В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ УСЛОВНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. XVIII

ВВЕДЕНИЕ

1. Пусть (V^n,δ) — n-мерное связное полное риманово многообразие (V^n — дифференцируемое многообразие (со счетной базой) класса $C^3, \delta(\cdot,\ \cdot)$ — риманова метрика на V^n класса C^2). Через $\rho(\cdot,\ \cdot)$ обозначаем расстояние между точками этого риманова многообразия, через $(TV^n,\pi,\ V^n)$ — касательное расслоение.

2. Через S обозначаем множество всех диффеоморфизмов f класса C^1, биективно отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих условию

$$\max\left\{\left\|\left|df\right\|\right|,\left\|\left|(df)^{-1}\right\|\right|\right\}<+\infty\,; \tag{B.1}$$

здесь df_x — производная отображения f в точке $x\in V^n$,

$$\left\|\left|df\right\|\right| \underset{def}{=} \sup_{x\in V^n}\left\|df_x\right\|, \tag{B.2}$$

$$\left\|\left|(df)^{-1}\right\|\right| \underset{def}{=} \sup_{x\in V^n}\left\|(df_x)^{-1}\right\|, \tag{B.3}$$

где в свою очередь $\|.\|$ — норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные римановой метрикой $\delta(\cdot,\ \cdot)$.

3. Для всякого $j\in S$ через S_j обозначаем множество всех диффеоморфизмов $f\in S$, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{x\in V^n}\rho(fx,jx)<+\infty\,. \tag{B.4}$$

4. Множество J_1V^n троек $(x,y,\ L)$, где*) $x\in V^n, y\in V^n, L\in Hom(\pi^{-1}(x),\pi^{-1}(y))$ (такие тройки называются 1-струями), наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния

$$\rho_1((x_1,y_1,L_1),(x_2,y_2,L_2)) \underset{def}{=} \inf_{\substack{u\in G(x_2,x_1)\\ \upsilon\in G(y_1,y_2)}}\left\{s(u)+s(\upsilon)+\left\|\varphi_\upsilon L_2\varphi_u - L_1\right\|\right\} \tag{B.5}$$

(см. предложение [1,]).

Пояснения к формуле (В.5). а) Для всяких $y\in Vn,$ $z\in Vn$ через $G(y,z)$ обозначается множество всех кусочно-гладких путей, идущих в многообразии V^n из точки z в точку y; при этом под кусочно-гладким путем u, идущим в многообразии V^n из точки z в точку y, понимается непрерывное, имеющее кусочно-непрерывную производную, отображение u отрезка $[0,1]$ в многообразие V^n, причем значение u_0 этого отображения в точке 0 равно z, а его значение u_1 в точке 1 равно y (через u_t обозначается значение отображения u в точке $t\in[0,1]$.

---

*) Через $Hom(V_1,V_2)$ обозначается множество всех линейных отображений векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2.

б) $s(u) \underset{def}{=} \int\limits_0^1 \left[\delta(\dot{u}_t, \dot{u}_t)\right]^{1/2} dt = \int\limits_0^1 |\dot{u}_t| d_t$ (В.6)

— длина пути u; через $\dot{u}_t$ всюду в этой статье обозначаем $du_t\left((\tau_t^{[1]})^{-1}\right]$, где du_t— производная отображения u в точке t (понимаемая, как принято в теории дифференцируемых многообразий, т. е. как отображение касательного пространства в касательное пространство), а $\tau_t^{[1]-1}\hat{\pi}^{-1}:(t)\to R$— стандартное отображение, «отождествляющее» касательное пространство к вещественной прямой R с самой этой прямой (определение отображения $\tau_x^{[n]}$ при любом $n\in N$ воспроизведено в [1, п. 5 введения]); интеграл в формуле (В.6) понимается как риманов интеграл, определяемый в классических курсах анализа.

в) $\varphi_u:\pi^{-1}(z)\to\pi^{-1}(y)$ — преобразование, ставящее в соответствие всякому вектору $\mathfrak{z}\in\pi^{-1}(z)$ результат его параллельного перенесения вдоль пути $u\in G(y,z)$.

5. *Отображение* $p_1:(J_1,V_1,\rho_1)\to(V^n,\rho)$*, определенное формулой*

$$p_1(x,y,L) \underset{def}{=} x, \tag{В.7}$$

равномерно непрерывно (см. [2, предложение 1]).

6. Через S^u обозначается множество всех тех диффеоморфизмов $f\in S$, у которых 1-струйное расширение $jet_1 f:(V^n,\rho)\to(J_1V^n,\rho_1)$, определенное формулой

$$(jet_1 f)x=(x,fx,df_x)(x\in V^n), \tag{В.8}$$

равномерно непрерывно.

Полагаем

$$S_j^u \underset{def}{=} S_j\bigcap S^u \tag{В.9}$$

при всяком $j\in S^u$.

7. Следующая лемма представляет собой известное утверждение, которое для полноты изложения приводится вместе с доказательством.

Лемма. *Для всяких* $f\in S, z_1\in V^n, z_2\in V^n$ *имеет место неравенство*

$$\rho(fz_1,fz_2)\leqslant\|\|df\|\|\rho(z_1,z_2). \tag{В. 10}$$

Доказательство. Так как $f\in S$, то $f:V^n\to V^n$ — диффеоморфизм класса C^1, поэтому для всякого $u\in G(z_1,z_2)$ формула $(fu)_t \underset{def}{=} fu_t \quad (t\in[0,1])$ определяет путь $fu\in G(fz_1,fz_2)$. Следовательно,

$$\rho(fz_1,fz_2)=\inf_{\upsilon\in G(fz_1,fz_2)} s(\upsilon)\leqslant\inf_{u\in G(z_1,z_2)} s(fu). \tag{В.11}$$

Для всякого $u\in G(z_1,z_2)$ имеем

$$s(fu)\underset{(B.6)}{=}\int\limits_0^1\left|(fut)^{\cdot}\right|dt=\int\limits_0^1\left|(df_{u_t}\dot{u}t)\right|dt\leqslant\int\limits_0^1\left\|(df_{u_t})\right\|\cdot|\dot{u}t|\,dt\underset{(B.2)}{\leqslant}$$

$$\underset{(B.2)}{\leqslant}\|\|df\|\|\int\limits_0^1|\dot{u}t|dt\underset{(B.6)}{=}\|\|df\|\|s(u). \tag{В.12}$$

Имеем

$$\inf_{u\in G(z_1,z_2)} s(fu)\underset{(B.12)}{\leqslant}\|\|df\|\|\inf_{u\in G(z_1,z_2)} s(u)=\|\|df\|\|\rho(z_1,z_2);; \tag{В.13}$$

равенства в формулах (В.11) и (В.13) следуют из определения расстояния $\rho(.,.):\rho(y_1,y_2)\underset{def}{=}\inf_{u\in G(y1,y2)} s(u)$ (для всяких $y_1\in V^n, y_2\in V^n$).

Из (В.11), (В.13) следует (В.10). Лемма доказана.

8. Всюду далее предполагается, что риманово многообразие (V^n, δ) является равномерно картографируемым, т. е. существуют числа $\sigma \in R_*^+, \sigma \in R_*^+$ такие, что для всякого $x \in V^n$ найдется карта*)

$$\left\{U\sigma(x), h_x : U_\sigma(x) \to R^n\right\}(h_x x = 0), \tag{B.14}$$

такая что**)

$$\left|g_{ij}(x;y)\right| + \left|g^{ij}(x;y)\right| + \left|\frac{\partial g_{ij}(x;y)}{\partial y^R}\right| \leqslant \sigma_1 \tag{B.15}$$

для всяких $x \in Vn, \hat{y} \in hxU_\sigma(x), i \in \{1,...n\}, j \in \{1,...n\}, R \in \{1,...n\}$

Евклидово пространство E^n и всякое замкнутое (т. е. компактное) риманово многообразие равномерно картографируемы (это утверждение хорошо известно и легко доказывается).

§ 1

Из леммы (п. 7 введения) следует, что *всякое $f \in S$ обладает свойством: отображение $f : (V^n, \rho) \to (\dot{V}^n, \rho)$ равномерно непрерывно.*

Пусть фиксировано $f \in S$. Из равномерной непрерывности отображения $f : (V^n, \rho) \to (\dot{V}^n, \rho)$ следует существование числа

$$\sigma_0 \in (0, \sigma), \tag{1}$$

такого, что для всякого $x \in V^n$ имеет место включение

$$fU_{\sigma_0}(x) \subset U_\sigma(fx). \tag{2}$$

При всяких $x \in V^n$, $\hat{y} \in hxU_\sigma(x)$ определим билинейную форму формулой

$$g_{ij}(x, \hat{y}) a^i b^j \underset{def}{=} \delta(\eta_{x,\hat{y}}^{-1} a, \eta_{x,\hat{y}}^{-1} b), \tag{3}$$

где $a = (a^1, ..., a^n) \in R^n, b = (b^1, ...b^n) \in R^n, \hat{y} = (\hat{y}^1, ..., \hat{y}^n) \in h_x U_\sigma(x) \subset R^n$ (по повторяющимся (вверху и внизу) индексам подразумевается суммирование от 1 до n), а отображения $\eta_{x,\hat{y}} : \eta^{-1}(h_x^{-1}\hat{y}) \to R^n$ (при всяких $x \in V^n$, $\hat{y} = (\hat{y}^1, ..., \hat{y}^n) \in h_x U_\sigma(x) \subset R^n$) определены формулой*)

$$\eta_{x,\hat{y}} = \tau_{\hat{y}} d(h_x) h_x^{-1} \hat{y} \tag{4}$$

(определение отображения $\tau_{\hat{y}} : \hat{\pi}^{-1}(\hat{y}) \to R^n$ воспроизведено в п. 5 введения [1]; отображение $\eta_{x,\hat{y}}$— изоморфизм векторного пространства $\pi^{-1}(h_x^{-1}\hat{y})$ на векторное

---

*) Через $U_\sigma(x)$ обозначается δ-окрестность точки x в римановом многообразии (V^n, δ), т. е. $U_\sigma(x) \underset{def}{=} \left\{y \in V^n : \rho(y, x) < \sigma\right\}$.

**) Через $g_{ij}(x;y)$ обозначаются компоненты метрического тензора в карте $\left\{U_\sigma(x), h_x : U_\sigma(x) \to R^n\right\}$ в точке $y \in h_x U_\sigma(x)$; через g^{ij} обозначаются элементы матрицы, обратной матрице (g_{ij}).

*) $d(h_x) h_x^{-1} \hat{y}$ (производная координатного отображения h_x в точке $h_x^{-1}\hat{y}$ есть изоморфизм векторного пространства $\pi^{-1}(h_h^{-1}\hat{y})$ *на* векторное пространство $\hat{\pi}^{-1}(\hat{y})$. Подчеркнем, что производная $d(h_x)y$ понимается в том смысле, в каком понимается производная в теории дифференцируемых многообразий; таким образом, $d(h_x)y$ есть отображение $\pi^{-1}(y) \to \hat{\pi}^{-1}(h_x y)$, где $\hat{\pi}$ — проекция касательного расслоения многообразия R^n.

пространство R^n, потому что $d(h_x)_{h_x^{-1}\hat{y}}$ — изоморфизм векторного пространства $\pi^{-1}(h_x^{-1}\hat{y})$ на векторное пространство $\hat{\pi}^{-1}(\hat{y})$, а $\tau_{\hat{y}}$ — изоморфизм векторного пространства $\hat{\pi}^{-1}(\hat{y})$ на векторное пространство R^n).

Коэффициенты $g_{ij}(x;\hat{y})(i\in\{1,...,n\}, j\in\{1,...,n\})$ билинейной формы, стоящей в левой части равенства (4), и называются компонентами метрического тензора в карте $\{U_\sigma(x), h_x : U_\sigma(x)\to R^n\}$ (в точке $\hat{y}$).

При всяком $x\in V^n$ для всякой точки $\hat{y}=(\hat{y}_1,...,\hat{y}_n)\in h_x U_{\sigma_0}(x)\subset R^n$ полагаем по определению

$$f_x\hat{y}=(f_x^{(1)}(\hat{y}_1,...,\hat{y}^n),...f_x^{(n)}(\hat{y}_1,...,\hat{y}^n))\underset{def}{=}h_{fx}f(h_x)^{-1}\hat{y}\ ; \tag{5}$$

имеем, в частности

$$f_x 0 \underset{(B.14)}{=} 0(x\in V^n). \tag{6}$$

При всяком $x\in V^n$ формула (5) определяет в силу формулы (2) отображение $f_x : h_x U_{\sigma_0}(x)\to R^n$.

В силу леммы 4 из [3] найдется $r\in R_*^+$ такое, что при всяком $x\in V^n$ множество $h_x U_{\sigma_0}(x)$ содержит шар $\{\hat{y}\in R^n : |\hat{y}|_c < r\}$; следовательно, при всяком $x\in V^n$ область определения отображения f_x содержит шар $\{\hat{y}\in R^n : |\hat{y}|_c < r\}$, радиус которого $r\in R_*^+$ не зависит от x.

Производная отображения f_x в точке $\hat{y}\in h_x U_{\sigma_0}(x)$, обозначаемая через $d(f_x)_{\hat{y}}$, есть линейное отображение

$$\hat{\pi}^{-1}(\hat{y})\to\hat{\pi}^{-1}(f_x\hat{y}).$$

Хорошо известно (и легко доказывается), что при всяком $x\in V^n$, при всяком $\hat{y}\in h_x U_{\sigma_0}(x)$ линейное отображение

$$\hat{d}(f_x)_{\hat{y}}\underset{def}{=}\tau_{f_x\hat{y}}d(fx)_{\hat{y}}(\tau_{\hat{y}})^{-1} : R^n\to R^n \tag{7}$$

задается матрицей

$$\left(\frac{\partial f_x^{(i)}}{\partial\hat{z}^j}\right)_{\hat{z}=\hat{y}}$$

частных производных первого порядка функций $f_x^{(1)}(\hat{z}^1,...,\hat{z}^n),...,f_x^{(n)}(\hat{z}^1,...,\hat{z}^n)$ (от n переменных $\hat{z}^1,...,\hat{z}^n$), взятых в точке $(\hat{y}^1,...,\hat{y}^n)$. Известное утверждение, составляющее содержание предыдущей фразы, эквивалентно (эта эквивалентность тоже, в свою очередь, хорошо известна и легко доказывается) следующему утверждению: при всяких $x\in V^n$ и $\hat{z}\in h_x U_{\sigma_0}(x)$ имеет место равенство

$$\hat{d}(f_x)_{\hat{z}}=\frac{df_x}{d\hat{y}}|_{\hat{y}=\hat{z}}\ , \tag{8}$$

где $\frac{df_x}{d\hat{y}}|_{\hat{y}=\hat{z}}$ при всяких фиксированных $x\in V^n$ и $\hat{z}\in h_x U_{\sigma_0}(x)$ по определению есть линейное отображение $R^n\to R^n$, удовлетворяющее при всяком $\hat{y}\in h_x U_{\sigma_0}(x)$ равенству

$$f_x\hat{y}-f_x\hat{z}=\frac{\hat{d}f_x}{d\hat{y}}|_{\hat{y}=\hat{z}}(\hat{y}-\hat{z})+0(\hat{y}-\hat{z}) \tag{9}$$

где $0(\hat{y}-\hat{z})$ (стандартное обозначение) таково, что*)

$$\frac{\left|0(\hat{y}-\hat{z})\right|_c}{\left|\hat{y}-\hat{z}\right|_c}\underset{\left|\hat{y}-\hat{z}\right|_c\to 0}{--}\to 0 \qquad (10)$$

Лемма 1. *При всяком* $x\in V^n$ *для всяких точек* $\hat{y}\in h_xU_{\sigma_0}(x),\hat{y}_2\in h_xU_{\sigma_0}(x)$, *таких, что соединяющий их отрезок содержится в* $hxU_{\sigma_0}(x)$, *имеет место неравенство***)

$$\left|\hat{f}_x\hat{y}_1-\hat{d}(f_x)_0\hat{y}_1)-(f_x\hat{y}_2-\hat{d}(f_x)_0\hat{y}_2)\right|_c\leqslant\left|\hat{y}_1-\hat{y}_2\right|_c\times$$

$$\times\sup_{\hat{z}\in\left\{\hat{y}\in R^n:\left|\hat{y}\right|_c\leqslant\max\left\{\left|\hat{y}1\right|_c,\left|\hat{y}2\right|_c\right\}\right\}}\left\|\hat{d}(f_x)_{\hat{z}}-\hat{d}(f_x)_0\right\|_c \qquad (11)$$

Доказательство. При всяких $x\in V^n$, $\hat{y}_1\in h_xU_{\sigma_0}(x)$ и $\hat{y}_2\in h_xU_{\sigma_0}(x)$ имеем

$$f_x\hat{y}_1-f_x\hat{y}_2=\int_0^1\frac{df_x}{d\hat{y}}/_{\hat{y}=a\hat{y}_1+(1-\alpha)\hat{y}_2}(\hat{y}_1-\hat{y}_2)d\partial \qquad (12)$$

$$\left.\frac{df_x}{d\hat{y}}\right|_{\hat{y}=0}\hat{y}_1-\left.\frac{df_x}{d\hat{y}}\right|_{\hat{y}=0}\hat{y}_2=\left.\frac{df_x}{d\hat{y}}\right|_{\hat{y}=0}(\hat{y}_1-\hat{y}_2)=$$

$$=\int_0^1\left.\frac{df_x}{d\hat{y}}\right|_{\hat{y}=0}(\hat{y}_1-\hat{y}_2)d\alpha \qquad (13)$$

Вычитая из равенства (12) равенство (13), получаем

$$\left|(f_x\hat{y}_1-\left.\frac{df_x}{d\hat{y}}\right|_{\hat{y}=0}\hat{y}_1)-(f_x\hat{y}_2-\frac{df_x}{d\hat{y}}\right|_{\hat{y}=0}\hat{y}_2)=$$

$$=\int_0^1\left[\left.\frac{df_x}{d\hat{y}}\right|_{\hat{y}=\alpha\hat{y}_1+(1-\alpha)\hat{y}_2}-\left.\frac{df_x}{d\hat{y}}\right|_{\hat{y}=0}\right](\hat{y}_1-\hat{y}_2)d\alpha.. \qquad (14)$$

При всяком $x\in V^n$, при всяких $\hat{y}_1\in h_xU_{\sigma_0}(x),\hat{y}_2\in h_xU_{\sigma_0}(x)$ имеем

$$\left|(f_x\hat{y}_1-\left.\frac{df_x}{d_{\hat{y}}}\right|_{y=0}\hat{y}_1)-(f_x\hat{y}_2-\left.\frac{df_x}{d\hat{y}}\right|_{\hat{y}=0}\hat{y}_2)\right|_c\underset{(14)}{\leqslant}$$

$$\underset{(14)}{\leqslant}\int_0^1\left\|\left.\frac{df_x}{d\hat{y}}\right|_{\hat{y}=\alpha\hat{y}_1+(1-\alpha)\hat{y}_2}-\left.\frac{df_x}{d\hat{y}}\right|_{\hat{y}=0}\right\|_c\left|\hat{y}_1-\hat{y}_2\right|_c d\alpha\leqslant$$

$$\leqslant\left|\hat{y}_1-\hat{y}_2\right|_c\times$$

$$\times\sup_{\hat{z}\in\left\{\hat{y}\in R^n:\left|\hat{y}\right|_c\leqslant\max\left\{\left|\hat{y}_1\right|_c,\left|\hat{y}_2\right|_c\right\}\right\}}\left\|\left.\frac{df_x}{d\hat{y}}\right|_{\hat{y}=\hat{z}}-\left.\frac{df_x}{d\hat{y}}\right|_{\hat{y}=0}\right\|_c. \qquad (15)$$

Из (8), (15) следует (11). Лемма 1 доказана.

---

*) Напомним, что через $\left|\hat{y}\right|_c$, где $\hat{y}=(\hat{y}_1,\dots\hat{y}^n)\in R^n$, обозначается $(\sum_{i=1}^n(y^j)^2)^{1/2}$.

**) Напомним, что $\left\|L\right\|_c\underset{def}{=}\sup_{a\in R^n_*}(\left|L_a\right|_c\left|a\right|_c^{-1})$, где $\left|a\right|_c(\sum_{i=1}^n(a^i)^2)^{1/2}$ для всякого $a=(a1,\dots,a^n)\in R^n$.

Предложение. *Пусть* $f \in S^u$. *Тогда линейные отображения* $\hat{d}(f_x)_{\hat{y}} : R^n \to R^n$ $(x \in V^n, \hat{y} \in h_x U_{\sigma_0}(x))$ *равностепенно непрерывно зависят от* $\hat{y}$ *в точке* $\hat{y} = 0$, *т. е. для всякого* $\varepsilon \in R_*^+$ *найдется* $\xi \in R_*^+$ *такое, что для всякого* $x \in V^n$, *для всякого* $\hat{y} \in R_n$, *удовлетворяющего неравенству* $|\hat{y}|_c \langle \xi$, *имеют место включение* $\hat{y} \in h_x U_{\sigma_0}(x)$ *и неравенство*

$$\left\| \hat{d}(f_x)_{\hat{y}} - \hat{d}(f_x)_0 \right\|_c < \varepsilon.. \tag{16}$$

Доказательство. а) Так как $f \in S^u$, то 1-струйное расширение $jet_1 f$ отображения f равномерно непрерывно (см. п. 6 введения), т. е. для всякого $\theta \in R_*^+$ найдется $\delta_\theta \in R_*^+$ такое, что для всяких $y \in V^n, z \in V^n$, удовлетворяющих неравенству $\rho(y,z) < \delta_\theta$, выполнено неравенство

$$\rho_1((jet_1 f)y, (jet_1 f)z) < \theta . \tag{17}$$

Левая часть неравенства (17) может быть переписана так:

$$\rho_1((jet_1 f)y, (jet_1 f)z) \underset{(B.8)}{=} \rho_1((y, fy, dfy), (z, fz, dfz)) \underset{(B.5)}{=}$$

$$\underset{(B.5)}{=} \inf_{\substack{u \in G(z,y) \\ \upsilon \in G(fy, fz)}} \left\{ s(u) + s(\upsilon) + \left\| \varphi_\upsilon df_z \varphi_u - df_y \right\| \right\}.$$

Поэтому из неравенства (17) вытекает существование путей $u \in G(z,y)$, $v \in G(fy, fz)$, таких, что $s(u) < \theta, s(v) < \theta, \left\| \varphi_\upsilon df_z \varphi_u - df_y \right\| < \theta$.

б) При всяком $x \in V^n$ для всякого

$$\hat{y} \in h_x U_{\sigma_0}(x) \tag{18}$$

$$(\text{тогда } f(h_x)^{-1} \hat{y} \underset{(2)}{\in} U_\sigma(x)) \tag{19}$$

для всякого пути $\hat{u} \in G(0, \hat{y})$, лежащего в $h_x U_{\sigma_0}(x)$, и всякого пути $\hat{\upsilon} \in G(f_x \hat{y}, 0)$, лежащего в $h_{fx} U_\sigma(fx)$, имеем*)

$$\hat{d}(f_x)_0 - \hat{d}(f_x)_{\hat{y}} = \hat{d}(f_x)_0 - \hat{\varphi}_{\tilde{\upsilon}} \hat{d}(f_x)_0 -$$

$$- \hat{\varphi}_{\tilde{\upsilon}} \hat{d}(f_x)_0 \hat{\varphi}_{\tilde{u}} + \hat{\varphi}_{\tilde{\upsilon}} \hat{d}(f_x)_0 \hat{\varphi}_{\tilde{u}} - \hat{d}(f_x)_{\hat{y}},$$

откуда

$$\left\| \hat{d}(f_x)_0 - \hat{d}(f_x)_{\hat{y}} \right\|_c \leqslant \left\| 1_{R^n} - \hat{\varphi}_{\tilde{\upsilon}} \right\|_c \left\| \hat{d}(f_x)_0 \right\|_c +$$

$$+ \left\| \hat{\varphi}_{\tilde{\upsilon}} \right\|_c \left\| \hat{d}(f_x)_0 \right\|_c \left\| 1_{R^n} - \hat{\varphi}_{\tilde{u}} \right\|_c + \left\| \hat{\varphi}_{\tilde{\upsilon}} \hat{d}(f_x)_0 \hat{\varphi}_{\tilde{u}} - \hat{d}(f_x)_{\hat{y}} \right\|_c ; \tag{20}$$

так как для всякого $L \in Hom(R^n, R^n)$ для всяких $x \in V^n$, $\hat{y} \in h_x U_{\sigma_0}(x)$ имеет место неравенство**)

$$\|L\|_c \leqslant \left\| 1_{R^n} \right\|_{fx, f_x \hat{y}}^{(c)} \left\| L \right\|_{x, \hat{y}}^{fx, f_x \hat{y}} \left\| 1_{R^n} \right\|_{(c)}^{x, \hat{y}}, \tag{21}$$

то имеют место следующие два неравенства:

$$\left\| \hat{\varphi}_{\tilde{\upsilon}} \hat{d}(f_x)_0 \hat{\varphi}_{\tilde{u}} - \hat{d}(f_x)_{\hat{y}} \right\|_c \underset{(21)}{\leqslant} \left\| 1_{R^n} \right\|_{fx, f_x \hat{y}}^{(c)} \left\| \hat{\varphi}_{\tilde{\upsilon}} \hat{d}(f_x)_0 \hat{\varphi}_{\tilde{u}} - \hat{d}(f_x)_{\hat{y}} \right\|_{x, \hat{y}}^{fx, f_x \hat{y}} \times$$

$$\times \left\| 1_{R^n} \right\|_{(c)}^{x, \hat{y}} \leqslant \bar{d} d^{-1} \left\| \hat{\varphi}_{\tilde{\upsilon}} \hat{d}(f_x)_0 \hat{\varphi}_{\tilde{u}} - \hat{d}(f_x)_{\hat{y}} \right\|_{x, \hat{y}}^{fx, f_x \hat{y}} ; \tag{22}$$

---

*) Определения отображений $\hat{\varphi}_{\tilde{u}}, \hat{\varphi}_{\tilde{\upsilon}}$ см. в [3, § 1, пп. 3д), е)].

**) Используемые в этом неравенстве обозначения разъяснены в [3]. Само неравенство следует из формул (9), (11), (13), (14) [3].

$$\left\|\hat{d}(f_x)_0\right\|_c \underset{(21),(6)}{\overset{(B.14)}{\leqslant}} \left\|1_{R^n}\right\|_{fx,0}^{(c)} \left\|\hat{d}(f_x)_0\right\|_{x,0}^{fx,0} \left\|1_{R^n}\right\|_{(c)}^{x,0} \leqslant \bar{d}d^{-1} \left\|\hat{d}(f_x)_0\right\|_{x,0}^{fx,0}; \tag{23}$$

последние неравенства в цепочках (22), (23) следуют из леммы 1 [3], поскольку

$$\hat{y} \in h_x U_{\sigma_0} \underset{(1)}{\subset} h_x U_\sigma(x),$$

$$f_x \hat{y} \underset{(5)}{=} h_{fx} f(h_x)^{-1} \hat{y} \in h_{fx} f U_{\sigma_0}(x) \underset{(2)}{\subset} h_{fx} U_\sigma(fx),$$

$$0 \underset{(B.14)}{\in} h_x U_\sigma(x),$$

$0 \underset{(B.14)}{\in} h_{fx} U_\sigma(fx)$; кроме того, имеем

$$\left\|\hat{\varphi}_{\tilde{\upsilon}}\right\|_c \leqslant \left\|1_{R^n}\right\|_c + \left\|\hat{\varphi}_{\tilde{\upsilon}} - 1_{R^n}\right\|_c, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &\left\|\hat{d}(f_x)_0 - \hat{d}(f_x)_{\hat{y}}\right\|_c \underset{(24)}{\overset{(20)}{\leqslant}} \left\|1_{R^n} - \hat{\varphi}_{\tilde{\upsilon}}\right\|_c \left\|\hat{d}(f_x)_0\right\|_c + \\ &+(1+\left\|1_{R^n} - \hat{\varphi}_{\tilde{\upsilon}}\right\|_c)\left\|\hat{d}(f_x)_0\right\|_c \left\|1_{R^n} - \hat{\varphi}_{\tilde{u}}\right\|_c + \\ &+\left\|\hat{\varphi}_{\tilde{\upsilon}} \hat{d}(f_x)_0 \hat{\varphi}_{\tilde{u}} - \hat{d}(f_x)_{\hat{y}}\right\|_c \underset{(23)}{\overset{(22)}{\leqslant}} \bar{d}d^{-1} \left\|\hat{d}(f_x)_0\right\|_{x,0}^{fx,0} \times \\ &\times\left\{\left\|1_{R^n} - \hat{\varphi}_{\tilde{\upsilon}}\right\|_c + (1+\left\|1_{R^n} - \hat{\varphi}_{\tilde{\upsilon}}\right\|_c)\left\|1_{R^n} - \hat{\varphi}_{\tilde{u}}\right\|_c\right\} + \\ &+\bar{d}d^{-1}\left\|\hat{\varphi}_{\tilde{\upsilon}} \hat{d}(f_x)_0 \hat{\varphi}_{\tilde{u}} - \hat{d}(f_x)_y\right\|_{x,\hat{y}}^{fx, f_x\hat{y}}. \end{aligned} \tag{25}$$

в) При всяком $x \in V^n$ имеем*)

$$\begin{aligned} df_x &\underset{(5)}{=} (d(h_{fx})_{fx})^{-1} d(f_x) h_x x d(h_x)_x \underset{(7)}{=} \\ &\underset{(7)}{=} (d(h_{fx})_{fx})^{-1} (\tau_{f_x h_x x})^{-1} \hat{d}(f_x)_{h_x x \tau h_x x} d(h_x)_x \underset{(6)}{\overset{(B.14)}{=}} \\ &\underset{(6)}{\overset{(B.14)}{=}} (d(h_{fx})_{fx})^{-1} (\tau_0)^{-1} \hat{d}(f_x)_0 \tau_0 d(h_x)_x; \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} &\left\|df_x\right\| \underset{def}{=} \sup_{\mathfrak{y} \in \pi_*^{-1}(x)} \left\{\left[\delta(df_x\mathfrak{y}, df_x\mathfrak{y})\right]^{1/2} \left[\delta(\mathfrak{y},\mathfrak{y})\right]^{-1/2}\right\} \underset{(26)}{=} \\ &\underset{(26)}{=} \sup_{\mathfrak{y} \in \pi_*^{-1}(x)} \left\{\left[\delta((d(h_{fx})_{fx})^{-1}(\tau_0)^{-1}\hat{d}(f_x)_0 \tau_0 d(h_x)_x \mathfrak{y}, \quad (d(h_{fx})_{fx})^{-1}(\tau_0)^{-1} \times \right.\right. \\ &\times \hat{d}(f_x)_0 \tau_0 d(h_x)_x \mathfrak{y})\Big]^{1/2} \left[\delta(\mathfrak{y},\mathfrak{y})\right]^{-1/2} \underset{(4)}{\overset{(B.14)}{=}} \\ &\underset{(4)}{\overset{(B.14)}{=}} \sup_{a \in R_*^n} \left\{\left[\delta((d(h_{fx})_{fx})^{-1}(\tau_0)^{-1}\hat{d}(f_x)_0 a, \right.\right. \\ &(d(h_{fx})_{fx})^{-1}(\tau_0)^{-1}\hat{d}(f_x)_0 a\Big]^{1/2} \left[\delta((d(h_x)_x)^{-1}(\tau_0)^{-1} a, \right. \\ &(d(h_x)_x)^{-1}(\tau_0)^{-1} a\Big]^{-1/2}\Big\} \underset{(3.12)}{\overset{(B.14),(4)}{=}} \sup_{a \in R_*^n} \left\{\left|\hat{d}(f_x)_0 a\right|_{fx,0} (\left|a\right|_{x,0})^{-1}\right\} \underset{(3.11)}{=} \\ &\underset{(3.11)}{=} \left\|\hat{d}(f_x)_0\right\|_{x,0}^{fx,0} \end{aligned} \tag{27}$$

г) При всяком $x \in V^n$ для всякого $y \in U_{\sigma_0}(x)$ имеем

---

*) Ссылка на формулу $(M.N)$ есть иная запись ссылки на формулу (N) статьи $[M]$.

$$\begin{aligned}
df_y &\underset{(5)}{=}(d(h_{fx})_{fy})^{-1}d(f_x)_{h_xy}d(h_x)_y \underset{(7)}{=}\\
&\underset{(7)}{=}(d(h_{fx})_{fy})^{-1}(\tau_{f_xh_xy})^{-1}\hat{d}(f_x)_{h_xy}\tau_{h_xy}d(h_x)_y \underset{(5)}{=}\\
&\underset{(5)}{=}(d(h_{fx})_{fy})^{-1}(\tau_{h_{fx}fy})^{-1}\hat{d}(f_x)_{h_xy}\tau_{h_xy}d(h_x)_y.
\end{aligned}\tag{28}$$

При всяком $x\in V^n$ для всякого $y\in U_{\sigma 0}(x)$ для всякого пути $u\in G(x,y)$, лежащего в $U_{\sigma 0}(x)$, имеем

$$\begin{aligned}
\varphi_u &\underset{(3.22)}{=}(d(h_x)_x)^{-1}(\tau_{h_xx})^{-1}\hat{\varphi}_u\tau_{h_xy}d(h_x)_y \underset{(B.14)}{=}\\
&\underset{(B.14)}{=}(d(h_x)_x)^{-1}(\tau_0)^{-1}\hat{\varphi}_u\tau_{h_xy}d(h_x)_y
\end{aligned}\tag{29}$$

При всяком $x\in V^n$ для всякого $y\in U_{\sigma 0}(x)$ (тогда $fy\underset{(2)}{\in}U_\sigma(fx)$) для всякого пути $\nu\in G(fy,fx)$, лежащего в $U_\sigma(fx)$, имеем

$$\begin{aligned}
\varphi_\upsilon &\underset{(3.22)}{=}(d(h_{fx})_{fy})^{-1}(\tau_{h_{fx}fy})^{-1}\hat{\varphi}_\upsilon\tau_{h_{fx}fx}d(h_{fx})_{fx} \underset{(B.14)}{=}\\
&\underset{(B.14)}{=}(d(h_{fx})_{fy})^{-1}(\tau_{h_{fx}fy})^{-1}\hat{\varphi}_\upsilon\tau_0 d(h_{fx})_{fx}
\end{aligned}\tag{30}$$

При всяком $x\in V^n$ для всякого $y\in U_{\sigma 0}(x)$ (тогда $fy\underset{(2)}{\in}U_\sigma(fx)$) для всякого пути $u\in G(x,y)$, лежащего в $U_{\sigma 0}(x)$, и всякого пути $\nu\in G(fy,fx)$, лежащего в $U_{\sigma 0}(fx)$, имеем

$$\varphi_\upsilon df_x\varphi_u \overset{(26),(29)}{\underset{(30)}{=}} (d(h_{fx})_{fy})^{-1}(\tau_{h_{fx}fy})^{-1}\hat{\varphi}_\upsilon\hat{d}(\hat{f}_x)_0\hat{\varphi}_u\tau_{h_xy}d(h_x)_y,\tag{31}$$

$$\varphi_\upsilon df_x\varphi_u - df_y \overset{(28)}{\underset{(31)}{=}}(d(h_{fx})_{fy})^{-1}(\tau_{h_{fx}fy})^{-1}\left[\hat{\varphi}_\upsilon\hat{d}(f_x)_0\hat{\varphi}_u - d(f_x)_{h_xy}\right]\tau_{h_xy}d(h_x)_y,\tag{32}$$

$$\begin{aligned}
&\left\|\varphi_\upsilon df_x\varphi_u - df_y\right\| \underset{def}{=} \sup_{\eta\in\pi_*^{-1}(y)}\left\{\left[\delta((\varphi_\upsilon df_x\varphi_u - df_y)\eta,(\varphi_\upsilon df_x\varphi_u - df_y)\eta)\right]^{1/2}\times\right.\\
&\left.\times\left[\delta(\eta,\eta)\right]^{-1/2}\right\} = \sup_{a\in R_*^n}\left\{\left[\delta((\varphi_\upsilon df_x\varphi_u - df_y)(d(h_x)_y)^{-1}(\tau_{h_xy})^{-1}a,\right.\right.\\
&(\varphi_\upsilon df_x\varphi_u - df_y)(d(h_x)_y)^{-1}(\tau_{h_xy})^{-1}a\Big]^{1/2}\Big[\delta((d(h_x)_y)^{-1}(\tau_{h_xy})^{-1}a,\\
&(d(h_x)_y)^{-1}(\tau_{h_xy})^{-1}a\Big]^{1/2}\Big\} \underset{(32)}{=} \sup_{a\in R_*^n}\Big\{\Big[\delta((d(h_{fx})_{fy})^{-1}(\tau_{h_xxfy})^{-1}\Big[\hat{\varphi}_\upsilon\hat{d}(f_x)_0\hat{\varphi}_u -\\
&-\hat{d}(f_x)_{h_xy}\Big]a,(d(h_{fx})_{fy})^{-1}(\tau_{h_{fx}fy})^{-1}\left[\hat{\varphi}_\upsilon\hat{d}(f_x)_0\hat{\varphi}_u - \hat{d}(f_x)_{h_xy}\right]a\Big]^{1/2}\times\\
&\times\left[\delta((d(h_x)_y)^{-1}(\tau_{h_xy})^{-1}a,(d(h_x)_y)^{-1}(\tau_{h_xy})^{-1}a\right]^{-1/2} \underset{(3.12)}{=}\\
&\underset{(3.12)}{=}\sup_{a\in R_*^n}\left\{\left|(\hat{\varphi}_\upsilon\hat{d}(f_x)_0\hat{\varphi}_u - \hat{d}(f_x)_{h_xy})a\right|_{fx,h_{fx}fy}(|a|_{x,h_xy})^{-1}\right\} \underset{(3.11)}{=}\\
&\underset{(3.11)}{=}\left\|\hat{\varphi}_\upsilon\hat{d}(f_x)_0\hat{\varphi}_u - \hat{d}(f_x)_{h_xy}\right\|_{x,hxy}^{fx,hfxfy} \underset{(5)}{=}\left\|\hat{\varphi}_\upsilon\hat{d}(f_x)_0\hat{\varphi}_u -\right.\\
&\left.-\hat{d}(f_x)_{h_xy}\right\|_{x,h_xy}^{fx,f_x\hat{y}} \overset{(3.20)}{\underset{(3.21)}{=}}\left\|\hat{\varphi}_{\upsilon(fx)}\hat{d}(f_x)_0\hat{\varphi}_{\hat{u}(x)} - \hat{d}(f_x)_y\right\|_{x,\hat{y}}^{fx,f_x\hat{y}},
\end{aligned}\tag{33}$$

где $\hat{y}=h_xy$.

д) При всяких $x\in V^n$ и $y\in U_{\sigma 0}(x)$ для всякого пути $u\in G(x,y)$, лежащего в $U_{\sigma 0}(x)$, путь $\hat{u}(x)$, определенный формулой $(\hat{u}(x))_t = h_xu_t(t\in[0,1])$, лежит в множестве $h_xU_{\sigma 0}(x)$, т. е.

$$\hat{u}(x):[0,1)]\to h_xU_{\sigma_0}(x),\tag{34}$$

причем

$$\hat{u}(x) \in G(h_x x, h_x y) \underset{(B.14)}{=} G(0, h_x y). \tag{35}$$

При всяких $x \in V^n$ и $y \in U_{\sigma 0}(x)$ (тогда $fy \underset{(2)}{\in} U_\sigma(fx)$) для всякого пути $\upsilon \in G(fy, fx)$, лежащего в $U_{\sigma 0}(fx)$, путь $\hat{\upsilon}(fx)$, определенный формулой $(\hat{\upsilon}(fx))_t = h_{fx} u_t (t \in [0,1])$, лежит в множестве $h_{fx} U_\sigma(fx)$, т. е.

$$\hat{\upsilon}(fx) : [0,1)] \to h_{fx} U_{\sigma_0}(fx), \tag{36}$$

причем

$$\hat{\upsilon}(fx) \in G(h_{fx} fy, h_{fx} fx) \underset{(B.14)}{=} G(h_{fx} fy, 0) \underset{(5)}{=} G(h_f x_f y, 0). \tag{37}$$

При всяких $x \in V^n$ и $y \in U_{\sigma 0}(x)$ (тогда $fy \underset{(2)}{\in} U_\sigma(fx)$) для всякого пути $u \in G(x, y)$, лежащего в $U_{\sigma 0}(x)$, и всякого пути $\upsilon \in G(fy, fx)$, лежащего в $U_{\sigma 0}(fx)$, имеем*)

$$\hat{y} \underset{def}{=} h_x y \in h_x U_{\sigma_0}(x), \hat{u}(x) \underset{(35),(38)}{\in} G(0, \hat{y}), \tag{38}$$

причем имеет место формула (34), т. е. путь $\hat{u}(x)$ лежит в множестве $h_x U_{\sigma 0}(x) \underset{(1)}{\subset} h_x U_\sigma(x)$;

$$\hat{\upsilon}(fx) \overset{(37)}{\underset{(38)}{\in}} G(f_x \hat{y}, 0),$$

причем имеет место формула (36), т. е. путь $\hat{\upsilon}(fx)$ лежит в множестве $h_{fx} U_{\sigma_0}(fx)$. Поэтому при всяких $x \in V^n$ и $y \in U_{\sigma_0}(x)$ точка $\hat{y} \underset{(38)}{=} h_x y$, путь

$$\hat{u} \underset{def}{=} \hat{u}(x) \tag{39}$$

и путь

$$\hat{\upsilon} \underset{def}{=} \hat{\upsilon}(fx) \tag{40}$$

удовлетворяют условиям (см. начало фразы, содержащей формулу (20)), при которых была выведена формула (25); следовательно,

$$\begin{aligned}
&\left\| \hat{d}(\hat{f}_x)_0 - \hat{d}(\hat{f}_x)_{\hat{y}} \right\|_c \overset{(25)}{\underset{(39),(40)}{\leqslant}} \bar{d}d^{-1} \left\| \hat{d}(\hat{f}_x)_0 \right\|_{x,0}^{fx,0} \left\| 1_{R^n} - \hat{\varphi}_{\hat{\upsilon}(f,x)} \right\|_c + \\
&+ (1 + \left\| 1_{R^n} - \hat{\varphi}_{\hat{\upsilon}(fx)} \right\|_c \left\| 1_{R^n} - \hat{\varphi}_{\hat{u}(x)} \right\|_c \Big\} + \bar{d}d^{-1} \left\| \hat{\varphi}_{\hat{\upsilon}(f,x)} \hat{d}(\hat{f}_x)_0 \hat{\varphi}_{\hat{u}(x)} - \right. \\
&\left. - \hat{d}(\hat{f}_x)_{\hat{y}} \right\|_{x,\hat{y}}^{fx, \hat{f}_x \hat{y}} \overset{(27)}{\underset{(33)}{=}} \bar{d}d^{-1} \left\| df_x \right\| \Big\{ \left\| 1_{R^n} - \hat{\varphi}_{\hat{\upsilon}(fx)} \right\|_c + \\
&+ (1 + \left\| 1_{R^n} - \hat{\varphi}_{\hat{\upsilon}(fx)} \right\|_c \left\| 1_{R^n} - \hat{\varphi}_{\hat{u}(x)} \right\|_c + \bar{d}d^{-1} \left\| \varphi_\upsilon df_x \varphi_u - df_y \right\| \underset{(B.2)}{\leqslant} \\
&\underset{(B.2)}{\leqslant} \bar{d}d^{-1} \left\| \left| df \right| \right\| \Big\{ \left\| 1_{R^n} - \hat{\varphi}_{\hat{\upsilon}(fx)} \right\|_c + (1 + \left\| 1_{R^n} - \hat{\varphi}_{\hat{\upsilon}(f,x)} \right\|_c) \left\| 1_{R^n} - \hat{\varphi}_{\hat{u}(x)} \right\|_c \Big\} + \\
&+ \bar{d}d^{-1} \left\| \varphi_\upsilon df_x \varphi_u - df_y \right\| \underset{\text{лемма } 2[3]}{\leqslant} \bar{d}d^{-1} \left\| \left| df \right| \right\| \big\{ R(s(\hat{\upsilon}(fx))) + \\
&+ (1 + R(s(\hat{\upsilon}(fx)))) R(s(\hat{u}(x))) \big\} + \bar{d}d^{-1} \left\| \varphi_\upsilon df_x \varphi_u - df_y \right\| \underset{(3.40)}{=} \\
&\underset{(3.40)}{=} \bar{d}d - 1 \left\| \left| df \right| \right\| \big\{ R(s(\upsilon)) + (1 + R(s(\upsilon)) R(s(\upsilon)) \big\} + \bar{d}d^{-1} \left\| \varphi_\upsilon df_x \varphi_u - df_y \right\|,
\end{aligned} \tag{41}$$

где функция $R(.) : R^+ \to R^+$ определена формулой

$$R(r) \underset{def}{=} r\bar{c}d - 1n^{5/2} \exp(\bar{c}d^{-1} n^2 r). \tag{42}$$

---

*) Точка $\hat{y}$ зависит не только от y, но и от x, но для краткости эта зависимость не отражена в обозначении этой точки.

Подведем итог подпункта д), являющийся также итогом подпунктов б)—д): *при всяких* $x \in V^n$ *и* $y \in U_{\sigma_0}(x)$ *(тогда* $fy \underset{(2)}{\in} U_\sigma(fx)$ *для всякого пути* $u \in G(x,y)$, *лежащего в* $U_{\sigma_0}(x)$, *и всякого пути* $\upsilon \in G(fy, fx)$, *лежащего в* $U_\sigma(fx)$, *имеет место неравенство (в котором* $y \underset{(38)}{=} h_x y$ *)*

$$\left\|\hat{d}(\hat{f}_x)_0 - \hat{d}(\hat{f}_x)_{\hat{y}}\right\|_c \underset{(41)}{\leqslant} \bar{d}d^{-1}\left\|\left|df\right|\right\|\left\{R(s(\upsilon)) + (1+R(s(\upsilon)))R(s(u))\right\} + \\ +\bar{d}d^{-1}\left\|\varphi_\upsilon df_x \varphi_u - df_y\right\|, \tag{43}$$

где функция $R(.): R^+ \to R^+$ *определена формулой (42).*

е) Пусть дано $\varepsilon \in R_*^+$. Возьмем

$$\theta(\varepsilon) \in (0, \sigma_0) \tag{44}$$

такое, чтобы были выполнены следующие два неравенства:

$$\bar{d}d^{-1}\left\|\left|df\right|\right\| R(\theta(\varepsilon))(2 + R(\theta(\varepsilon))) < \varepsilon/2, \tag{45}$$

$$\bar{d}d^{-1}\theta(\varepsilon) < \varepsilon/2 \tag{46}$$

(напомним, что функция $R(\cdot): R^+ \to R^+$ определена формулой (42), из которой следует, что $R(r) \underset{r\to 0}{\to}$, поэтому нужное $\theta(\varepsilon) \in (0, \sigma_0)$ существует) .

В силу изложенного в подпункте а) найдется $\delta_{\theta(\varepsilon)} \in R_*^+$ такое, что для всяких $x \in V^n$ и $y \in V^n$, удовлетворяющих неравенству

$$\rho(y,x) < \gamma_\varepsilon \underset{def}{=} \min\left\{\delta_{\theta(\varepsilon)}, \sigma_0\right\}, \tag{47}$$

найдутся пути[*] $u \in G(x,y)$, $\nu \in G(fy, fx)$, такие, что

$$s(u) < \theta(\varepsilon), \tag{48}$$

$$s(\upsilon) < \theta(\varepsilon), \tag{49}$$

$$\left\|\varphi_\upsilon df_x \varphi_u - df_y\right\| < \theta(\varepsilon). \tag{50}$$

Для этих путей имеем (пользуясь тем, что функция $R(\cdot)$, определенная формулой (42), монотонно возрастает)

$$\bar{d}d^{-1}\left\|\left|df\right|\right\|\left\{R(s(\upsilon)) + (1+R(s(\upsilon)))R(s(u))\right\} \underset{(49)}{\overset{(48)}{\leqslant}} \bar{d}d^{-1}\left\|\left|df\right|\right\|\left\{R(\theta(\varepsilon)) + \right.$$

$$\left. +(1+R(\theta(\varepsilon)))R(\theta(\varepsilon))\right\} \underset{(45)}{<} \frac{\varepsilon}{2},$$

$$d\bar{d}^{-1}\left\|\varphi_\upsilon df_x \varphi_u - df_y\right\| \underset{(50)}{<} \bar{d}d^{-1}\theta(\varepsilon) \underset{(46)}{<} \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$\bar{d}d^{-1}\left\|\left|df\right|\right\|\left\{R(s(\upsilon)) + (1+R(s(\upsilon)))R(s(u))\right\} + \bar{d}d^{-1}\left\|\varphi_\upsilon df_x \varphi_u - df_y\right\| < \varepsilon. \tag{51}$$

Так как $\theta(\varepsilon) \underset{(44)}{<} \sigma_0, u \in G(x,y)$, то из неравенства (48) следует, что путь u лежит в $U_{\sigma_0}(x)$. В самом деле, для всякого $\tau \in [0,1]$ имеем

$$\rho(u_\tau, x) = \inf_{\omega \in G(x, u_\tau)} s(\omega) \leqslant s(\omega^{[\tau]}), \tag{52}$$

где путь $\omega^{[\tau]} \in G(x, u_\tau)$ определен формулой

$$\omega_t^{[\tau]} \underset{def}{=} u_{\tau + t(l-\tau)}(t \in [0,1]);$$

---

[*] Пути u, ν зависят, конечно, от x, y, но для краткости это не отражено в их обозначениях.

далее,

$$s(\omega^{[\tau]} = \int_0^1 \left[\delta((u_{\tau+t(1-\tau)})^{\cdot}, (u_{\tau(l-\tau)})^{\cdot})\right]^{1/2} dt =$$

$$= \int_\tau^1 \left[\delta(\dot{u}_t, \dot{u}_t)\right]^{1/2} dt \leqslant \int_\tau^1 \left[\delta(\dot{u}_t, \dot{u}_t)\right]^{1/2} dt - s(u) \underset{(48)}{<} \theta(\varepsilon) \underset{(44)}{<} \sigma_0 ; \quad (53)$$

из (52), (53) следует, что $u_\tau \in U_{\sigma_0}(x)$ для всякого $\tau \in [0,1]$, что и требовалось доказать.

Так как $\theta(\varepsilon) \underset{(44)}{<} \sigma_0 \underset{(1)}{<} \sigma, \upsilon \in G(fy, fx)$, то из неравенства (49) следует, что путь ν лежит в $U_\sigma(fx)$. В самом деле, для всякого $\tau \in [0,1]$ имеем

$$\rho(\upsilon_\tau, fx) = \inf_{\omega \in G(\upsilon_\tau, fx)} s(\omega) \leqslant s(\omega^{\{\tau\}}), \quad (54)$$

где путь $\omega^{\{\tau\}} \in G(\upsilon_\tau, f_x)$ определен формулой

$$\omega_t^{\{\tau\}} \underset{def}{=} \upsilon_{\tau t} (t \in [0,1];$$

далее,

$$s(\omega^{\{\tau\}}) = \int_0^1 \left[\delta((\upsilon_{\tau t}).,(\upsilon_{\tau t}).)\right]^{1/2} dt = \int_0^\tau \left[\delta((\dot{\upsilon}_t).,(\dot{\upsilon}_t)\right]^{1/2} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left[\delta(\dot{\upsilon}_t, \dot{\upsilon}_t)\right]^{1/2} dt = s(\upsilon) \underset{(49)}{<} \theta(\varepsilon) \underset{(44)}{<} \sigma_0 \underset{(1)}{<} \sigma \quad (55)$$

из (54), (55) следует, что $\upsilon_\tau \in U_\sigma(fx)$ для всякого $\tau \in [0,1]$, что и требовалось доказать.

Таким образом, *для всякого* $\varepsilon \in R_*^+$ *найдется* $\gamma_\varepsilon \underset{(47)}{\in} R_*^+$ *такое, что для всякого* $x \in V^n$ *всякая точка* $y \in U_{\gamma_\varepsilon}(x) \underset{(47)}{\subset} U_{\sigma_0}(x)$ *и пути* $u \in G(x,y), u \in G(fy, fx)$, *определенные фразой, содержащей формулы (48)—(50), удовлетворяют условиям утверждения, составляющего итог подпунктов б)—д), и потому*

$$\left\| \hat{d}(f_x)_0 - \hat{d}(f_x)_{\hat{y}} \right\|_c \overset{(43)}{\underset{(51)}{<}} \varepsilon .$$

ж) Пусть дано $\varepsilon \in R_*^+$. Возьмем $\gamma_\varepsilon \in R_*^+$, обладающее свойством, сформулированным в последней фразе подпункта е). Положим

$$\xi(\gamma_\varepsilon) \underset{def}{=} d_1 \gamma_\varepsilon ,$$

где $d_1 \in R_*^+$ таково, что для всяких $\gamma \in (0, \sigma)$, $x \in V^n$, для всякого $\hat{y} \in R^n$, удовлетворяющего неравенству $|\hat{y}|_c < d_1 \gamma$, имеет место включение $\hat{y} \in h_x U_\gamma(x)$ (такое d_1 существует в силу леммы 4 из [3]). Тогда для всякого $\hat{y} \in R^n$, удовлетворяющего неравенству $|\hat{y}|_c < \xi(\gamma_\varepsilon)$, и всякого $x \in V^n$ имеют место включение $\hat{y} \in h_x U_{\sigma_0}(x)$ и неравенство

$$\left\| \hat{d}(f_x)_0 - \hat{d}(f_x)_{\hat{y}} \right\|_c < \varepsilon ,$$

эквивалентное неравенству (16). Предложение доказано.

Литература

1. Миллионщиков В. М. //Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 2. С. 223—236.
2. Миллионщиков В. М. //Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 5. С. 771—776.