В. В. Яблоков*

УСРЕДНЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛАМЭ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ОБЛАСТЯХ, ВКЛЮЧАЮЩИХ ПЕРИОДИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ КАНАЛОВ МАЛОЙ ДЛИНЫ

В работе рассматривается проблема усреднения решений краевой задачи Неймана для системы Ламэ линейной теории упругости в двумерных областях с каналами, представляющими собой прямые цилиндры длины ε^q (ε — малый положительный параметр, $q = \mathrm{const} > 0$) и радиуса a_ε. Основания каналов располагаются ε-периодически вдоль гиперплоскости $\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = 0\}$, а их количество равняется $N_\varepsilon = O(\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon \to 0$. При предельном условии $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q} = \beta = \mathrm{const} \geqslant 0$ на параметры, характеризующие геометрию области, найден слабый в H^1 предел обобщенного решения поставленной задачи.

Рассмотрим ограниченную область Ω в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega = \Gamma$. Положим $x = (x_1, x_2)$,

$$\Omega^+ = \Omega \cap \{x_1 > 0\}, \quad \Omega^- = \Omega \cap \{x_1 < 0\}, \quad \gamma = \Omega \cap \{x_1 = 0\} \neq \varnothing.$$

Пусть

$$T_\varepsilon^0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x_1 < \varepsilon^q,\ q = \mathrm{const} > 0,\ |x_2| < a_\varepsilon\},$$

$$T_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon} T_\varepsilon^j \,—$$

объединение цилиндров вида $T_\varepsilon^0 + \varepsilon z$, лежащих целиком внутри области Ω, где $z = (0, z_2)$ — множество векторов с целочисленными координатами $z_2 \in \mathbb{Z}$. Здесь ε и a_ε — малые положительные параметры.

Нас будет интересовать случай, когда параметры ε, a_ε и $q = \mathrm{const} > 0$ удовлетворяют соотношению

$$\lim_{\varepsilon \to 0} a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q} = \beta = \mathrm{const} \geqslant 0. \tag{1}$$

Обозначим через $P_\varepsilon^j = (0, P_{\varepsilon,2}^j)$ центр лежащего на гиперповерхности γ основания цилиндра T_ε^j, $j = 1, \ldots, N_\varepsilon$.

Положим

$$\Omega_\varepsilon^+ = \{x\colon (x_1 - \varepsilon^q, x_2) \in \Omega^+\}, \quad \gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon^+ \cap \{x_1 = \varepsilon^q\},$$
$$\Gamma_\varepsilon^+ = \partial\Omega_\varepsilon^+ \setminus \gamma_\varepsilon, \quad \Gamma^+ = \Gamma \cap \partial\Omega^+, \quad \Gamma^- = \Gamma \cap \partial\Omega^-, \quad \Gamma_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon^+ \cup \Gamma^-,$$
$$G_\varepsilon^0 = \gamma \cap \partial T_\varepsilon, \quad \gamma_\varepsilon^0 = \gamma \setminus G_\varepsilon^0, \quad G_\varepsilon^1 = \gamma_\varepsilon \cap \partial T_\varepsilon, \quad \gamma_\varepsilon^1 = \gamma_\varepsilon \setminus G_\varepsilon^1,$$
$$S_\varepsilon = \partial T_\varepsilon \setminus (G_\varepsilon^0 \cup G_\varepsilon^1).$$

Областью с каналами малой длины будем называть область вида

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^+ \cup G_\varepsilon^1 \cup T_\varepsilon \cup G_\varepsilon^0 \cup \Omega^-$$

(рис. 1). Впервые задачи усреднения в областях, содержащих периодическую систему каналов вида T_ε, рассматривались в [1], где авторы исследовали предельное при $\varepsilon \to 0$ поведение решений задачи Неймана для оператора Лапласа в $\mathbb{R}^2$. В [2] изучена вторая краевая задача для уравнения Пуассона в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, в [3] — одна краевая задача для бигармонического оператора, а в [4] — общее эллиптическое уравнение второго порядка. Системы уравнений в областях, содержащих каналы малой длины, ранее не рассматривались.

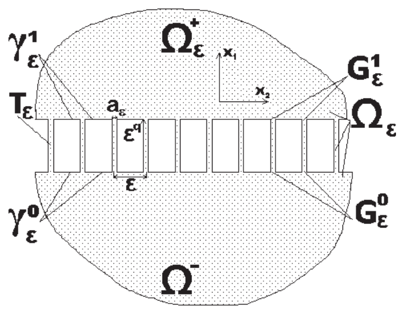

Рис. 1. Область Ω_ε с каналами малой длины

Пусть $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^t$, $f_i \in L_2(\Omega)$, $i = 1, 2$, причем функция $f(x)$ не зависит от малого параметра ε. Здесь и далее символ «t» означает транспонирование.

Рассмотрим в области Ω_ε линейный эллиптический дифференциальный оператор

$$L(u) = -\sum_{m,k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_m}\left(A^{mk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \rho u.$$

Здесь $u = (u_1(x),\ u_2(x))^t$ — вектор-столбец перемещений с компонентами $u_1(x)$, $u_2(x)$, функции u_i определены в области Ω_ε, $u_i \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, $i = 1, 2$, $\rho = \mathrm{const} > 0$, а A^{mk} — (2×2)-матрицы с компонентами

$$a_{ld}^{mk} = \lambda\delta_{lm}\delta_{dk} + \mu\delta_{ld}\delta_{mk} + \mu\delta_{lk}\delta_{md},$$

отвечающими случаю однородного изотропного тела, $\lambda = \mathrm{const} > 0$, $\mu = \mathrm{const} > 0$ — постоянные Ламэ, δ_{ld} — символ Кронекера. Далее мы будем опускать знак суммы, подразумевая суммирование по повторяющимся индексам.

Заметим, что компоненты a_{ld}^{mk} матриц A^{mk} удовлетворяют условию эллиптичности, т. е. для произвольной симметрической (2×2)-матрицы η_{lm} с действительными элементами справедливы оценки

$$d_1\eta_{lm}\eta_{lm} \leqslant a_{ld}^{mk}\eta_{lm}\eta_{dk} \leqslant d_2\eta_{lm}\eta_{lm}, \quad d_1 = \mathrm{const} > 0, \quad d_2 = \mathrm{const} > 0. \tag{2}$$

В области Ω_ε изучим краевую задачу Неймана

$$\begin{cases} L(u_\varepsilon) \equiv -\dfrac{\partial}{\partial x_m}\left(A^{mk}\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k}\right) + \rho u_\varepsilon = f(x) \ \text{ в } \ \Omega_\varepsilon, \\ \sigma(u_\varepsilon) \equiv \nu_m A^{mk}\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon^1 \cup S_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon^0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega_\varepsilon$.

Под обобщенным решением задачи (3) будем понимать вектор-функцию $u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, такую, что для любой $\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{\Omega_\varepsilon} A^{mk}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x_m}\,dx + \rho\int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon\varphi\,dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f\varphi\,dx. \tag{4}$$

Введем матрицу

$$e(u_\varepsilon) = \{e_{ld}(u_\varepsilon)\}_{l,d=1}^{2} = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varepsilon^l}{\partial x_d} + \frac{\partial u_\varepsilon^d}{\partial x_l}\right)\right\}_{l,d=1}^{2} \ -$$

тензор деформаций.

В [5] доказано неравенство Корна, играющее фундаментальную роль в теории упругости.

Лемма 1 (неравенство Корна). *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с липшицевой границей. Тогда для любой вектор-функции $u \in H^1(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant K_1(\|e(u)\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)})$$

с постоянной K_1, зависящей только от Ω.

Существование и единственность обобщенного решения задачи (3) следует из леммы Лакса—Мильграма. Действительно, левая часть интегрального тождества (4) представляет собой билинейную форму

$$a(u_\varepsilon, \varphi) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} A^{mk} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}\, dx + \rho \int\limits_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \varphi\, dx$$

на пространстве вектор-функций с компонентами из $H^1(\Omega_\varepsilon)$, а правая — линейный непрерывный функционал

$$F(\varphi) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\varphi\, dx$$

на том же пространстве. Выполнение требований леммы Лакса—Мильграма для $a(u_\varepsilon, \varphi)$ следует из условия эллиптичности (2), неравенств Корна и Коши—Буняковского.

Из интегрального тождества (4) вытекает оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant K_2.$$

Здесь и далее все константы K_r, $r = 1, 2, \ldots$, не зависят от малого параметра ε. Применяя к функции u_ε в области Ω^- неравенство Корна, получаем равномерную оценку

$$\int\limits_{\Omega^-} |\nabla u_\varepsilon|^2\, dx \leqslant K_3\biggl(\int\limits_{\Omega^-} |e(u_\varepsilon)|^2\, dx + \rho \int\limits_{\Omega^-} u_\varepsilon^2\, dx\biggr) \leqslant$$
$$\leqslant K_4\biggl(\int\limits_{\Omega_\varepsilon} A^{mk} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_m}\, dx + \rho \int\limits_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^2\, dx\biggr) = K_4 \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f u_\varepsilon\, dx \leqslant$$
$$\leqslant K_5 \|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant K_6.$$

Аналогично
$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon^+} |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx \leqslant K_7\|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant K_8.$$
Таким образом,
$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^-)} \leqslant K_9, \quad \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^+)} \leqslant K_{10}.$$

Из равномерной в $H^1(\Omega^-)$ ограниченности последовательности $\{u_\varepsilon\}$ и теоремы Реллиха следует, что из последовательности $\{\varepsilon\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\varepsilon'\}$, такую, что в области Ω^- выполнено $u_\varepsilon \rightharpoonup u^-$ при $\varepsilon' \to 0$, $u^- \in H^1(\Omega^-)$. Кроме того, для последовательности $v_\varepsilon(x_1, x_2) = u_\varepsilon(x_1 + \varepsilon^q, x_2)$ справедлива равномерная оценка
$$\|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^+)} \leqslant K_{11},$$
следовательно, существует подпоследовательность $\{\varepsilon''\} \subset \{\varepsilon\}$, такая, что в Ω^+ выполнено $v_\varepsilon \rightharpoonup u^+$ при $\varepsilon'' \to 0$, причем $u^+ \in H^1(\Omega^+)$. Без ограничения общности можно считать, что подпоследовательности $\{\varepsilon'\}$ и $\{\varepsilon''\}$ совпадают со всей $\{\varepsilon\}$. Нашей дальнейшей задачей будет нахождение предельных функций $u^+(x)$ и $u^-(x)$ при условии выполнения предельного соотношения (1) на параметры ε, a_ε и $q = \mathrm{const} > 0$, характеризующие геометрию каналов.

Ниже нам понадобится лемма о средних [2, 3].

Лемма 2. *Пусть ε и a_ε — малые положительные параметры,*
$$\Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad \Omega^- = \Omega \cap \{x_1 < 0\}, \quad \gamma = \Omega \cap \{x_1 = 0\} \neq \varnothing,$$
$$G_\varepsilon^0 = \biggl(\bigcup_{z \in Z_1} (\{x\colon x_1 = 0,\ |x_2| < a_\varepsilon\} + \varepsilon z)\biggr) \cap \gamma,$$
где Z_1 — множество векторов вида $(0, z_2)$, $z_2 \in \mathbb{Z}$. Тогда для любой функции $g(x) \in H^1(\Omega^-)$ имеет место оценка
$$\biggl|\int\limits_\gamma g\,dx_2 - \frac{1}{a_\varepsilon\varepsilon^{-1}}\int\limits_{G_\varepsilon^0} g\,dx_2\biggr| \leqslant K_{12}\sqrt{\varepsilon|\ln a_\varepsilon|}\,\|g\|_{H^1(\Omega^-)}.$$

Для произвольных вектор-функций $\varphi^+ \in C^\infty(\overline{\Omega^+})$, $\varphi^- \in C^\infty(\overline{\Omega^-})$ введем функцию φ, такую, что
$$\varphi(x) \equiv \begin{cases} \varphi^+(x) & \text{при } x \in \Omega^+, \\ \varphi^-(x) & \text{при } x \in \Omega^-, \end{cases}$$
и обозначим через $[\varphi] = \varphi^+(+0, x_2) - \varphi^-(-0, x_2)$ скачок вектор-функции φ на гиперповерхности γ.

Введем функции $\mu(z) \in C^1(\mathbb{R}^1)$ и $\psi(z) \in C^1(\mathbb{R}^1)$, такие, что

$$\mu(z) \equiv \begin{cases} z & \text{при } z \in [-1,1], \\ 0 & \text{при } |z| \geqslant 2; \end{cases} \qquad \psi(z) \equiv \begin{cases} 1 & \text{при } z \in [-1,1], \\ 0 & \text{при } |z| \geqslant 2. \end{cases}$$

Определим ε-периодические по z функции $\mu_\varepsilon(z)$ и $\psi_\varepsilon(z)$, заданные на отрезке периодичности $\left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$ как

$$\mu_\varepsilon(z) = \mu\left(\frac{z}{a_\varepsilon}\right), \quad \psi_\varepsilon(z) = \psi\left(\frac{z}{a_\varepsilon}\right).$$

Пусть

$$\begin{aligned} M_\varepsilon^j &= (M_{\varepsilon,1}^j, M_{\varepsilon,2}^j)^t = \varphi(+0, P_{\varepsilon,2}^j) = \text{const}, \\ H_\varepsilon^j &= (H_{\varepsilon,1}^j, H_{\varepsilon,2}^j)^t = [\varphi](P_\varepsilon^j) = \text{const}, \end{aligned} \qquad j = 1, \ldots, N_\varepsilon.$$

Введем функции $M_\varepsilon(x_2) \in C^1(\gamma)$ и $H_\varepsilon(x_2) \in C^1(\gamma)$, равные соответственно константам M_ε^j и H_ε^j на основаниях цилиндров T_ε^j, $j = 1, \ldots, N_\varepsilon$. Заметим, что функции $M_\varepsilon(x_2)$ и $H_\varepsilon(x_2)$ могут быть построены так, что

$$\max_{x_2 \in \gamma} (M_\varepsilon(x_2) - \varphi^+(+0, x_2))^2 + \\ + \int\limits_\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x_2}(M_\varepsilon(x_2) - \varphi^+(+0, x_2))\right)^2 dx_2 \leqslant K_{13}\varepsilon^q,$$

$$\max_{x_2 \in \gamma} (H_\varepsilon - [\varphi])^2 + \int\limits_\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x_2}(H_\varepsilon - [\varphi])\right)^2 dx_2 \leqslant K_{14}\varepsilon^q.$$

Действительно, положим

$$M_\varepsilon(x_2) = \varphi^+(0, x_2) + (M_\varepsilon^j - \varphi^+(0, x_2))\psi_\varepsilon(x_2),$$
$$|x_2 - P_{\varepsilon,2}^j| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad j = 1, \ldots, N_\varepsilon;$$
$$H_\varepsilon(x_2) = [\varphi](x_2) + (M_\varepsilon^j - [\varphi](x_2))\psi_\varepsilon(x_2),$$
$$|x_2 - P_{\varepsilon,2}^j| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad j = 1, \ldots, N_\varepsilon.$$

Рассмотрим в каналах T_ε линейную вектор-функцию

$$\Xi_\varepsilon(x) = M_\varepsilon(x_2) - (1 - x_1\varepsilon^{-q})H_\varepsilon - \varepsilon^{-q}\mathcal{X}_2 b_\varepsilon, \quad x \in T_\varepsilon,$$

где

$$\mathcal{X}_2 = x_2 - P_{\varepsilon,2}^j, \quad b_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{\varepsilon,1} \\ H_{\varepsilon,2} \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\Xi_\varepsilon(0,x_2) = M_\varepsilon - H_\varepsilon - \varepsilon^{-q}\mathcal{X}_2 b_\varepsilon = \varphi(-0,x_2) + o(1), \quad \varepsilon \to 0;$$
$$\Xi_\varepsilon(\varepsilon^q,x_2) = M_\varepsilon - \varepsilon^{-q}\mathcal{X}_2 b_\varepsilon = \varphi(+0,x_2) + o(1), \quad \varepsilon \to 0;$$
$$\sigma(\Xi_\varepsilon)|_{S_\varepsilon} = \varepsilon^{-q}(A^{21}H_\varepsilon - A^{22}b_\varepsilon) = \varepsilon^{-q}\begin{pmatrix}\mu H_{\varepsilon,2} - \mu H_{\varepsilon,2}\\ \lambda H_{\varepsilon,1} - \lambda H_{\varepsilon,1}\end{pmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Ниже нам понадобится значение тензора напряжений $\sigma(\Xi_\varepsilon)$ на гиперплоскости γ:

$$A^{1k}\frac{\partial \Xi_\varepsilon}{\partial x_k} = \varepsilon^{-q}(A^{11}H_\varepsilon - A^{12}b_\varepsilon) =$$
$$= \varepsilon^{-q}\begin{pmatrix}(\lambda+2\mu)H_{\varepsilon,1} - \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}H_{\varepsilon,1}\\ \mu H_{\varepsilon,2} - \mu H_{\varepsilon,2}\end{pmatrix} = \varepsilon^{-q}CH_\varepsilon, \qquad (6)$$

где

$$C = \begin{pmatrix}\frac{(\lambda+2\mu)^2-\lambda^2}{\lambda+2\mu} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим в областях Ω_ε^+ и Ω^- соответственно вектор-функции

$$\xi_\varepsilon^+(x) = -\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon^q}\mu_\varepsilon(x_2)\psi\left(\frac{x_1-\varepsilon^q}{a_\varepsilon}\right)b_\varepsilon - (\varphi(+0,x_2) - M_\varepsilon(x_2)), \quad x \in \Omega_\varepsilon^+;$$
$$\xi_\varepsilon^-(x) = -\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon^q}\mu_\varepsilon(x_2)\psi\left(\frac{x_1}{a_\varepsilon}\right)b_\varepsilon - (\varphi(-0,x_2) - M_\varepsilon + H_\varepsilon), \quad x \in \Omega^-.$$

Функции ξ_ε^+ и ξ_ε^- построены так, что

$$(\xi_\varepsilon^+ + \varphi^+(x_1-\varepsilon^q,x_2))|_{\gamma_\varepsilon^1} =$$
$$= -\varepsilon^{-q}\mathcal{X}_2 b_\varepsilon - (\varphi(+0,x_2) - M_\varepsilon(x_2)) + \varphi(+0,x_2) = \Xi_\varepsilon|_{\gamma_\varepsilon^1};$$
$$(\xi_\varepsilon^- + \varphi^-(x))|_{\gamma_\varepsilon^0} =$$
$$= -\varepsilon^{-q}\mathcal{X}_2 b_\varepsilon - (\varphi(-0,x_2) - M_\varepsilon + H_\varepsilon) + \varphi(-0,x_2) = \Xi_\varepsilon|_{\gamma_\varepsilon^0}.$$

Найдем оценки для $\|\xi_\varepsilon^+\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon^+)}$ и $\|\xi_\varepsilon^-\|^2_{L_2(\Omega^-)}$. Используя гладкость функций μ и ψ, получаем

$$\left|\nabla\left(\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon^q}\mu_\varepsilon(x_2)\psi\left(\frac{x_1}{a_\varepsilon}\right)\right)b_\varepsilon\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant K_{15}\left|\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon^q}\right|^2\left|\nabla\left(\mu\left(\frac{x_2}{a_\varepsilon}\right)\psi\left(\frac{x_1}{a_\varepsilon}\right)\right)\right|^2 \leqslant K_{16}\varepsilon^{-2q}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega^-} \left|\nabla\left(\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon^q}\mu_\varepsilon(x_2)\psi\left(\frac{x_1}{a_\varepsilon}\right)\right)b_\varepsilon\right|^2 dx \leqslant K_{17}\varepsilon^{-2q}\varepsilon^{-1}a_\varepsilon^2 \leqslant K_{18}\varepsilon;$$

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon^+} \left|\nabla\left(\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon^q}\mu_\varepsilon(x_2)\psi\left(\frac{x_1-\varepsilon^q}{a_\varepsilon}\right)\right)b_\varepsilon\right|^2 dx \leqslant K_{19}\varepsilon^{-2q}\varepsilon^{-1}a_\varepsilon^2 \leqslant K_{20}\varepsilon.$$

Кроме того,

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon^+} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}(\varphi^+(0,x_2)-M_\varepsilon(x_2))\right)^2 dx \leqslant K_{21}\varepsilon^q.$$

Аналогично

$$\int\limits_{\Omega^-} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}(\varphi^-(0,x_2)-M_\varepsilon(x_2)+H_\varepsilon(x_2))\right)^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant 2\int\limits_{\Omega^-} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}([\varphi]-H_\varepsilon(x_2))\right)^2 dx +$$
$$+ 2\int\limits_{\Omega^-} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}(\varphi(+0,x_2)-M_\varepsilon(x_2))\right)^2 dx \leqslant K_{22}\varepsilon^q.$$

Таким образом, для функций ξ_ε^+ и ξ_ε^- имеют место оценки

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon^+} |\nabla\xi_\varepsilon^+|^2\,dx \leqslant K_{23}\varepsilon^q, \qquad \int\limits_{\Omega^-} |\nabla\xi_\varepsilon^-|^2\,dx \leqslant K_{24}\varepsilon^q. \tag{7}$$

Рассмотрим вектор-функцию $\varphi_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, такую, что

$$\varphi_\varepsilon(x) \equiv \begin{cases} \varphi^+(x_1-\varepsilon^q,x_2)+\xi_\varepsilon^+(x) & \text{в } \Omega_\varepsilon^+,\\ \Xi_\varepsilon(x) & \text{в } T_\varepsilon,\\ \varphi^-(x_1,x_2)+\xi_\varepsilon^-(x) & \text{в } \Omega^-. \end{cases} \tag{8}$$

Подставляя в интегральное тождество (4) пробную функцию φ_ε вида (8), применяя к u_ε и Ξ_ε в цилиндрах T_ε формулу Грина и учитывая равенства (5), (6), получаем

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon\,dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} A^{mk}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_m}\,dx + \rho\int\limits_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon\varphi_\varepsilon\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\varepsilon^+} A^{mk} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi^+(x_1 - \varepsilon^q, x_2)}{\partial x_m}\, dx + \int\limits_{\Omega^-} A^{mk} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi^-}{\partial x_m}\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_\varepsilon^+} A^{mk} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_\varepsilon^+}{\partial x_m}\, dx + \int\limits_{\Omega^-} A^{mk} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_\varepsilon^-}{\partial x_m}\, dx +$$

$$+ \int\limits_{T_\varepsilon} A^{mk} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} \frac{\partial \Xi_\varepsilon}{\partial x_m}\, dx + \rho \int\limits_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \varphi_\varepsilon \, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\varepsilon^+} A^{mk} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi^+(x_1 - \varepsilon^q, x_2)}{\partial x_m}\, dx + \int\limits_{\Omega^-} A^{mk} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi^-}{\partial x_m}\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_\varepsilon^+} A^{mk} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_\varepsilon^+}{\partial x_m}\, dx + \int\limits_{\Omega^-} A^{mk} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_\varepsilon^-}{\partial x_m}\, dx +$$

$$+ \rho \int\limits_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \varphi_\varepsilon \, dx - \varepsilon^{-q} \int\limits_{G_\varepsilon^0} C[\varphi] u_\varepsilon \, dx_2 + \varepsilon^{-q} \int\limits_{G_\varepsilon^1} C[\varphi] u_\varepsilon \, dx_2 -$$

$$- \varepsilon^{-q} \int\limits_{G_\varepsilon^0} C(H_\varepsilon - [\varphi]) u_\varepsilon \, dx_2 + \varepsilon^{-q} \int\limits_{G_\varepsilon^1} C(H_\varepsilon - [\varphi]) u_\varepsilon \, dx_2. \tag{9}$$

Вычислим пределы при $\varepsilon \to 0$ интегралов из (9):

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon^+} A^{mk} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi^+(x_1 - \varepsilon^q, x_2)}{\partial x_m}\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega^+} A^{mk} \frac{\partial u_\varepsilon(x_1 + \varepsilon^q, x_2)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_m}\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega^+} A^{mk} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_m}\, dx = \int\limits_{\Omega^+} A^{mk} \frac{\partial u^+}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_m}\, dx; \tag{10}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega^-} A^{mk} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi^-}{\partial x_m}\, dx = \int\limits_{\Omega^-} A^{mk} \frac{\partial u^-}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi^-}{\partial x_m}\, dx. \tag{11}$$

Поскольку

$$\|\Xi_\varepsilon\|_{L_2(T_\varepsilon)} \leqslant K_{25} \sqrt{|T_\varepsilon|} \leqslant K_{26} \varepsilon^q, \quad \|\xi_\varepsilon^\pm\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^\pm)} \leqslant K_{27} \sqrt{a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-1}},$$

то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon^+} f\xi_\varepsilon^+\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega^-} f\xi_\varepsilon^-\,dx +$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{T_\varepsilon} f\Xi_\varepsilon\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon^+} f\varphi^+(x_1-\varepsilon^q, x_2)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega^-} f\varphi^-\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega^+} f\varphi\,dx + \int\limits_{\Omega^-} f\varphi\,dx; \tag{12}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\rho\int\limits_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon\varphi_\varepsilon\,dx = \rho\int\limits_{\Omega^+} u^+\varphi\,dx + \rho\int\limits_{\Omega^-} u^-\varphi\,dx. \tag{13}$$

Воспользовавшись оценками (7), имеем

$$\left|\int\limits_{\Omega_\varepsilon^+} A^{mk}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k}\,\frac{\partial \xi_\varepsilon^+}{\partial x_m}\,dx\right| \leqslant K_{28}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^+)}\|\nabla\xi_\varepsilon^+\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^+)} \leqslant K_{29}\sqrt{\varepsilon^q}; \tag{14}$$

$$\left|\int\limits_{\Omega^-} A^{mk}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k}\,\frac{\partial \xi_\varepsilon^-}{\partial x_m}\,dx\right| \leqslant K_{30}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^-)}\|\nabla\xi_\varepsilon^-\|_{L_2(\Omega^-)} \leqslant K_{31}\sqrt{\varepsilon^q}. \tag{15}$$

По построению функции H_ε имеем

$$\left|\varepsilon^{-q}\int\limits_{G_\varepsilon^0} C(H_\varepsilon - [\varphi])u_\varepsilon\,dx_2\right| \leqslant K_{32}\int\limits_{G_\varepsilon^0}|u_\varepsilon|\,dx_2 \leqslant$$

$$\leqslant K_{33}\varepsilon^{\frac{q}{2}}\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^-)} \leqslant K_{34}\varepsilon^{\frac{q}{2}}; \tag{16}$$

$$\left|\varepsilon^{-q}\int\limits_{G_\varepsilon^1} C(H_\varepsilon - [\varphi])u_\varepsilon\,dx_2\right| \leqslant K_{35}\int\limits_{G_\varepsilon^1}|u_\varepsilon|\,dx_2 \leqslant$$

$$\leqslant K_{36}\varepsilon^{\frac{q}{2}}\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^+)} \leqslant K_{37}\varepsilon^{\frac{q}{2}}. \tag{17}$$

Из тождества (9) и оценок (10)—(17) следует справедливость равенства

$$\int\limits_{\Omega^+} A^{mk}\frac{\partial u^+}{\partial x_k}\,\frac{\partial \varphi^+}{\partial x_m}\,dx + \int\limits_{\Omega^-} A^{mk}\frac{\partial u^-}{\partial x_k}\,\frac{\partial \varphi^-}{\partial x_m}\,dx - \int\limits_{\Omega^+\cup\Omega^-} f\varphi\,dx +$$

$$+\rho\int\limits_{\Omega^+} u^+\varphi^+\,dx + \rho\int\limits_{\Omega^-} u^-\varphi^-\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}(I_\varepsilon^1 + I_\varepsilon^2), \tag{18}$$

где

$$I_\varepsilon^1 \equiv \varepsilon^{-q} \int\limits_{G_\varepsilon^0} C[\varphi] u_\varepsilon \, dx_2, \quad I_\varepsilon^2 \equiv -\varepsilon^{-q} \int\limits_{G_\varepsilon^1} C[\varphi] u_\varepsilon \, dx_2.$$

Пределы интегралов I_ε^1 и I_ε^2 зависят от того, равна ли нулю постоянная β.

1. Случай $\beta = 0$.

Покажем, что если $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q} = 0$, то $I_\varepsilon^2 + I_\varepsilon^1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Действительно,

$$|I_\varepsilon^2 + I_\varepsilon^1| = \varepsilon^{-q} \left| \int\limits_{G_\varepsilon^1} C[\varphi] u_\varepsilon \, dx_2 - \int\limits_{G_\varepsilon^0} C[\varphi] u_\varepsilon \, dx_2 \right| =$$

$$= \varepsilon^{-q} \left| \int\limits_{T_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_1} (C[\varphi] u_\varepsilon) \, dx \right| \leqslant K_{38} \varepsilon^{-q} \sqrt{|T_\varepsilon|} \left\| \frac{\partial u_{\varepsilon 1}}{\partial x_1} \right\|_{L_2(T_\varepsilon)} \leqslant$$

$$\leqslant K_{39} \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q}} \|e(u_\varepsilon)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant K_{40} \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q}}. \tag{19}$$

Учитывая оценку (19), перейдем к пределу в равенстве (18) при условии $\beta = 0$:

$$\int\limits_{\Omega^-} A^{mk} \frac{\partial u^-}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi^-}{\partial x_m} \, dx + \int\limits_{\Omega^+} A^{mk} \frac{\partial u^+}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_m} \, dx + \rho \int\limits_{\Omega^+} u^+ \varphi^+ \, dx +$$

$$+ \rho \int\limits_{\Omega^-} u^- \varphi^- \, dx = \int\limits_{\Omega^+} f \varphi^+ \, dx + \int\limits_{\Omega^-} f \varphi^- \, dx. \tag{20}$$

В силу полноты пространства $C^\infty(\overline{\Omega^\pm})$ в $H^1(\Omega^\pm)$ равенство (20) справедливо для любой $\varphi \in H^1(\Omega^+) \cap H^1(\Omega^-)$. Взяв в (20) произвольную $\varphi^+ \in H^1(\Omega^+)$ и $\varphi^- \equiv 0$ (произвольную $\varphi^- \in H^1(\Omega^-)$ и $\varphi^+ \equiv 0$), получаем в области $\Omega^\pm$ интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega^\pm} A^{mk} \frac{\partial u^\pm}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi^\pm}{\partial x_m} \, dx + \rho \int\limits_{\Omega^\pm} u^\pm \varphi^\pm \, dx = \int\limits_{\Omega^\pm} f \varphi^\pm \, dx.$$

Следовательно, функция $u^\pm(x)$ является решением задачи

$$\begin{cases} L(u^\pm) = f(x) & \text{в } \Omega^\pm, \\ \sigma(u^\pm) = 0 & \text{на } \Gamma^\pm \cup \gamma. \end{cases} \tag{21}$$

Теорема 1. *Пусть функция u_ε — обобщенное решение задачи* (3), *а $u^\pm$ — решение задачи* (21). *Тогда если* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q} = 0$, *где* $q = \mathrm{const} > 0$, *то* $u_\varepsilon \rightharpoonup u^-$ *при* $\varepsilon \to 0$ *в* Ω^- *и* $u_\varepsilon(x_1 + \varepsilon^q, x_2) \rightharpoonup u^+$ *при* $\varepsilon \to 0$ *в* Ω^+.

2. Случай $\beta = \mathrm{const} > 0$.

Для нахождения пределов интегралов I_ε^1 и I_ε^2 нам понадобится лемма 2. Используя определение (1) константы β, имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-q} \int\limits_{G_\varepsilon^0} C[\varphi] u_\varepsilon \, dx_2 =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\gamma-0} \beta C[\varphi] u_\varepsilon \, dx_2 = \int\limits_{\gamma-0} \beta C[\varphi] u^- \, dx_2, \tag{22}$$

аналогично

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon^2 = -\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-q} \int\limits_{G_\varepsilon^1} C[\varphi] u_\varepsilon \, dx_2 =$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\gamma+0} \beta C[\varphi] v_\varepsilon \, dx_2 = -\int\limits_{\gamma+0} \beta C[\varphi] u^+ \, dx_2. \tag{23}$$

Используя (22), (23), перейдем к пределу в равенстве (18) в случае $\beta > 0$:

$$\int\limits_{\Omega^+} A^{mk} \frac{\partial u^+}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \, dx + \int\limits_{\Omega^-} A^{mk} \frac{\partial u^-}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \, dx + \int\limits_{\gamma} \beta C[\varphi](u^+ - u^-) \, dx_2 +$$
$$+ \rho \int\limits_{\Omega^+} u^+ \varphi^+ \, dx + \rho \int\limits_{\Omega^-} u^- \varphi^- \, dx = \int\limits_{\Omega} f\varphi \, dx. \tag{24}$$

Таким образом, для произвольной $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega^+}) \cap C^\infty(\overline{\Omega^-})$ функция $u(x)$, равная u^+ в Ω^+ и u^- в Ω^-, удовлетворяет интегральному тождеству (24). Следовательно, $u(x)$ является решением задачи

$$\begin{cases} L(u) = f(x) & \text{в } \Omega^+ \cup \Omega^-, \\ A^{1k} \frac{\partial u}{\partial x_k}\Big|_{x_1=+0} = A^{1k} \frac{\partial u}{\partial x_k}\Big|_{x_1=-0} = \beta C[u] & \text{на } \gamma, \\ \sigma(u) = 0 & \text{на } \Gamma^+ \cup \Gamma^-. \end{cases} \tag{25}$$

Теорема 2. *Пусть функция* u_ε — *обобщенное решение задачи* (3), *а* u — *решение задачи* (25). *Тогда если* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q} = \beta = \mathrm{const} > 0$, *где* $q = \mathrm{const} > 0$, *то* $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ *при* $\varepsilon \to 0$ *в* Ω^- *и* $u_\varepsilon(x_1 + \varepsilon^q, x_2) \rightharpoonup u$ *при* $\varepsilon \to 0$ *в* Ω^+.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наук. думка, 1974.
2. *Шапошникова Т. А.* Об усреднении задачи Неймана в области, часть которой представляет собой совокупность каналов // Дифференц. уравн. 2001. Т. 37, № 9. С. 1250—1257.
3. *Шапошникова Т. А.* Усреднение краевой задачи для бигармонического уравнения в области, содержащей тонкие каналы малой длины // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 131—160.
4. *Яблоков В. В.* О задаче усреднения решений эллиптических уравнений второго порядка в области, часть которой представляет собой совокупность тонких цилиндров // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. 2004. № 2. С. 22—28.
5. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.