^h компактна в смысле сильной сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (3.2) следует, что \bar{v}^h ограничена в $H^1(I)$ и поэтому компактна в $L^2(I)$. По неравенству Пуанкаре

$$\int_{-h}^h |v^h(x_1, x_2) - \bar{v}^h(x_1)|^2 dx_2 \leq ch^2 \int_{-h}^h \left| \frac{\partial v^h}{\partial x_2} \right|^2 dx_2,$$

$$\frac{1}{2h} \int_{I^h} |v^h - \bar{v}^h|^2 dx \leq ch \int_{I^h} \left| \frac{\partial v^h}{\partial x_2} \right|^2 dx \leq c_1 h,$$

поэтому компактность v^h очевидна.

2. Здесь мы устанавливаем ряд вспомогательных фактов, которые существенно используются в дальнейшем. Из методических соображений мы уделяем, быть может, преувеличенное внимание задаче (1.3) на одном стержне, демонстрируя различные подходы, применимые и в более сложной ситуации сочленения стержней.

Изучим поведение продольной компоненты u_1^h . Данный вопрос может быть решен в форме более общей, чем это требуется для теоремы 1.1. А именно не будем задавать никаких условий на торцах стержня I^h , предполагая только выполнение тождества (1.3) на гладких φ , равных нулю в окрестности торцов. Поскольку неравенство Корна теперь не действует, считаем, что u_1^h , $e(u^h)$ ограничены. Без потери общности рассматриваем

$$u_1^h \rightharpoonup u_1, \quad \frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} \rightharpoonup \frac{\partial u_1}{\partial x_1}.$$

Лемма 3.3. Имеет место слабая сходимост напряжений

$$A(e(u^h)) \rightharpoonup \rho \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \eta, \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть

$$e(u^h) \rightharpoonup p = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда предельный переход в тождестве (1.3) дает

$$\int_I Ap \cdot e(\varphi) dx_1 = \int_I f_1 \varphi_1 dx_1.$$

Положим здесь $\varphi = (2\alpha(x_1)x_2, \beta(x_1)x_2)$, где $\alpha, \beta \in C_0^\infty(I)$. Так как

$$e(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

на I , то

$$\int_I Ap \cdot \lambda dx_1 = 0, \quad \text{где } \lambda = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

В силу произвольности α, β матрица Ap тангенциальна, т. е. имеет вид $Ap = a\eta$. Отсюда

$$p \cdot \eta = aA^{-1}\eta \cdot \eta, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = aA^{-1}\eta \cdot \eta \implies a = \rho \frac{\partial u_1}{\partial x_1},$$

и лемма доказана.

Из этой леммы очевидно следует утверждение теоремы 1.1 о сходимости продольных компонент.

Сходимость напряжений можно сформулировать и для подвижного стержня, когда нет ограниченности u_1^h , но есть ограниченность hu_2^h . Из оценки (1.12) следует, что ограничена последовательность $u_1^h - m_1^h$, где m_1^h — среднее u_1^h по I^h . Поэтому

$$A(e(u^h)) \rightharpoonup \rho \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} \eta,$$

где \tilde{u}_1 — слабый предел разности $u_1^h - m_1^h$. В случае стержня с произвольным направлением сходимость напряжений имеет вид (2.20), где

$$\tilde{u} = \begin{cases} \text{слабый предел } u_\tau^h, & \text{если } u_\tau^h \text{ ограничена,} \\ \text{слабый предел } u_\tau^h - m^h, & \text{если ограничена лишь } hu_\nu^h. \end{cases} \quad (3.3)$$

3. Уточним свойства сходимости на горизонтальном стержне I^h для последовательности гладких векторов, таких, что

$$e(u^h), u_1^h, hu_2^h \text{ ограничены в } L^2(d\mu^h). \quad (3.4)$$

В силу неравенства Корна (1.11) ограничена также последовательность $h\nabla u^h$. Можно считать (см. леммы 3.1, 3.2), что

$$u_1^h \rightharpoonup u_1, \quad hu_2^h \rightharpoonup u_2, \quad u_1, u_2 \in H^1(I). \quad (3.5)$$

Лемма 3.4. *Компонента u_2 принадлежит $H^2(I)$, и имеет место сильная сходимость*

$$u_1^h(x_1, hx_2) \rightarrow u_1(x_1) - x_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x_1) \text{ в } L^2(Q), \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial u_1^h}{\partial x_1}(x_1, hx_2) \rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x_1) - x_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}(x_1) \text{ в } L^2(Q), \quad Q = I \times [-1, 1]. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем замену

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = h^{-1}x_2, \quad v_1 = u_1, \quad v_2 = hu_2, \quad (3.8)$$

для вектора $v^h = v^h(y)$, заданного на фиксированном прямоугольнике $Q = I \times [-1, 1]$, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h} \int_{I^h} e(u^h) \cdot e(u^h) dx = \\ & = \frac{1}{2} \int_Q \left[\left(\frac{\partial v_1^h}{\partial y_1} \right)^2 + \frac{h^{-2}}{2} \left(\frac{\partial v_1^h}{\partial y_2} + \frac{\partial v_2^h}{\partial y_1} \right)^2 + h^{-4} \left(\frac{\partial v_2^h}{\partial y_2} \right)^2 \right] dy \leq C, \\ & \int_Q |v^h|^2 dy \leq C. \end{aligned}$$

Без потери общности считаем, что $v^h \rightharpoonup v$ в $H^1(Q)^2$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} v_2 &= v_2(y_1), \quad \frac{\partial v_1}{\partial y_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y_1} = 0, \\ v_1 &= -y_2 \frac{\partial v_2}{\partial y_1} + g(y_1), \quad g(y_1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v_1 dy_2, \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 y_2 v_1 dy_2 &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 y_2^2 \frac{\partial v_2}{\partial y_1} dy_2 = -\frac{1}{3} \frac{\partial v_2(y_1)}{\partial y_1} \implies v_2 \in H^2(I). \end{aligned}$$

Проверим равенства $g = u_1$, $v_2 = u_2$. Для $\alpha \in C_0^\infty(I)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_I \bar{u}_1^h \alpha dx_1 &= \frac{1}{2h} \int_{I^h} u_1^h \alpha dx = \frac{1}{2} \int_Q v_1^h \alpha dy \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{1}{2} \int_Q v_1 \alpha dy = \int_0^1 g(x_1) \alpha(x_1) dx_1, \end{aligned}$$

что дает сходимость $\bar{u}_1^h \rightharpoonup g$ в $L^2(I)$ и равенство $u_1 = g$. Равенство $u_2 = v_2$ устанавливается аналогично. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.5. Имеют место соотношения

$$u_1^h - u_1 + \frac{x_2}{h} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \rightarrow 0, \quad (3.9)$$

$$\beta^h u_1^h \rightharpoonup -\frac{1}{3} u_2', \quad (3.10)$$

$$\beta^h \frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} \rightharpoonup -\frac{1}{3} u_2''. \quad (3.11)$$

Кроме того, если дополнительно $u^h|_{x_1=0} = 0$, то

$$u_1(0) = u_2(0) = u_2'(0) = 0 \quad (\text{наследование условий закрепления}).$$

Доказательство. Соотношение (3.9) следует из (3.6). Достаточно проверить только соотношение (3.10), поскольку все остальные утверждения уже будут следовать из леммы 3.1, примененной к последовательности $v^h = \beta^h u_1^h$ и $v^h = h u_2^h$.

Для $\alpha \in C_0^\infty(I)$ из сильной сходимости (3.9) имеем при $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\frac{1}{2h} \int_{-h}^h \frac{x_2}{h} u_1^h dx_2 \right) \alpha(x_1) dx_1 = \frac{1}{2h} \int_{I^h} \frac{x_2}{h} u_1^h \alpha dx = \\ & = \frac{1}{2h} \int_{I^h} \frac{x_2}{h} u_1(x_1) \alpha(x_1) dx - \frac{1}{2h} \int_{I^h} \left(\frac{x_2}{h} \right)^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x_1) \alpha(x_1) dx_1 + o(1) = \\ & = -\frac{1}{3} \int_I \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \alpha dx_1 + o(1), \end{aligned}$$

поскольку

$$\int_{-1}^1 y_2 dy_2 = 0, \quad \int_{-1}^1 y_2^2 dy_2 = \frac{2}{3}.$$

Лемма доказана.

Ослабим условие ограниченности (3.4), а именно пусть ограничены только $h u_2^h$, $e(u^h)$. Из оценки (1.12) следует ограниченность последовательности $u_1^h - m_1^h$, где m_1^h — среднее значение u_1^h ,

$$m_1^h = \frac{1}{2h} \int_{I^h} u_1^h dx.$$

Поэтому из предыдущих результатов получаем сходимость

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1^h \equiv u_1^h - m_1^h & \rightarrow u_1, \quad \tilde{u}_1^h - u_1 + \frac{x_2}{h} u_2' \rightarrow 0, \\ \frac{x_2}{h} (u_1^h - m_1^h) & \rightharpoonup -\frac{1}{3} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

а соотношение (3.11) остается без изменений.

ЛЕММА 3.6. Пусть hu_2^h , $e(u^h)$ ограничены. Тогда (с точностью до подпоследовательности) имеют место соотношения (3.11), (3.12). Кроме того, если дополнительно ограничена последовательность hu_1^h , то $hu_1^h \rightarrow c$, где c — константа, $c = \lim_{h \rightarrow 0} hm_1^h$, m_1^h — среднее значение u_1^h .

В случае стержня I^h произвольного направления сходимость (3.11) принимает вид

$$\beta^h e(u^h) \cdot \eta \rightarrow -\frac{1}{3}(u \cdot \nu)''. \quad (3.13)$$

Для вертикального стержня с ортами $\tau = (0, 1)$, $\nu = (-1, 0)$ имеем $\beta^h(x) = -\frac{x_1}{h}$,

$$\frac{x_1}{h}(u_2^h - m_2^h) \rightarrow \frac{1}{3}(u \cdot \nu)' = -\frac{1}{3} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad (3.14)$$

4. В дальнейшем важную роль играют специальные продолжения на полосу I^h для поперечных векторов, заданных на отрезке I .

ЛЕММА 3.7. Для гладкого на замкнутом отрезке I вектора $z(x_1) = (0, \psi(x_1))$ существует продолжение z^h на полосу I^h , такое, что

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & Ae(z^h) = -x_2 \rho \psi''(x_1) \eta + O(h^2), \\ \text{(ii)} \quad & z_1^h = -x_2 \psi'(x_1) + O(h^2), \\ \text{(iii)} \quad & z_2^h = \psi + O(h). \end{aligned} \quad (3.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$z^h(x) = \left(-x_2 \psi'(x_1) - \gamma \psi''(x_1) x_2^2, \psi(x_1) - \alpha \psi''(x_1) \frac{x_2^2}{2} \right), \quad (3.16)$$

где α, γ — подлежащие определению константы. Вычисления дают

$$\begin{aligned} -e(z^h) &= \begin{pmatrix} \psi''(x_1) x_2 & \gamma \psi''(x_1) x_2 \\ \gamma \psi''(x_1) x_2 & \alpha \psi''(x_1) x_2 \end{pmatrix} + O(h^2) = \\ &= \psi''(x_1) x_2 \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} + O(h^2). \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы матрица

$$A \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

была пропорциональна

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$A \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} = c\eta \implies \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} = cA^{-1}\eta \text{ и } c = (A^{-1}\eta \cdot \eta)^{-1} = \rho.$$

Таким образом, выбор констант α , γ однозначно определен и все свойства (3.15) выполнены. Лемма доказана.

5. Теперь мы в состоянии доказать утверждение теоремы 1.1 о пределе поперечной компоненты.

Возьмем поперечный вектор $z = (0, \psi(x_1))$, где ψ — гладкая функция, равная нулю в окрестности точки $x_1 = 0$. Тогда построенное в лемме 3.7 продолжение z^h удовлетворяет условию закрепления $z^h|_{x_1=0} = 0$.

Преобразуя левую и правую части тождества (1.3) с пробной функцией $\varphi = z^h$, получаем

$$\begin{aligned} \int Ae(u^h) \cdot e(z^h) d\mu^h &= \int e(u^h) \cdot Ae(z^h) d\mu^h = \\ &= -h\rho \int \frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} \frac{x_2}{h} \psi'' d\mu^h + O(h^2), \\ &\int f_1^h z_1^h d\mu^h + h \int f_2^h \cdot z_2^h d\mu^h = \\ &= -h \int f_1^h \frac{x_2}{h} \psi' d\mu^h + O(h^2) + h \int f_2^h \psi d\mu^h. \end{aligned}$$

Отсюда после деления на h в силу (1.3) выводим равенство

$$-\rho \int \frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} \frac{x_2}{h} \psi''(x_1) d\mu^h = \int f_2^h \psi d\mu^h - \int f_1^h \frac{x_2}{h} \psi'(x_1) d\mu^h + O(h),$$

в котором перейдем к пределу. Предел левой части найдем по лемме 3.5, а предел правой части очевиден в силу слабой сходимости $f_2^h \rightharpoonup f_2$, $\beta^h f_1^h \rightharpoonup g$. В итоге получаем (1.6), и теорема 1.1 полностью доказана.

6. Вернемся к первой части теоремы 1.1 и докажем сходимость продольной компоненты несколько иным способом. Сначала отметим один результат о продолжении продольного вектора.

Лемма 3.8. Для гладкого на отрезке I вектора $z(x_1) = (\psi(x_1), 0)$ найдется такое продолжение на полосу I^h , что

$$Ae(z^h) = \rho\psi'\eta + O(h), \quad z^h = z + O(h).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно взять

$$z^h(x) = (\psi(x_1) + 2\gamma x_2 \psi'(x_1), \alpha x_2 \psi'(x_1)), \quad (3.17)$$

где α, γ — те же константы, что и в (3.16). Действительно,

$$e(z^h) = \psi' \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} + O(h), \quad Ae(z^h) = \psi'(x_1)A \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} + O(h).$$

Лемма доказана.

Пусть ψ равна нулю в окрестности точки $x_1 = 0$. Тогда продолжение z^h удовлетворяет условию закрепления $z^h|_{x_1=0} = 0$. Рассматривая левую и правую части тождества (1.3) с пробной функцией $\varphi = z^h$, получим

$$\begin{aligned} \int Ae(u^h) \cdot e(z^h) d\mu^h &= \int e(u^h) \cdot Az^h d\mu^h = \rho \int \frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} \psi' d\mu^h + O(h), \\ (f_1^h z_1^h + h f_2^h z_2^h) d\mu^h &= \int f_1^h \psi d\mu^h + O(h). \end{aligned}$$

Предельный переход легко приводит к тождеству (1.5).

7. Обсудим некоторые свойства типа свойств Γ -сходимости функционалов энергии.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. Для всякой последовательности, удовлетворяющей условиям (3.4), (3.5), выполнено неравенство

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{I^h} Ae(u^h) \cdot e(u^h) dx \geq \rho \int_I \left[(u_1')^2 + \frac{1}{3} (u_2'')^2 \right] dx_1. \quad (3.18)$$

Это свойство («полунепрерывности снизу») непосредственно следует из (1.13), (3.11) и слабой сходимости

$$\frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} \rightharpoonup \frac{\partial u_1}{\partial x_1}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.10. Для любых $u_1 \in H^1(I)$, $u_2 \in H^2(I)$ найдется удовлетворяющая условиям (3.4), (3.5) последовательность u^h , для которой в (3.18) наблюдается точное равенство, т. е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{I^h} Ae(u^h) \cdot e(u^h) dx = \rho \int_I \left[(u_1')^2 + \frac{1}{3} (u_2'')^2 \right] dx_1. \quad (3.19)$$

Кроме того, если дополнительно выполнены условия закрепления $u_1(0) = u_2(0) = u_2'(0) = 0$, то и последовательность u^h можно выбрать удовлетворяющей условию $u^h|_{x_1=0} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся тем случаем, когда u_1, u_2 имеют большую гладкость, например $u_1 \in H^2(I), u_2 \in H^4(I)$, и сразу предполагаем условия закрепления. Определим продолжение векторов $(u_1, 0), h^{-1}(0, u_2)$ на полосу I^h по формулам

$$\begin{aligned} U_1^h &= (u_1 + 2\gamma x_2 u_1' \chi_h, \alpha x_2 u_1' \chi_h), \\ U_2^h &= h^{-1} \left(-x_2 u_2' - \gamma x_2^2 u_2'' \chi_h, u_2 - \alpha \frac{x_2^2}{2} u_2'' \chi_h \right), \end{aligned}$$

где α, γ — те же константы, что и в (3.14), (3.15), а $\chi_h(x_1) = \chi(h^{-1}x_1)$, $\chi(t)$ — гладкая функция на $[0, \infty)$, такая, что

$$\chi(t) = 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq 1, \quad \chi(t) = 1 \quad \text{при } t \geq 2.$$

Имеем

$$e(U_1^h) = u_1' \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} + R_1^h, \quad Ae(U_1^h) = \rho u_1' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + AR_1^h,$$

где матрица R_1^h состоит из элементов, представляющих собой линейные комбинации выражений вида $x_2(u_1' \chi_h)'$ и $(\chi_h - 1)u_1'$, и допускает оценку

$$\int_{I^h} |R_1^h|^2 dx \leq ch^2.$$

Аналогично

$$e(U_2^h) = -\frac{x_2}{h} u_2'' \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} + R_2^h, \quad Ae(U_2^h) = -\frac{x_2}{h} \rho u_2'' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + AR_2^h.$$

Для суммы $u^h = U_1^h + U_2^h$ выполнено

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h} \int_{I^h} Ae(u^h) \cdot e(u^h) dx = \frac{1}{2h} \left[\int_{I^h} Ae(U_1^h) \cdot e(U_1^h) dx + \right. \\ & \quad \left. + 2 \int_{I^h} Ae(U_1^h) \cdot e(U_2^h) dx + \int_{I^h} Ae(U_2^h) \cdot e(U_2^h) dx \right] = \\ & = \frac{1}{2h} \left[\int_{I^h} \rho (u_1')^2 dx - 2 \int_{I^h} \rho u_1' \frac{x_2}{h} u_2'' dx + \rho \int_{I^h} \left(\frac{x_2}{h} \right)^2 (u_2'')^2 dx \right] + O(h) = \end{aligned}$$

$$= \rho \int_I \left[(u_1')^2 + \frac{1}{3}(u_2'')^2 \right] dx_1 + O(h),$$

и поэтому равенство (3.19) имеет место. Предложение доказано.

Из доказанных свойств Γ -сходимости можно легко получить еще одно доказательство теоремы 1.1, если записать исходную задачу (1.3) в вариационной форме. Такого рода вопросы о связи Γ -сходимости функционалов энергии со сходимостью минимизантов подробно рассмотрены в § 6 для нелинейных задач на тонкой структуре F^h .

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СТРУКТУРНЫХ ТЕОРЕМ ДЛЯ УЗЛА

1. Докажем теорему 1.2. Так как принадлежность $u \cdot \tau_j \in H^1(I_j)$ следует из результатов для отрезка, то требуется проверить условие согласования (1.7).

Возьмем произвольный вектор

$$b \in L(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})^\perp, \quad b = (b_1, \dots, b_m), \quad \text{т. е.} \quad \sum_{i=1}^m b_i \tau_i = 0. \quad (4.1)$$

Обозначим через Q_h объединение «выходящих» из узла O «коротких» h -стержней, а именно имеющих длину $4h$, и пусть Γ_i ($i = 1, \dots, m$) — внешние торцы этих стержней (см. рис. 5, отвечающий случаю $m = 3$). Считаем, что узел O находится в начале координат.

Рассмотрим задачу Неймана

$$w \in H^1(Q_h)^2, \quad \operatorname{div} e(w) = 0 \text{ в } Q_h, \quad e(w)n|_{\partial Q_h} = g, \quad (4.2)$$

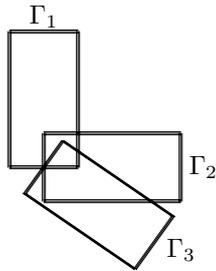


Рис. 5

$$g = \begin{cases} b_i \tau_i & \text{на } \Gamma_i \ (i = 1, 2, \dots, m), \\ 0 & \text{на остальной части } \partial Q_h, \end{cases}$$

где n — единичная внешняя нормаль к ∂Q_h . Эта задача разрешима, так как функция g удовлетворяет условию

$$\int_{\partial Q_h} g(x) \cdot r(x) d\sigma = 0, \quad (4.3)$$

где $r(x)$ — произвольное жесткое перемещение на плоскости, $r(x) = c + t\omega$, $\omega(x) = (-x_2, x_1)$, $c \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}^1$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_{\partial Q_h} g \cdot r d\sigma &= \sum_i \left(\int_{\Gamma_i} b_i \tau_i \cdot c d\sigma + t b_i \int_{\Gamma_i} \tau_i \cdot \omega d\sigma \right) = \\ &= 2hc \cdot \sum b_i \tau_i + t \sum b_i \int_{\Gamma_i} \nu_i \cdot x dx = 0, \end{aligned}$$

где использовано условие (4.1) и равенство $\tau_i \cdot \omega = \nu_i \cdot x$.

Решение задачи (4.2) определяется с точностью до жесткого перемещения. Выберем решение ортогональным на Q_h всем жестким перемещениям и докажем для него оценку

$$\int_{Q_h} |e(w)|^2 dx \leq Ch^2. \quad (4.4)$$

Из интегрального тождества для решения задачи (4.2) имеем

$$\begin{aligned} \int_{Q_h} |e(w)|^2 dx &= \int_{\partial Q_h} e(w)n \cdot w d\sigma = \\ &= \sum_i \int_{\Gamma_i} b_i \tau_i \cdot w d\sigma_i \leq Ch^{1/2} \left(\int_{\partial Q_h} |w|^2 d\sigma \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

После этого достаточно воспользоваться неравенством для следа

$$\int_{\partial Q_h} |w|^2 d\sigma \leq hC \int_{Q_h} |\nabla w|^2 dx$$

и неравенством Корна

$$\int_{Q_h} |\nabla w|^2 dx \leq C \int_{Q_h} |e(w)|^2 dx,$$

чтобы получить оценку (4.4). Теперь по формуле Остроградского

$$\frac{1}{2h} \int_{Q_h} e(u^h) \cdot e(w) dx = \sum_i b_i \frac{1}{2h} \int_{\Gamma_i} u^h \cdot \tau_i d\sigma.$$

Левая часть сходится к нулю при $h \rightarrow 0$ благодаря оценке (4.4) и ограниченности $e(u^h)$, а правая часть содержит поперечные средние, которые сходятся к $u \cdot \tau_i|_O$. В результате получаем, что вектор

$$(u \cdot \tau_1, u \cdot \tau_2, \dots, u \cdot \tau_m)|_O$$

ортогонален вектору b . Поскольку вектор $b \in L(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})^\perp$ произволен, условие (1.7) установлено. Теорема 1.2 доказана.

Скалярный вариант этой теоремы — теорема 1.4 — более прост. Доказательство можно провести по той же схеме со значительными упрощениями, например можно ограничиться двумя стержнями.

2. Теперь докажем теорему 1.5. Требуется проверить только условия сопряжения (1.9), поскольку остальные утверждения следуют из результатов для одиночного стержня. Достаточно рассмотреть два сходящихся в узле O неколлинеарных звена. Пусть для простоты это будут единичные отрезки I_1, I_2 , исходящие из начала координат в направлении координатных осей. На отрезках I_1 и I_2 имеем соответственно $\tau = (1, 0)$, $\nu = (0, 1)$ и $\tau = (0, 1)$, $\nu = (-1, 0)$. Поэтому

$$u \cdot \nu|_{I_1} = u_2(x_1, 0), \quad u \cdot \nu|_{I_2} = -u_1(0, x_2),$$

и требует проверки равенство

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x_1, 0) \Big|_0 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(0, x_2) \Big|_0 = 0. \quad (4.5)$$

Соответствующая этому случаю область Q_h (введенная в п. 1) представляет собой «уголок» с торцами Γ_1, Γ_2 (рис. 6). В области Q_h рассмотрим задачу Неймана (4.2), в которой

$$g = \begin{cases} \frac{x_2}{h} \tau_1 & \text{на } \Gamma_1, \\ \frac{x_1}{h} \tau_2 & \text{на } \Gamma_2, \\ 0 & \text{на остальной части } \partial Q_h. \end{cases}$$

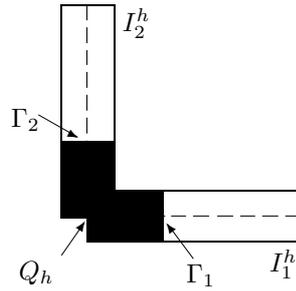


Рис. 6

Нетрудно показать, что для вектора g выполнено условие (4.3), обеспечивающее разрешимость задачи (4.2). Тем же способом, что и в п. 1, устанавливается оценка (4.4) для решения w , ортогонального на Q_h всем жестким перемещениям.

По формуле Остроградского имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h} \int_{Q_h} e(u^h) \cdot e(w) dx &= \frac{1}{2h} \int_{\Gamma_1} \frac{x_2}{h} u_1^h d\sigma + \frac{1}{2h} \int_{\Gamma_2} \frac{x_1}{h} u_2^h d\sigma = \\ &= \frac{1}{2h} \int_{\Gamma_1} \frac{x_2}{h} (u_1^h - m_1^h) d\sigma + \frac{1}{2h} \int_{\Gamma_2} \frac{x_1}{h} (u_2^h - m_2^h) d\sigma, \end{aligned}$$

где m_1^h, m_2^h — средние u_1^h и u_2^h по стержню I_1^h или I_2^h соответственно. Левая часть этого равенства стремится к нулю благодаря оценке (4.4) и ограниченности $e(u^h)$. Найдём предел каждого из двух слагаемых справа. Из (3.12) получим

$$z_1^h \equiv \frac{x_2}{h} (u_1^h - m_1^h) \rightarrow -\frac{1}{3} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}.$$

Так как последовательность $\frac{\partial z_1^h}{\partial x_1}$ ограничена, то сходимость поперечных средних $\bar{z}_1^h \rightarrow -\frac{1}{3} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ является равномерной на I_1 (см. лемму 3.1). Отсюда заключаем, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{\Gamma_1} \frac{x_2}{h} (u_1^h - m_1^h) d\sigma = -\frac{1}{3} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Big|_O.$$

Аналогично можно получить соотношение (см. (3.14))

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{\Gamma_2} \frac{x_1}{h} (u_2^h - m_2^h) d\sigma = -\frac{1}{3} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Big|_O,$$

и равенство (4.5) установлено. Теорема доказана.

3. В этом пункте докажем теорему 1.3. Обозначим через \mathcal{T}' замыкание по H^1 -норме множества продольных компонент векторов из $C^\infty(\mathbb{R}^2)^2$. Поскольку сходимость по H^1 -норме влечет равномерную сходимость, то условие (1.7) наследуется функцией $u \in \mathcal{T}'$ от сходящейся к ней последовательности $u_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)^2$. Поэтому $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Предположим, что

$$\exists u \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}': (u, \varphi) \equiv \int (u' \cdot \varphi' + u \cdot \varphi) d\mu = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}'. \quad (4.6)$$

Можно считать, что $C = 0$ в условии (1.7) для функции u . Кроме того, пусть начало координат совпадает с узлом O . Возьмем $\chi_h(x) = \chi(h^{-1}|x|)$, где $\chi(t) = 0$ при $t < \frac{1}{2}$, $\chi(t) = 1$ при $t > 1$. Тогда $\chi_h u \in \mathcal{T}'$ и по неравенству Коши—Буняковского $|u(x)|^2 = O(h)$ при $|x| < h$. Отсюда, взяв в (4.6) $\varphi = \chi_h u$, выведем

$$\int \chi_h (|u'|^2 + |u|^2) d\mu = - \int u' \cdot u \chi_h' d\mu \equiv J(h),$$

где

$$|J(h)|^2 \leq \int_{|x| \leq h} |u'|^2 d\mu \cdot Ch^{-2} \int_{|x| \leq h} |u|^2 d\mu = o(1) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Переходя к пределу, получаем $(u, u) = 0$, откуда $u \equiv 0$, т. е. $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. Теорема доказана.

§ 5. ВЫВОД ПРЕДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Докажем основную теорему 2.8 о сходимости продольной компоненты. Определим продольный вектор \tilde{u} соотношением (3.3) на мало-подвижных и подвижных звеньях. Тогда из теоремы 1.2 следует, что

сужение \tilde{u} на малоподвижную часть удовлетворяет условию сопряжения (1.7) и, значит, $\tilde{u} \in W_\gamma$. Далее мы существенно опираемся на предположение (2.19), согласно которому вектор \tilde{u} принадлежит пространству $\tilde{\mathcal{T}}_\gamma$. Из сходимости напряжений (2.20) (доказана в п. 2 § 3) получаем соотношение (2.18), которое (как отмечено в конце § 2) означает, что \tilde{u} есть решение предельной задачи (2.17). Теорема 2.8 доказана.

2. Через D обозначим множество векторов из V_γ , которые линейны на звеньях вблизи каждого узла и финитны около точек γ . Легко видеть, что множество D плотно в V_γ .

Лемма 5.1. *Для любого вектора $\psi \in D$ найдется его продолжение $\psi^h = \psi^h(x)$ на сетку F^h , такое, что*

- (i) $e(\psi^h) = 0$ в окрестности каждого узла;
 - (ii) $Ae(\psi^h) = -h\rho(\psi \cdot \nu)''\beta^h\eta + O(h^2)$;
 - (iii) $\psi_\tau^h = \psi_\tau - h\beta^h(\psi \cdot \nu)'\tau + O(h^2)$, $\psi^h = \psi + O(h)$.
- (5.1)

Доказательство. На каждом отдельном стержне продолжим вектор ψ по формуле вида (3.16), а затем покажем, что продолжения совпадают в пересечении стержней. Достаточно рассмотреть случай двух стержней — горизонтального и вертикального; узел — начало координат. Имеем

$$\begin{aligned}\psi|_{I_1} &= (c_1, a_1(x_1)), \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \\ \psi|_{I_2} &= (a_2(x_2), c_2), \quad 0 \leq x_2 \leq 1,\end{aligned}$$

где функции a_1, a_2 линейны вблизи нуля, а по условиям согласования

$$\begin{aligned}a_2(0) &= c_1, \quad c_2 = a_1(0), \\ -a_2'(0) &= a_1'(0) = t.\end{aligned}$$

Положив

$$\begin{aligned}\psi^h|_{I_1^h} &= \left(c_1 - x_2 a_1' - \gamma a_1'' x_2^2, a_1 - \alpha a_1'' \frac{x_2^2}{2}\right), \\ \psi^h|_{I_2^h} &= \left(a_2 - \alpha a_2'' \frac{x_1^2}{2}, c_2 - x_1 a_2' - \gamma a_2'' \frac{x_1^2}{2}\right),\end{aligned}$$

имеем около узла

$$\psi^h|_{I_1^h} = (c_1 - x_2 t, c_2 + t x_1), \quad \psi^h|_{I_2^h} = (c_1 - x_2 t, c_2 + t x_1).$$

Лемма доказана.

3. Теперь докажем основную теорему 2.5 о пределе hu^h .

В интегральном тождестве (2.2) возьмем пробную функцию $\varphi(x) = \psi^h(x)$, где $\psi^h(x)$ — рассмотренное в лемме 5.1 продолжение на F^h вектора $\psi(x) \in D$,

$$\begin{aligned} \int_{F^h} Ae(u^h) \cdot e(\psi^h) dx &= \int_{F^h} e(u^h) \cdot A\psi^h dx = \\ &= h \int_{F^h} f^h \cdot \psi^h dx + \int_{F^h} \tilde{f}^h \cdot \psi^h dx. \end{aligned}$$

Преобразуем левую и правую части этого тождества, используя свойства входящих в него функций. Тогда с учетом (5.1) получим

$$\begin{aligned} -h \int_{F^h} e(u^h) \cdot \eta \beta^h(\psi \cdot \nu)'' dx &= \\ = h \int_{F^h} f^h \cdot \psi dx - h \int_{F^h} \beta^h(f_\tau^h \cdot \tau)(\psi \cdot \nu)' dx &+ O(h^3). \end{aligned}$$

После деления на h^2 и перехода к пределу при $h \rightarrow 0$, используя (3.13), (2.3), получаем тождество (2.14) с пробной функцией $\psi \in D$. Так как D плотно в V_γ , то теорема доказана.

4. Рассмотрим один пример. Для структуры e , рис. 2, обозначим звенья и узлы так, как указано на рис. 3, *с*. Чтобы однозначно определить решение $v = \chi\nu + c\tau \in V_\gamma$ задачи (2.14), требуется 27 соотношений в узлах и граничных точках. Укажем, откуда они берутся. Условия жесткого закрепления в концевых точках, а также условия сопряжения производных первого порядка и условие непрерывности в узлах порождают по шесть соотношений (в итоге восемнадцать). Кроме того, имеется девять естественных условий: по три соотношения для производных второго и третьего порядка в каждом из трех узлов, а также для связи между производными третьего порядка в каждой из трех пар пучков. Остановимся подробнее на соотношениях для компонент вектора v , вытекающих из непрерывности вектора v . Считая свободными неизвестными константы c_1, c_2, c_3 — продольные компоненты на подвижных звеньях I_1, I_2, I_3 , а также $\chi_1|_{O_3}, \chi_1|_{O_2}, \chi_3|_{O_1}$ — граничные значения поперечных компонент на этих звеньях, выражаем через них остальные граничные значения на всех шести звеньях, например $\chi_4|_{O_3} = (c_1\tau_1 + \chi_1|_{O_3}\nu_1) \cdot \nu_4$ и т. д.

§ 6. О НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ

1. Пусть $\Phi(\xi)$, где ξ — симметрическая матрица 2×2 , есть плотность упругой энергии, относительно которой предполагается выпуклость, p -однородность, т. е. $\Phi(t\xi) = |t|^p \Phi(\xi)$, $p > 1$, и выполнение оценки

$$c_0 |\xi|^p \leq \Phi(\xi) \leq c_1 |\xi|^p, \quad c_0 > 0. \quad (6.1)$$

На каждом звене $I \subset F$ имеем разложение

$$\xi = \theta\eta + \lambda, \quad \theta = \xi \cdot \eta, \quad \eta = \tau \times \tau, \quad \lambda \perp \eta,$$

с помощью которого определяем «релаксационный» лагранжиан

$$\Phi_0(\theta)|_I = \min_{\lambda \perp \eta} \Phi(\theta\eta + \lambda).$$

Лагранжиан $\Phi_0(\theta)$ является p -однородным и имеет структуру $\Phi_0(\theta) = \rho|\theta|^p$, $\rho = \rho(\tau)$. В изотропном случае, когда $\Phi(\xi)$ есть функция скалярного аргумента $k\xi \cdot \xi + k_1(\text{Tr } \xi)^2$ ($k > 0$, $k_1 \geq 0$), постоянная ρ не зависит от направления τ . В линейном случае, когда $\Phi(\xi) = A\xi \cdot \xi$, постоянная ρ совпадает с ранее введенной постоянной $(A^{-1}\eta \cdot \eta)^{-1}$.

Рассмотрим вариационную задачу на отыскание

$$\min_{u \in W_\gamma^{1,p}(F^h)} \int_{F^h} (\Phi(e(u)) - \tilde{f}^h \cdot u - hf^h \cdot u) d\mu^h. \quad (6.2)$$

Здесь μ^h — нормированная плоская мера Лебега на F^h , $\mu^h(F^h) = 1$, \tilde{f}^h, f^h из (2.3), где сходимость понимается в $L^{p'}(F^h, d\mu^h)$, $p' = \frac{p}{p-1}$. Введем также предельную задачу на отыскание

$$\min_{w, v \in W_\gamma \times V_\gamma} \int_F [G(w', v'') - \tilde{f} \cdot w + g \cdot v' - f \cdot v] d\mu, \quad (6.3)$$

где μ — нормированная линейная мера Лебега на F ,

$$G(\theta, q) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Phi_0(\theta - zq) dz$$

для скалярных функций θ, q , а для векторов $w, v \in W_\gamma \times V_\gamma$

$$G(w', v'') = G((w \cdot \tau)', (v \cdot \nu)'').$$

Пусть $W_\gamma^{1,p}(F^h)$ — соболевское пространство, определяемое как замыкание множества $(C_\gamma^\infty)^2$ по норме

$$\left(\int_{F^h} (|\varphi|^p + |\nabla \varphi|^p) dx \right)^{1/p}.$$

Определение других пространств — \tilde{J}_γ , W_γ , V_γ — видоизменяется очевидным образом по сравнению со случаем $p = 2$. В квадратическом случае $p = 2$ имеем

$$\Phi_0(\theta) = \rho\theta^2, \quad G(\theta, q) = \rho \left(\theta^2 + \frac{1}{3}q^2 \right),$$

и предельная задача (6.3) распадается на отдельные задачи для w и v .
Имеет место следующая «структурная» теорема.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $u^h \in W_\gamma^{1,p}(F^h)$ и $e(u^h)$ ограничена в $L^p(F^h, d\mu^h)$.
Положим

$$\tilde{u}_\tau^h = \begin{cases} u_\tau^h & \text{на малоподвижных стержнях,} \\ u_\tau^h - m^h & \text{на любом подвижном стержне,} \\ & \text{где } m^h \text{ — среднее от } u_\tau^h \text{ по стержню.} \end{cases}$$

Тогда (с точностью до выделения подпоследовательности) выполнено

$$\tilde{u}_\tau^h \rightharpoonup w, \quad hu^h \rightarrow v, \quad w \in W_\gamma, \quad v \in V_\gamma, \quad \tilde{u}_\tau^h - w + \beta^h(v \cdot \nu)' \tau \rightarrow 0. \quad (6.4)$$

Перейдем к свойствам Γ -сходимости функционалов энергии.

ТЕОРЕМА 6.2. Из соотношений (6.4) следует неравенство

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \int_{F^h} \Phi(e(u^h)) d\mu^h \geq \int_F G(w', v'') d\mu. \quad (6.5)$$

ТЕОРЕМА 6.3. Для любых $w \in \tilde{J}_\gamma$, $v \in V_\gamma$ найдется последовательность $u^h \in W_\gamma^{1,p}(F^h)$, такая, что $e(u^h)$ ограничена в $L^p(F^h, d\mu^h)$, выполнены соотношения (6.4) и

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{F^h} \Phi(e(u^h)) d\mu^h = \int_F G(w', v'') d\mu. \quad (6.6)$$

Обратим внимание на то, что в теореме 6.3 фигурирует пространство \tilde{J}_γ , а в теореме 6.1 — более широкое пространство W_γ . Стоит также отметить, что однородность функции Φ требуется только для теоремы 6.3, а для остальных теорем от функции Φ достаточно требовать только выпуклости и оценки (6.1).

2. Обсудим теоремы 6.2, 6.3. Неравенство (6.5) весьма просто, и достаточно установить его для каждого стержня $I^h \subset F^h$. В качестве образца берем горизонтальный стержень. Тогда по определению релаксационного функционала

$$\begin{aligned} K_h &\equiv \frac{1}{2h} \int_{I^h} \Phi(e(u^h)) dx \geq \frac{1}{2h} \int_{I^h} \Phi_0 \left(\frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{I-1}^1 \int_{-1}^1 \Phi_0 \left(\frac{\partial u_1^h(x_1, hx_2)}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{\partial u_1^h(x_1, hx_2)}{\partial x_1} \rightharpoonup w_1'(x_1) - x_2 v_2''(x_1)$$

в $L^p(I \times [-1, 1])$ (свойство типа (3.7)), то

$$\liminf_{h \rightarrow 0} K_h \geq \frac{1}{2} \int_{I-1}^1 \int_{-1}^1 \Phi_0(w_1' - x_2 v_2'') dx = \int_I G(w', v'') dx_1$$

в силу обычного свойства полунепрерывности выпуклого функционала.

Обратимся к теореме 6.3 и поясним, какую роль играет однородность функции Φ при построении Γ -реализующей последовательности.

Пусть $\Phi_0(\theta) = \Phi(\theta, \bar{\xi}_{12}, \bar{\xi}_{22})$. Из p -однородности легко следует, что $\bar{\xi}_{12}, \bar{\xi}_{22}$ линейно зависят от θ ,

$$\Phi_0(\theta) = \Phi(\theta, \theta\alpha, \theta\gamma) = |\theta|^p \Phi(1, \alpha, \gamma),$$

и это обстоятельство весьма существенно.

По заданным на отрезке I функциям $w(x_1), v(x_1)$ (которые можно считать достаточно гладкими) определим вектор

$$U^h = (w + 2\gamma x_2 w', \alpha x_2 w') + h^{-1} \left(-x_2 v' - \gamma x_2^2 v'', v - \frac{\alpha x_2^2}{2} v'' \right)$$

на полосе $I^h = I \times [-h, h]$. Тогда

$$e(U^h) = \left(w' - \frac{x_2}{h} v'' \right) \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} + O(h),$$

и поэтому

$$\Phi(e(U^h)) = \Phi_0 \left(w' - \frac{x_2}{h} v'' \right) + O(h),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h} \int_{I^h} \Phi(e(U^h)) dx &= \frac{1}{2h} \int_{I^h} \Phi_0 \left(w' - \frac{x_2}{h} v'' \right) dx + O(h) = \\ &= \int_I G(w', v'') dx_1 + O(h). \end{aligned}$$

Легко видеть, что для однородной функции $\Phi(\xi)$ конструкция Γ -реализующей последовательности такая же, как в линейном случае (см. конец § 3).

Полное построение Γ -реализующей последовательности на всей структуре F^h делается по аналогии с леммой 5.1.

Стоит отметить, что основное свойство — линейная зависимость минимизантов ξ_{12} , ξ_{22} от θ — имеет место и при более общих условиях на Φ , например, когда $\Phi(\xi) = \varphi(g(\xi))$, где $\varphi \geq 0$ — выпуклая функция одного переменного, а g — однородная функция.

3. Теперь мы в состоянии сформулировать и доказать основную теорему.

ТЕОРЕМА 6.4. *Предположим, что*

- (i) \tilde{f}^h, f^h ограничены в $L^{p'}(F^h, d\mu^h)$, $p' = \frac{p}{p-1}$, и на подвижных стержнях выполнено условие (2.12);
- (ii) имеет место слабая сходимость (2.3);
- (iii) выполнено геометрическое условие $\tilde{\mathcal{T}}_\gamma = W_\gamma$ (см. (2.19)).

Тогда имеют место соотношения (6.4), в которых u^h — минимизант исходной вариационной задачи (6.2), а пара функций w, v — минимизант предельной задачи (6.3). Кроме того, имеет место сходимость упругих энергий (6.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности считаем, что имеют место соотношения (6.4), в которых u^h — минимизант исходной задачи. В силу структурной теоремы выполнено $w \in W_\gamma, v \in V_\gamma$. Кроме того,

$$\begin{aligned} l^h(u^h) &\equiv \int_{F^h} (\tilde{f} \cdot u^h + h f^h \cdot u^h) d\mu^h = \\ &= \int_{F^h} \tilde{f}^h \cdot (\tilde{u}^h - w + \beta^h(v \cdot \nu)' \tau) d\mu^h + \\ &+ \int_{F^h} \tilde{f}^h \cdot (w - \beta^h(v \cdot \nu)' \tau) d\mu + \int_{F^h} h f^h \cdot u^h d\mu^h. \end{aligned}$$

Поскольку $\tilde{u}^h - w + \beta^h(v \cdot \nu)' \tau \rightarrow 0$, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} l^h(u^h) = \int_F (\tilde{f} \cdot w - g \cdot v' + f \cdot v) d\mu \equiv l(w, v).$$

Принимая во внимание свойство (6.5), получим, что

$$\liminf_{h \rightarrow 0} E^h(u^h) \geq E(w, v) \geq E(\hat{w}, \hat{v}), \quad (6.7)$$

где

$$E^h(u^h) = \int_{F^h} \Phi(e(u^h)) d\mu - l^h(u^h),$$

$$E(w, v) = \int_F G(w', v'') d\mu - l(w, v),$$

\hat{w}, \hat{v} — минимизант предельной задачи (6.3).

Теперь для \hat{w}, \hat{v} возьмем Γ -реализующую последовательность \hat{u}^h . Так как $l^h(\hat{u}^h) \rightarrow l(\hat{w}, \hat{v})$, то

$$\limsup_{h \rightarrow 0} E^h(u^h) \leq \limsup_{h \rightarrow 0} E^h(\hat{u}^h) = \int_F G(\hat{w}, \hat{v}) - l(\hat{w}, \hat{v}) = E(\hat{w}, \hat{v}).$$

Отсюда следует, что в (6.7) наблюдается точное равенство и

$$\lim_{h \rightarrow 0} E(u^h) = E(w, v) = E(\hat{w}, \hat{v}) \implies w = \hat{w}, \quad v = \hat{v}.$$

Мы получили сходимость минимизантов и энергий. Теорема доказана.

§ 7. О НЕРАВЕНСТВАХ КОРНА

1. Докажем оценку (1.12) для случая горизонтального стержня (оценка (1.11) получается похожими рассуждениями, ее доказательство и применение см. также в [8, 9]). Предполагая, что она не имеет места, найдем такую последовательность u^h , что

$$\frac{1}{2h} \int_{I^h} |u_1^h|^2 dx = 1, \quad \int_{I^h} u_1^h dx = 0, \quad (7.1)$$

$$\frac{1}{2h} \int_{I^h} [e(u^h) \cdot e(u^h) + h^2 |u_2^h|^2] dx \rightarrow 0.$$

После замены (3.8) для соответствующей последовательности v^h получим соотношение

$$\int_Q \left[\left(\frac{\partial v_1^h}{\partial y_1} \right)^2 + \frac{h^{-2}}{2} \left(\frac{\partial v_1^h}{\partial y_2} + \frac{\partial v_2^h}{\partial y_1} \right)^2 + h^{-4} \left(\frac{\partial v_2^h}{\partial y_2} \right)^2 + |v_2^h|^2 \right] dy \rightarrow 0.$$

Поэтому если $v^h \rightharpoonup v$ в $H^1(Q)$, то $v_2 = 0$, $v_1 = C$, $\int_Q v_1 dy = 0$. Следовательно, $C = 0$, т. е. $v = 0$. Отсюда $u_1^h \rightarrow 0$, что противоречит (7.1). Оценка (1.12) доказана.

Аналогично с использованием доказанной оценки (см. также (1.13) и (3.7)) устанавливается следующее утверждение.

ЛЕММА 7.1. Пусть hu_2^h ограничена, $e(u^h) \rightarrow 0$. Тогда предел hu_2^h есть линейная функция, т. е. $hu_2^h \rightarrow \alpha x_1 + \beta$.

2. Рассмотрим пространство $(C_\gamma^\infty)^2$ и два сочлененных стержня I_1^h, I_2^h . Их расположение никак не связано с точками закрепления γ .

Предположим, что справедливо неравенство

$$h^2 \int_{I_1^h} |u|^2 dx \leq C_1 \int_{F^h} e(u) \cdot e(u) dx \quad \forall u \in (C_\gamma^\infty)^2, \quad (7.2)$$

и покажем, что оно «передается» на стержень I_2^h , т. е.

$$h^2 \int_{I_2^h} u^2 dx \leq C_2 \int_{F^h} e(u) \cdot e(u) dx \quad \forall u \in (C_\gamma^\infty)^2. \quad (7.3)$$

Достаточно рассмотреть случай, когда I_2^h вертикален, а I_1^h горизонтален. Допуская, что оценка (7.3) не имеет места, найдем такую последовательность u^h , что

$$\frac{1}{2h} \int_{I_2^h} h^2 |u^h|^2 dx = 1, \quad (7.4)$$

$$\frac{1}{2h} \int_{F^h} e(u^h) \cdot e(u^h) dx \rightarrow 0. \quad (7.5)$$

Без потери общности считаем, что $hu^h \rightarrow z$. Тогда из (7.4), (7.5), (7.2) следует

$$\int_{I_2} |z|^2 dx_2 = 1, \quad z|_{I_1} = 0. \quad (7.6)$$

Так как (по теореме 1.5) вектор z непрерывен на F и $z_2|_{I_2} = \text{const}$, то $z_2|_{I_2} = 0$. Остается выяснить $z_1|_{I_2}$. Из леммы 7.1 (примененной к $u_1^h|_{I_2^h}$) получим, что $z_1|_{I_2} = \alpha x_2 + \beta$, где $\beta = 0$, так как $z|_0 = 0$.

Воспользуемся теоремой 1.5, согласно которой

$$\alpha = \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \Big|_0 = -\frac{\partial z_2}{\partial x_1} \Big|_0 = 0.$$

Мы получили $z|_{I_2} = 0$, что противоречит (7.6).

Из доказанного утверждения следует теорема 2.1, если заметить, что оценка (7.2) выполнена для стержней с закрепленными торцами (см. (1.4)).

3. Рассмотрим случай трех сочлененных стержней. Предположим, что справедливы оценки

$$\int_{I_i^h} (|u \cdot \tau_i|^2 + h^2 |u|^2) dx \leq C_2 \int_{F^h} e(u) \cdot e(u) dx \quad \forall u \in (C_\gamma^\infty)^2, \quad i = 1, 2, \quad (7.7)$$

и покажем, что они справедливы и для $i = 3$. В силу предыдущих результатов (для двух стержней) достаточно проверить оценку

$$\int_{I_3^h} |u \cdot \tau_3|^2 dx \leq C_3 \int_{F^h} e(u) \cdot e(u) dx.$$

Допуская противное, найдем такую последовательность u^h , что выполнено (7.5) и

$$\frac{1}{2h} \int_{I_3^h} |u^h \cdot \tau_3|^2 dx = 1. \quad (7.8)$$

Считаем, что $u^h \cdot \tau \rightarrow z$. Из (7.7) имеем

$$hu^h \cdot \nu \rightarrow 0, \quad z|_{I_1 \cup I_2} = 0, \quad z|_{I_3} = C.$$

Сходимость $u^h \cdot \tau_3 \rightarrow C$ на I_3^h в действительности является сильной. Это ясно из соотношения типа (3.9), поскольку в данном случае $hu^h \cdot \nu_3 \rightarrow 0$

и корректирующее слагаемое с множителем вида $\frac{x_2}{h}$ отсутствует. Тогда из (7.8) следует, что $C \neq 0$. Получили, что продольная компонента равна нулю на $I_1 \cup I_2$ и ненулевой константе на I_3 . Это несовместимо с условием сопряжения (1.7).

Из доказанного утверждения следует теорема 2.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ciarlet P. G. Mathematical elasticity. II. Theory of plates. Amsterdam: Elsevier, 1997. (Studies in Math. and Applications; V. 27).
2. Назаров С. А. Асимптотический анализ тонких пластин и стержней. Т. 1. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Науч. кн., 2002.
3. Panasenko G. P. Multi-scale Modelling for Structures and Composites. Dordrecht: Kluwer Academic, 2004.
4. Назаров С. А., Слуцкий А. С. Произвольные плоские системы анизотропных балок // Тр. МИАН. 2002. Т. 236. С. 234–261.
5. Назаров С. А., Слуцкий А. С. Неравенство Корна для произвольной системы тонких искривленных стержней // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1319–1331.
6. Назаров С. А., Слуцкий А. С. Асимптотический анализ произвольной пространственной системы тонких стержней // Тр. Санкт-Петербург. мат. о-ва. 2004. Т. 10. С. 63–117.
7. Жиков В. В. Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах // Изв. РАН. Сер. мат. 2002. Т. 66, № 2. С. 81–148.
8. Жиков В. В., Пастухова С. Е. О неравенствах Корна на тонких периодических структурах // Докл. РАН. 2003. Т. 388, № 54. С. 588–592.
9. Жиков В. В., Пастухова С. Е. О неравенствах Корна на тонких периодических каркасах // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 8. С. 241–265.