УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ УСЛОВНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. II

Введение. 1. Пусть $(E,\ p,\ B)$ — векторное расслоение со слоем $\mathbf{R}^n$ и базой B (B — полное метрическое пространство, расстояние в котором обозначается через $d_B(\cdot,\ \cdot)$. На $(E,\ p,\ B)$ фиксируем некоторую риманову метрику.

2. Пусть $\mathbf{G}$ есть группа $\mathbf{R}$ или группа $\mathbf{Z}$ и пусть $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$, где через $\mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ обозначается множество гомоморфизмов группы $\mathbf{G}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, обозначаемую через $\mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B)$. Напомним, что образом $\mathfrak{H}t$ точки $t \in \mathbf{G}$ при гомоморфизме $\mathfrak{H}$ является пара $(X^t,\ \chi^t)$, где X^t — гомеоморфизм E на E, χ^t — гомеоморфизм B на B, причем а) $pX^t = \chi^t p$ при всяком $t \in \mathbf{G}$; б) при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ сужение $X^t[b]$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения X^t есть линейное отображение $p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi^t b)$; в) $X^{t+s} = X^t X^s$, $\chi^{t+s} = \chi^t \chi^s$ при всяких $t \in \mathbf{G}$, $s \in \mathbf{G}$.

Вместо X^1 будем писать X, вместо χ^1 — χ.

Потребуем от гомоморфизма $\mathfrak{H}$, чтобы для некоторой функции $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$, удовлетворяющей при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ равенству

$$a(\chi^t b) = a(b), \tag{1}$$

при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ выполнялось неравенство

$$\| X^t[b] \| \leqslant \exp(|t|\, a(b)). \tag{2}$$

Так как $(X^t[b])^{-1} = X^{-1}[\chi^t b]$ ($b \in B$, $t \in \mathbf{G}$), то наложенное условие перейдет в эквивалентное, если вместо «при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ выполнялось неравенство (2)» написать: «при всяких*) $b \in B$, $t \in \mathbf{G}_*^+$ выполнялось неравенство

$$\max\{\| X^t[b] \|,\ \| (X^t[b])^{-1} \|\} \leqslant \exp(ta(b))\text{».} \tag{2$'$}$$

3. *Центральный показатель* $\Omega_k(\mathfrak{H},\ b)$ (или, короче**), $\Omega_k(b)$) гомоморфизма $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ определяется при всяких $b \in B$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ формулой

$$\Omega_k(\mathfrak{H},\ b) \underset{\mathrm{def}}{=} \inf_{\tau \in \mathbf{G}_*^+} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \varlimsup_{m \to +\infty} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \|. \tag{3}$$

Здесь $G_i(p^{-1}(b))$ — грассманово многообразие i-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$, через $\mathbf{R}_*^i$ обозначается множество всех ненулевых векторов векторного пространства $\mathbf{R}^i$, в выражении $m \to +\infty$ имеется в виду, что $m \in \mathbf{N}$; через X^τ_C обозначается сужение отображения X^τ на векторное подпространство C слоя $p^{-1}(b)$; вместо $X^\tau_{p^{-1}(b)}$ пишем также (как отмечено выше) $X^\tau[b]$.

---

*) $$\mathbf{G}_*^+ \underset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \mathbf{R}_*^+, & \text{если } \mathbf{G} = \mathbf{R}, \\ \mathbf{N}, & \text{если } \mathbf{G} = \mathbf{Z} \ (\mathbf{R}_*^+ \text{ — множество всех вещественных чисел } > 0). \end{cases}$$

**) $\Omega_k(b)$ вместо $\Omega_k(\mathfrak{H},\ b)$ целесообразно писать, если рассматривается только один гомоморфизм $\mathfrak{H}$; тогда это сокращение в обозначении не может привести к недоразумениям.

В [1] (предложение 7) доказано, что $\Omega_k(\mathfrak{H}, b)$ не изменится, если $\inf\limits_{\tau\in\mathbf{G}_*^+}$ в формуле (3) заменить на $\inf\limits_{\tau\in\theta\mathbf{N}}$, где $\theta\in\mathbf{G}_*^+$ — любое фиксированное, например ($\theta=1$), верна формула

$$\Omega_k(\mathfrak{H}, b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\tau\in\mathbf{N}} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}}\| \tag{3'}$$
$$(b\in B, k\in\{1, \ldots, n\}).$$

§ 1. Для всякого $\tau\in\mathbf{G}_*^+$ введем в рассмотрение функции $\aleph_{\tau,k}^{(m,q)}(\cdot): B\to\mathbf{R}$ ($k\in\{1, \ldots, n\}$, $m\in\mathbf{N}$, $q\in\mathbf{N}$), определенные формулой

$$\aleph_{\tau,k}^{(m,q)}(b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))} \max_{t\in\{0, \ldots, q\}} \frac{1}{(m+t)\tau}\sum_{j=0}^{m+t-1}\ln\| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^k}\| \tag{4}$$

(при всяких $\tau\in\mathbf{G}_*^+$, $b\in B$, $k\in\{1, \ldots, n\}$, $m\in\mathbf{N}$, $q\in\mathbf{N}$).

Л е м м а 1. *При всяких $\tau\in\mathbf{G}_*^+$, $b\in B$, $k\in\{1, \ldots, n\}$, $m\in\mathbf{N}$ числовая последовательность $\{\aleph_{\tau,k}^{(m,q)}(b)\}_{q\in\mathbf{N}}$ монотонно не убывает и ограниченна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны произвольные $\tau\in\mathbf{G}_*^+$, $b\in B$, $k\in\{1, \ldots, n\}$, $m\in\mathbf{N}$.

1) Так как при всяких $\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))$, $q\in\mathbf{N}$ имеет место неравенство

$$\max_{t\in\{0, \ldots, q+1\}} \frac{1}{(m+t)\tau}\sum_{j=0}^{m+t-1}\ln\| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^k}\| \geqslant$$
$$\geqslant \max_{t\in\{0, \ldots, q\}} \frac{1}{(m+t)\tau}\sum_{j=0}^{m+t-1}\ln\| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^k}\|,$$

то при всяком $q\in\mathbf{N}$ имеем

$$\aleph_{\tau,k}^{(m,q+1)}(b) \underset{(4)}{=} \inf_{\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))} \max_{t\in\{0, \ldots, q+1\}} \frac{1}{(m+t)\tau}\sum_{j=0}^{m+t-1}\ln\| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^k}\| \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))} \max_{t\in\{0, \ldots, q\}} \frac{1}{(m+t)\tau}\sum_{j=0}^{m+t-1}\ln\| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^k}\| \underset{(4)}{=} \aleph_{\tau,k}^{(m,q)}(b).$$

Монотонное неубывание последовательности $\{\aleph_{\tau,k}^{(m,q)}(b)\}_{q\in\mathbf{N}}$ доказано.

2) При всяких $\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))$, $j\in\mathbf{Z}^+$ имеем

$$\| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^k}\| \leqslant \| X^{\tau}[\chi^{j\tau}b]\| \underset{(2)}{\leqslant} \exp(\tau a(\chi^{j\tau}b)) \underset{(1)}{=} \exp(\tau a(b)),$$
$$\| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^k}\| \geqslant \| (X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^k})^{-1}\|^{-1} \geqslant \| (X^{\tau}[\chi^{j\tau}b])^{-1}\|^{-1} \underset{(2')}{\geqslant}$$
$$\underset{(2')}{\geqslant} \exp(-\tau a(\chi^{j\tau}b)) \underset{(1)}{=} \exp(-\tau a(b)).$$

Следовательно, при всяких $\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))$, $s\in\mathbf{N}$ имеет место цепочка неравенств $-a(b)\leqslant \dfrac{1}{s\tau}\sum\limits_{j=0}^{s-1}\ln\| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^k}\| \leqslant a(b)$. Поэтому при всяких $\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))$, $q\in\mathbf{N}$ имеет место цепочка неравенств

$$-a(b)\leqslant \max_{t\in\{0, \ldots, q\}} \frac{1}{(m+t)\tau}\sum_{j=0}^{m+t-1}\ln\| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^k}\| \leqslant a(b).$$

Отсюда в силу формулы (4) следует, что при всяком $q\in\mathbf{N}$ имеет место включение

$$\aleph_{\tau,k}^{(m,q)}(b)\in[-a(b), a(b)]. \tag{5}$$

Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 в силу теоремы Вейерштрасса вытекает, что при всяких $\tau \in \mathbf{G}_*^+$, $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $m \in \mathbf{N}$ существует $\lim\limits_{q \to +\infty} \aleph_{\tau, k}^{(m, q)}(b)$. Введем обозначение

$$\aleph_{\tau, k}^{(m)}(b) \underset{\text{def}}{=} \lim_{q \to +\infty} \aleph_{\tau, k}^{(m, q)}(b). \tag{6}$$

Из (5) следует, что при всяких $\tau \in \mathbf{G}_*^+$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $b \in B$, $m \in \mathbf{N}$ имеет место включение

$$\aleph_{\tau, k}^{(m)}(b) \in [-a(b), a(b)]. \tag{7}$$

Л е м м а 2. *При всяких* $\tau \in \mathbf{G}_*^+$, $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ *числовая последовательность* $\{\aleph_{\tau, k}^{(m)}(b)\}_{m \in \mathbf{N}}$ *монотонно не возрастает и ограниченна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . 1) Ограниченность уже доказана (см. формулу (7)).

2) Пусть даны произвольные $\tau \in \mathbf{G}_*^+$, $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Так как при всяких $\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))$, $m \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$ имеет место неравенство

$$\max_{t \in \{0, \ldots, q\}} \frac{1}{(m+1+t)\tau} \sum_{j=0}^{m+t} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^k} \| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t \in \{0, \ldots, q+1\}} \frac{1}{(m+t)\tau} \sum_{j=0}^{m+t-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^k} \|,$$

то при всяких $m \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$ имеем

$$\aleph_{\tau, k}^{(m+1, q)}(b) \underset{(4)}{=} \inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))} \max_{t \in \{0, \ldots, q\}} \frac{1}{(m+1+t)\tau} \sum_{j=0}^{m+t} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^k} \| \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))} \max_{t \in \{0, \ldots, q+1\}} \frac{1}{(m+t)\tau} \sum_{j=0}^{m+t-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^k} \| \underset{(4)}{=} \aleph_{\tau, k}^{(m, q+1)}(b).$$

Следовательно, при всяком $m \in \mathbf{N}$ имеем $\aleph_{\tau, k}^{(m+1)}(b) \underset{(6)}{=} \lim\limits_{q \to +\infty} \aleph_{\tau, k}^{(m+1, q)}(b) \leqslant$ $\leqslant \lim\limits_{q \to +\infty} \aleph_{\tau, k}^{(m, q+1)}(b) \underset{(6)}{=} \aleph_{\tau, k}^{(m)}(b)$. Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 в силу теоремы Вейерштрасса вытекает, что при всяких $\tau \in \mathbf{G}_*^+$, $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ существует $\lim\limits_{q \to +\infty} \aleph_{\tau, k}^{(m)}(b)$. Введем обозначение

$$\aleph_{\tau, k}(b) \underset{\text{def}}{=} \lim_{q \to +\infty} \aleph_{\tau, k}^{(m)}(b). \tag{8}$$

Из (7), (8) следует, что при всяких $\tau \in \mathbf{G}_*^+$, $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ имеет место включение $\aleph_{\tau, k}(b) \in [-a(b), a(b)]$.

Л е м м а 3. *При всяких* $\tau \in \mathbf{G}_*^+$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $m \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$ *функция* $\aleph_{\tau, k}^{(m, q)}(\cdot) : B \to \mathbf{R}$ *непрерывна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . 1) Пусть $\varphi(\cdot, \cdot)$ — непрерывное отображение $S \times T \to \mathbf{R}$ (S — хаусдорфово топологическое пространство, T — компактное топологическое пространство). Хорошо известно (и легко доказывается), что функция $\varphi(\cdot) \underset{\text{def}}{=} \inf\limits_{t \in T} \psi(\cdot, t) = \min\limits_{t \in T} \psi(\cdot, t) : S \to \mathbf{R}$ непрерывна.

2) Пусть $\eta(\cdot) : S \to \mathbf{R}$, где S — пространство некоторого локально тривиального расслоения (S, π, B) с компактным слоем $\mathbf{F}$, — непрерывная функция. Тогда функция $\zeta(\cdot) \underset{\text{def}}{=} \inf\limits_{s \in \pi^{-1}(\cdot)} \eta(s) : B \to \mathbf{R}$ непрерывна. Это утверждение — следствие утверждения п. 1), так как непрерывность — локальное свойство, а расслоение (S, π, B) локально тривиально.

3) Векторное расслоение (E, p, B) со слоем $\mathbf{R}^n$ у нас фиксировано. Фиксируем

произвольное $k \in \{1, \ldots, n\}$. Для всякого $b \in B$ обозначим через $E_b^{(k)}$ множество всех k-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$. Через $E^{(k)}$ обозначим объединение всех этих множеств: $E^{(k)} \underset{\text{def}}{=} \bigcup_{b \in B} E_b^{(k)}$.

Пусть дана произвольная точка $\hat{b} \in B$ и произвольное k-мерное векторное подпространство $\widehat{\mathbf{R}}^k$ слоя $p^{-1}(\hat{b})$ векторного расслоения (E, p, B). Всякому базису $\{\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_k\}$ векторного пространства $\widehat{\mathbf{R}}^k$ и всякому набору окрестностей $\mathrm{U}(\hat{\xi}_i)$ точек $\hat{\xi}_i$ ($i \in \{1, \ldots, k\}$) ($\hat{\xi}_i$ при всяком $i \in \{1, \ldots, k\}$ есть точка топологического пространства E, а $U(\hat{\xi}_i)$ есть окрестность этой точки в топологическом пространстве E) поставим в соответствие множество всех тех k-мерных подпространств $\mathbf{R}^k$ слоев $p^{-1}(b)$ векторного расслоения (E, p, B), которые обладают следующим свойством: $\mathbf{R}^k \bigcap U(\hat{\xi}_i) \neq \varnothing$ при всяком $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Объявив сопоставленную таким образом каждой точке $\widehat{\mathbf{R}}^k$ множества $E^{(k)}$ совокупность содержащих эту точку подмножеств множества $E^{(k)}$ базисом окрестностей этой точки, мы наделяем $E^{(k)}$ структурой топологического пространства. Далее через $E^{(k)}$ обозначается это топологическое пространство.

Определим отображение $p^{(k)} : E^{(k)} \to B$, положив для всякого $b \in B$ для всякого $s \in E_b^{(k)}$ по определению $p^{(k)}(s) = b$.

Непосредственно из определений вытекает, что так определенное расслоение $(E^{(k)}, p^{(k)}, B)$ является локально тривиальным расслоением со слоем $G_k(\mathbf{R}^n)$. При всяком $k \in \{1, \ldots, n\}$ грассманово многообразие $G_k(\mathbf{R}^n)$ естественно наделяется структурой левого $GL(n, \mathbf{R})$-пространства: если $\mathbf{R}^k \in G_k(\mathbf{R}^n)$, $\varphi \in GL(n, \mathbf{R})$, то $\varphi\mathbf{R}^k$ есть по определению образ множества $\mathbf{R}^k$ при отображении φ. Непосредственно из определений вытекает, что локально тривиальное расслоение $(E^{(k)}, p^{(k)}, B)$ есть расслоенное пространство со слоем $G_k(\mathbf{R}^n)$, ассоциированное с тем же локально тривиальным главным $GL(n, \mathbf{R})$-расслоением, с которым ассоциировано векторное расслоение (E, p, B) (см. [2], с. 69, 72 — 73, 97 — 98).

Фиксируем, произвольные $\tau \in \mathbf{G}_*^+$, $m \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$.

В качестве T возьмем конечное множество $\{0, \ldots, q\}$, наделенное дискретной топологией (иначе говоря, рассматриваемое как подпространство топологического пространства $\mathbf{R}$). Определим функцию $\psi_{\tau,k}^{(m,q)}(\cdot, \cdot) : E^{(k)} \times T \to \mathbf{R}$ формулой

$$\psi_{\tau,k}^{(m,q)}(\mathbf{R}^k, t) \underset{\text{def}}{=} -\frac{1}{(m+t)\tau} \sum_{j=0}^{m+t-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^k} \|,$$

где $\mathbf{R}^k \in E^{(k)}$, $t \in T$. Так определенная функция $\psi_{\tau,k}^{(m,q)}(\cdot, \cdot) : E^{(k)} \times T \to \mathbf{R}$, как известно, непрерывна. Согласно утверждению п. 1), функция $\varphi_{\tau,k}^{(m,q)}(\cdot) \underset{\text{def}}{=} \inf_{t \in T} \psi_{\tau,k}^{(m,q)}(\cdot, t) : E^{(k)} \to \mathbf{R}$ непрерывна и, следовательно, функция $\eta_{\tau,k}^{(m,q)}(\cdot) : E^{(k)} \to \mathbf{R}$, определенная формулой

$$\eta_{\tau,k}^{(m,q)}(\mathbf{R}^k) \underset{\text{def}}{=} \max_{t \in \{0, \ldots, q\}} \frac{1}{(m+1)\tau} \sum_{j=0}^{m+t-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^k} \| = -\varphi_{\tau,k}^{(m,q)}(\mathbf{R}^k),$$

непрерывна (при всяких $\tau \in \mathbf{G}_*^+$, $m \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$).

4) По функции $\eta_{\tau,k}^{(m,q)}(\cdot) : E^{(k)} \to \mathbf{R}$, определенной в конце п. 3), построим функцию

$$\zeta_{\tau,\,k}^{(m,\,q)}(\cdot) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^k \in [p^k]^{-1}(\cdot)} \eta_{\tau,\,k}^{(m,\,q)}(\mathbf{R}^k) : B \to \mathbf{R}\,.$$

При всяких $\tau \in \mathbf{G}_*^+$, $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$, $m \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$ согласно утверждению п. 2), условия которого выполнены, так как $G_k(\mathbf{R}^n)$ — компакт, функция

$$\zeta_{\tau,\,k}^{(m,\,q)}(\cdot) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^k \in [p^k]^{-1}(\cdot)} \eta_{\tau,\,k}^{(m,\,q)}(\mathbf{R}^k) = \inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))} \max_{t \in \{0,\ \dots,\ q\}} \times$$
$$\times \frac{1}{(m+1)\tau} \sum_{j=0}^{m+t-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^k} \| \underset{(4)}{=} \aleph_{\tau,\,k}^{(m,\,q)}(\cdot) : B \to \mathbf{R}$$

непрерывна. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *При всяких* $\tau \in \mathbf{G}_*^+$, $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$ *функция* $\aleph_{\tau,\,k}(\cdot) : B \to \mathbf{R}$, *определенная формулой (8), — бэровская функция второго класса.*

Доказательство. Определения бэровских классов функций см. в [3], [4, § 39]. Утверждение леммы 4 непосредственно вытекает в силу этих определений из леммы 3 и формул (6), (8). Лемма 4 доказана.

§ 2. Следующая далее лемма 5 устанавливает связь центральных показателей $\Omega_k(\mathfrak{H},\ b)$ с функциями $\aleph_{\tau,\,k}(\cdot) : B \to \mathbf{R}$.

Лемма 5. *При всяких* $b \in B$, $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$ *имеет место равенство* $\Omega_k(\mathfrak{H},\ b) = \inf_{\tau \in \mathbf{N}} \aleph_{\tau,\,n-k+1}(b)$.

Доказательство. Пусть даны произвольные $b \in B$, $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$.

1. Согласно формуле (3′) (напомним, что $\Omega_k(b)$ — сокращенная запись для $\Omega_k(\mathfrak{H},\ b)$, применяемая, когда в тексте рассматривается только один гомоморфизм $\mathfrak{H}$, чем исключается возможность путаницы), при всяких $b \in B$, $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$ имеем

$$\Omega_k(b) = \inf_{\tau \in \mathbf{N}} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \|. \tag{9}$$

Воспользовавшись известным равенством $\overline{\lim\limits_{m \to +\infty}}\, a_m = \lim\limits_{m \to +\infty} \lim\limits_{q \to +\infty} \max\limits_{t \in \{0,\ \dots,\ q\}} a_{m+t}$, верным для всякой последовательности вещественных чисел $\{a_m\}_{m \in \mathbf{N}}$ (в данном случае $a_m = \dfrac{1}{m\tau} \sum\limits_{j=0}^{m-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \|$), можем переписать формулу (9) в виде

$$\Omega_k(b) = \inf_{\tau \in \mathbf{N}} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \lim_{m \to +\infty} \lim_{q \to +\infty} \max_{t \in \{0,\ \dots,\ q\}} \times$$
$$\times \frac{1}{(m+t)\tau} \sum_{j=0}^{m+t-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \|. \tag{10}$$

С другой стороны, из формул (4), (6), (8) следует (при всяком $\tau \in \mathbf{G}_*^+$):

$$\inf_{\tau \in \mathbf{N}} \aleph_{\tau,\,n-k+1}(b) = \inf_{\tau \in \mathbf{N}} \lim_{m \to +\infty} \lim_{q \to +\infty} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \max_{t \in \{0,\ \dots,\ q\}} \times$$
$$\times \frac{1}{(m+t)\tau} \sum_{j=0}^{m+t-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \|. \tag{11}$$

Как видим, правые части равенств (10), (11) различаются порядком, в котором применены к одному и тому же выражению операции взятия нижней грани и перехода к пределу. Вообще говоря, такие операции, как известно, не коммутируют. Для доказательства равенства правых частей равенств (10) и (11) воспользуемся монотонностью некоторых из входящих в эти формулы последовательностей и компактностью грассмановых многообразий.

2. Пусть дано произвольное $\tau\in\mathbf{G}_*^+$. Пусть дано произвольное $\varepsilon\in\mathbf{G}_*^+$. Возьмем $\mathbf{R}_\varepsilon^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))$ такое, что

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\|X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}_\varepsilon^{n-k+1}}\|<\Omega_{\tau,k}(b)+\frac{1}{2\varepsilon} \tag{12}$$

$$\Omega_{\tau,k}(b)\underset{\text{def}}{=}\inf_{\mathbf{R}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\|X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}}\|. \tag{13}$$

Возьмем $m_\varepsilon\in\mathbf{N}$ такое, что при всяком натуральном $s\geqslant m_\varepsilon$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{s\tau}\sum_{j=0}^{s-1}\ln\|X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}_\varepsilon^{n-k+1}}\|<\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\|X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}_\varepsilon^{n-k+1}}\|+\frac{1}{2}\varepsilon. \tag{14}$$

При всяком натуральном $s\geqslant m_\varepsilon$ имеем $\displaystyle\frac{1}{s\tau}\sum_{j=0}^{s-1}\ln\|X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}_\varepsilon^{n-k+1}}\|\underset{(14)}{\overset{(12)}{<}}\Omega_{\tau,k}(b)+\varepsilon$.

Следовательно, при всяком натуральном $m\geqslant m_\varepsilon$ при всяком $q\in\mathbf{N}$ имеет место неравенство

$$\max_{t\in\{0,\,\dots,\,q\}}\frac{1}{(m+t)\tau}\sum_{j=0}^{m+t-1}\ln\|X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}_\varepsilon^{n-k+1}}\|<\Omega_{\tau,k}(b)+\varepsilon. \tag{15}$$

При всяком натуральном $m\geqslant m_\varepsilon$ при всяком $q\in\mathbf{N}$ имеем

$$\begin{aligned}\aleph^{(m,\,q)}_{\tau,\,n-k+1}(b)&\underset{(4)}{=}\inf_{\mathbf{R}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))}\times\\ &\times\max_{t\in\{0,\,\dots,\,q\}}\frac{1}{(m+t)\tau}\sum_{j=0}^{m+t-1}\ln\|X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}}\|\leqslant\\ &\leqslant\max_{t\in\{0,\,\dots,\,q\}}\frac{1}{(m+t)\tau}\sum_{j=0}^{m+t-1}\ln\|X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}_\varepsilon^{n-k+1}}\|\underset{(15)}{<}\Omega_{\tau,k}(b)+\varepsilon.\end{aligned} \tag{16}$$

При всяком натуральном $m\geqslant m_\varepsilon$ имеем $\aleph^{(m)}_{\tau,\,n-k+1}(b)\underset{(5)}{=}\lim\limits_{q\to+\infty}\aleph^{(m,\,q)}_{\tau,\,n-k+1}(b)\underset{(16)}{\leqslant}\Omega_{\tau,k}(b)+\varepsilon$. Отсюда в силу формулы (8) следует неравенство $\aleph_{\tau,\,n-k+1}(b)\leqslant\Omega_{\tau,k}(b)+\varepsilon$. Напомним, что $\tau\in\mathbf{G}_*^+$, $\varepsilon\in\mathbf{G}_*^+$ были взяты (в начале п. 2) произвольными; следовательно, для всякого $\tau\in\mathbf{G}_*^+$ доказано неравенство

$$\aleph_{\tau,\,n-k+1}(b)\leqslant\Omega_{\tau,k}(b). \tag{17}$$

3. Пусть дано произвольное $\tau\in\mathbf{G}_*^+$. Пусть дано произвольное $\varepsilon\in\mathbf{G}_*^+$.

а) Возьмем $m_\varepsilon\in\mathbf{N}$ такое, что

$$\aleph^{(m)}_{\tau,\,n-k+1}(b)<\aleph_{\tau,\,n-k+1}(b)+\varepsilon \tag{18}$$

при всяком натуральном $m\geqslant m_\varepsilon$ (существование такого m_ε следует из формулы (8)).

б) Из формулы (6) в силу леммы 1 следует, что для всяких $m\in\mathbf{N}$, $q\in\mathbf{N}$ выполнено неравенство $\aleph^{(m,\,q)}_{\tau,\,n-k+1}(b)\leqslant\aleph^{(m)}_{\tau,\,n-k+1}(b)$.

в) Из результатов подпунктов а), б) следует, что для всякого натурального $m\geqslant m_\varepsilon$ для всякого имеет $q\in\mathbf{N}$ место неравенство $\aleph^{(m,\,q)}_{\tau,\,n-k+1}(b)<\aleph_{\tau,\,n-k+1}(b)+\varepsilon$.

г) Из результата подпункта в) и формулы (4) следует, что для всякого $q\in\mathbf{N}$ найдется $\mathbf{R}^{n-k+1}_{m_\varepsilon,\,q}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))$ такое, что при всяком $t\in\{0,\,\dots,\,q\}$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{(m_\varepsilon+t)\tau}\sum_{j=0}^{m_\varepsilon+t-1}\ln\|X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}_{m_\varepsilon,\,q}}\|<\aleph_{\tau,\,n-k+1}(b)+\varepsilon.$$

д) Из последовательности выберем $\{\mathbf{R}^{n-k+1}_{m_\varepsilon,\,q}\}_{q\in\mathbf{N}}$ подпоследовательность $\{\mathbf{R}^{n-k+1}_{m_\varepsilon,\,q_i}\}_{i\in\mathbf{N}}$, сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{R}^{n-k+1}_\varepsilon\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))$ (такой выбор возможен, так как грассманово многообразие $G_{n-k+1}(p^{-1}(b))$ компактно). Как известно, при всяком $t\in\mathbf{Z}^+$ отображение $\psi_t(\cdot):G_{n-k+1}(p^{-1}(b))\to\mathbf{R}$, определенное формулой $\psi_t(\mathbf{R}^{n-k+1})\underset{\text{def}}{=}\frac{1}{(m_\varepsilon+t)\tau}\sum_{j=0}^{m_\varepsilon+t-1}\ln\|X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}}\|$, непрерывно. Поэтому из результата подпункта г) вытекает, что при всяком $t\in\mathbf{Z}^+$ имеем

$$\frac{1}{(m_\varepsilon+t)\tau}\sum_{j=0}^{m_\varepsilon+t-1}\ln\|X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}_\varepsilon}\|=\lim_{i\to\infty}\frac{1}{(m_\varepsilon+t)\tau}\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{m_\varepsilon+t-1}\ln\|X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}_{m_\varepsilon,\,q_i}}\|\leqslant\aleph_{\tau,\,n-k+1}(b)+\varepsilon.$$

е) Из результата подпункта д) следует неравенство (в выражении $\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}}$ здесь и далее имеется в виду, что $m\in\mathbf{N}$)

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\|X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}_\varepsilon}\|\leqslant\aleph_{\tau,\,n-k+1}(b)+\varepsilon. \tag{19}$$

Имеем:

$$\Omega_{\tau,\,k}(b)\underset{(13)}{=}\inf_{\mathbf{R}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m=1}\ln\left\|X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}}\right\|\leqslant$$
$$\leqslant\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m=1}\ln\left\|X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}_\varepsilon}\right\|\underset{19}{\leq}\aleph_{\tau,\,n-k+1}(b)+\varepsilon.$$

Напомним, что $\tau\in\mathbf{G}^+_*$, $\varepsilon\in\mathbf{R}^+_*$ были взяты (в начале п. 3) произвольными; следовательно, для всякого $\tau\in\mathbf{G}^+_*$ доказано неравенство

$$\Omega_{\tau,k}(b)=\aleph_{\tau,n-k+1}(b). \tag{20}$$

4. Из неравенств (17), (20), доказанных для всякого $\tau\in\mathbf{G}^+_*$, следует, что для всякого $\tau\in\mathbf{G}^+_*$ имеет место равенство

$$\Omega_{\tau,k}(b)=\aleph_{\tau,n-k+1}(b). \tag{21}$$

Имеем: $\Omega_k(\mathfrak{H},b)\overset{(3')}{\underset{(13)}{=}}\inf\limits_{\tau\in\mathbf{N}}\Omega_{\tau,k}(b)=\inf\limits_{\tau\in\mathbf{N}}\aleph_{\tau,n-k+1}(b)$. Лемма 5 доказана.

§ 3. Теорема. *В пространстве B имеется всюду плотное множество D типа G_δ такое, что при всяком $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $\Omega_k(\mathfrak{H},\ \cdot):B\to\mathbf{R}$ полунепрерывна сверху во всякой точке $b\in D$.*

Доказательство. Прежде чем доказывать теорему, подчеркнем, что в ее формулировке рассматриваются не сужения функций $\Omega_k(\mathfrak{H},\ \cdot):B\to\mathbf{R}$ на множество D, а сами функции $\Omega_k(\mathfrak{H},\ \cdot):B\to\mathbf{R}$: и утверждается, что множество точек полунепрерывности сверху функций $\Omega_k(\mathfrak{H},\ \cdot):B\to\mathbf{R}$ содержит множество D, причем D — всюду плотное множество типа G_δ в B.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. При всяком $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$

при всяких $\tau \in \mathbf{G}_*^+$, $m \in \mathbf{N}$ функция $\aleph_{\tau,\,k}^{(m)}(\cdot): B \to \mathbf{R}$ — бэровская функция первого класса. Это непосредственно вытекает из леммы 3 и формулы (6). Поэтому (см. [4], с. 240 — 242, 162 — 164) при всяких $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$, $\tau \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$ множество $D_{\tau,k}^{(m)}$ точек непрерывности функции $\aleph_{\tau,\,k}^{(m)}(\cdot): B \to \mathbf{R}$ есть множество типа G_δ, всюду плотное в B. Следовательно,

$$D \underset{\text{def}}{=} \bigcap_{\substack{\tau\in\mathbf{N},\ m\in\mathbf{N}\\ k\in\{1,\dots,n\}}} D_{\tau,k}^{(m)}$$

— множество типа G_δ, всюду плотное в B

B (см. [4], с. 163), и каждая из функций $\aleph_{\tau,k}^{(m)}(\cdot): B \to \mathbf{R}$ ($\tau \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$, $k \in \{1,\dots,n\}$) непрерывна всякой точке $b \in D$. Так как в силу формулы (8) и леммы 2 функция $\aleph_{\tau,k}^{(m)}(\cdot): B \to \mathbf{R}$ (при всяких $\tau \in \mathbf{N}$, $k \in \{1,\dots,n\}$) есть предел монотонно невозрастающей последовательности функций $\aleph_{\tau,k}^{(m)}(\cdot): B \to \mathbf{R}$, то $\Omega_{n-k+1}(\mathfrak{H}, b) \underset{\textit{лемма 5}}{=} \inf_{\tau\in\mathbf{N}} \aleph_{\tau,k}(b) = \inf_{\substack{\tau\in\mathbf{N}\\ m\in\mathbf{N}}} \inf_{m\in\mathbf{N}} \aleph_{\tau,k}^{(m)}(b)$ (при всяких $b \in B$, $k \in \{1,\dots,n\}$), и поэтому во всякой точке $b \in B$, в которой всякая функция $\aleph_{\tau,k}^{(m)}(\cdot): B \to R$ ($k \in \{1,\ \dots,\ n\}$, $\tau \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$) непрерывна, всякая функция $\Omega_{n-k+1}(\mathfrak{H}, \cdot): B \to R$ ($k \in \{1,\ \dots,\ n\}$) полунепрерывна сверху (см. [4], с. 237 — 238).

Итак, доказано существование в *B* всюду плотного множества *D* типа G_δ такого, что при всяком $k \in \{1,\dots,n\}$ множество точек полунепрерывности сверху функции $\Omega_k(\mathfrak{H}, \cdot): B \to \mathbf{R}$ содержит *D*. Теорема доказана.

Литература

1. Миллионщиков В. М. О типичных свойствах условной экспоненциально): устойчивости. I. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 8, с. 1344 — 1356.
2. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. — М.: Мир, 1970.
3. Baire R. Lecons sur les functions discontinues. — Paris: Gauthier — Villars, 190.
4. Хаусдорф Ф. Теория множеств. — М. — Л.: ОНТИ, 1937.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 30 декабря 1982 г.