АПРЕЛЬ 1969 г., ТОМ V, № 4

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.941.92

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОСОБЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ И О НЕСИММЕТРИЧНОСТИ ОТНОШЕНИЯ ПОЧТИ ПРИВОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

В настоящей работе доказывается, что существует линейная система (любого порядка $\geqslant 2$)

$$\dot{x} = A(t)x \qquad (x \in E^n) \tag{1}$$

($A(t)$ ограничена и кусочно-непрерывна на прямой, при желании ее нетрудно сделать непрерывной) такая, что ее особые показатели Ω^0 и ω^0 сильно меняются при некоторых сколь угодно малых возмущениях $A(t)$ (Ω^0, как известно, не может сильно увеличиться, а ω^0 — сильно уменьшаться, но мы доказываем, что они могут сильно меняться в противоположном направлении).

Пример, который я для этого строю, используется затем для решения следующей задачи, поставленной Б. Ф. Быловым: существуют ли системы $\dot{x} = A(t)x$ и $\dot{y} = B(t)y$ такие, что $\dot{y} = B(t)y$ почти приводима к $\dot{x} = A(t)x$, а $\dot{x} = A(t)x$ не почти приводима к $\dot{y} = B(t)y$.

Замечание. Все сведения из теории линейных систем, употребляющиеся здесь, содержатся в [1].

Теорема 1. *Существует система (1) (любого порядка $\geqslant 2$) с ненулевыми особыми показателями такая, что для всякого натурального т существует система*

$$\dot{y} = (A(t) + B_m(t))y,$$

у которой особые показатели оба равны нулю, а

$$\sup_t \|B_m(t)\| \underset{m\to\infty}{\to} 0.$$

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать теорему для систем 2-го порядка. Положим

$$A(t) = f(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

где

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } k9^{s!} \leqslant t < k9^{s!} + 9^{(s-1)!}, \\ & s - \text{любое натуральное}, \\ & k - \text{любое целое}, \\ 1 & \text{при остальных } t. \end{cases} \tag{3}$$

Положим

$$B_m(t) = f_m(t)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где

$$
f_m(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\, 9^{-(s-1)!} & \text{при}\, k9^{s!} \leqslant t \leqslant k9^{s!} + 9^{(s-1)!}, \\ & s - \text{любое натуральное} \geqslant m, \\ & k - \text{любое целое}, \\ 0 & \text{при остальных } t. \end{cases} \tag{5}
$$

Система (1)—(3) — диагональная, поэтому ее характеристические показатели легко сосчитать: они равны $\pm \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(\tau)d\tau$; в силу (3) один из них > 0, а другой < 0, значит, для системы (1) — (3) $\Omega^0 > 0$, $\omega^0 < 0$. Система же

$$
\dot{y} = (A(t) + B_m(t))y \tag{6}
$$

ортогональным преобразованием

$$
y = \begin{pmatrix} \cos\int_0^t f_m(\tau)d\tau & -\sin\int_0^t f_m(\tau)d\tau \\ \sin\int_0^t f_m(\tau)d\tau & \cos\int_0^t f_m(\tau)d\tau \end{pmatrix} z \tag{7}
$$

приводится к диагональному виду

$$
\dot{z} = -(-1)^{E\left(\frac{t}{gm^1}\right)} \qquad f(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z \tag{8}
$$

($E(\tau)$ — целая часть τ). Поскольку особые показатели системы (8) равны

$$
\pm \lim_{t-\tau\to+\infty} \frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t (-1)^{E\left(\frac{t}{gm^1}\right)} f(\xi)d\xi = 0, \tag{9}
$$

а при ортогональном преобразовании (7) они не меняются, то и особые показатели системы (6) равны 0. А так как в силу (4) — (5)

$$
\sup_t \|B_m(t)\| \underset{m\to\infty}{\to} 0, \tag{10}
$$

то теорема доказана.

Замечание. Из доказанной теоремы вытекает, что утверждение, анонсированное мною (теорема 3 из [2]), хотя и справедливое для весьма широкого класса систем (R-систем, см. [3], теорема 1; [4] теорема 1.10), в общем случае неверно.

Заметим теперь, что (9) означает, что диагональные коэффициенты (8) интегрально близки к нулю, а поэтому в силу теоремы 21.1.5 из [1] система

$$
\dot{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u \tag{11}
$$

почти приводима к системе (8) при любом m, а значит, и к системе (6) при любом m, а значит (в силу (10)), и к системе (1)—(3). С другой стороны, при малом возмущении системы (11) ее особые показатели мало отклоняются от нуля, и поэтому система (1) — (3), особые показатели которой $\neq 0$, не почти приводима к системе (11).

Тем самым доказана

Теорема 2. *Для любого $n \geqslant 2$ существует система (1) n-го порядка, не почти приводимая к системе $\dot{u} = 0u$, но такая, что система $\dot{u} = 0u$ почти приводима к системе (1).*

Выражаю благодарность Б. Ф. Былову, сообщившему мне свою задачу, и указавшему, что системы, доказывающие несимметричность отношения почти приводимости, следует искать среди систем с неустойчивыми характеристическими показателями.

Литература

1. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова. М., «Наука», 1966.
2. Миллионщиков В. М. ДАН СССР, **166**, № 1, 34—37, 1966.
3. Миллионщиков В. М. ДАН СССР, **171**, № 2, 288—291, 1966.
4. Миллионщиков В. М. Труды Моск. матем. об-ва, **18**, 1968, стр. 146—186.

Поступила в редакцию
28 декабря 1967 г.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова