УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И АВТОМОРФИЗМЫ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ. I

Для различных классов линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений построены отображения действительной прямой в множества эндоморфизмов абстрактных векторных расслоений. Доказано, что построенные отображения являются гомоморфизмами группы действительных чисел в группы автоморфизмов этих абстрактных векторных расслоений.

Ранее* нами изложены основы теории показателей Ляпунова линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с неограниченными, вообще говоря, коэффициентами. В статье изложена конструкция, сводящая рассмотрение классов систем * к рассмотрению семейств автоморфизмов абстрактных векторных расслоений.

Пусть на метрическом пространстве D задана динамическая система (т. е. непрерывное действие группы R) f^t. Обозначим через S множество непрерывных отображений $A(\cdot): D \to \operatorname{End} R^n$, где $\operatorname{End} R^n$ — множество линейных отображений n-мерного векторного пространства R^n в себя. В дальнейшем n-мерное вещественное пространство R^n можно всюду заменить на комплексное n-мерное пространство C^n.

Для всяких $A \in S$, $x \in D$ рассматривается линейная система дифференциальных уравнений:

$$\dot{u} = A(f^t x)\, u, \tag{1}$$

где $u \in R^n$. Через $X(\theta,\ \tau;\ A,\ x)$ обозначим оператор Коши этой системы; напомним, что оператор Коши $X(\theta,\ \tau;\ A,\ x)$ значению всякого решения системы (1) в точке τ ставит в соответствие значение того же решения в точке Θ. Положив

$$E = (S \times D) \times R^n, \tag{2}$$

$$B = S \times D \tag{3}$$

(в этих формулах знак умножения означает умножение множеств) и определив отображение p как проекцию произведения $(S \times D) \times R^n$ на сомножитель $(S \times D)$, получим

$$p((A,\ x),\ u) = (A,\ x) \tag{4}$$

для всяких $A \in S$, $x \in D$, $u \in R^n$. Через $p^{-1}(b)$ обозначается полный прообраз точки $b \in B$ при отображении $p: E \to B$. Из формул (2) — (4) следует, что

$$p^{-1}(b) = \{b\} \times R^n \tag{5}$$

для всякого $b \in B$. Для всякого $b \in B$ определим отображение $F_b : p^{-1}(b) \to R^n$ формулой

$$F_b(b,\ u) = u. \tag{6}$$

При всяком $b \in B$ так определенное отображение F_b есть биекция множества $p^{-1}(b)$ на множество R^n. При каждом $b \in B$ с помощью этой биекции перенесем структуру векторного пространства с R^n на $p^{-1}(b)$, положив по определению

$$\alpha\xi + \beta\eta = F_b^{-1}(\alpha F_b \xi + \beta F_b \eta) \tag{7}$$

для всяких чисел α, β и всяких $\xi \in p^{-1}(b)$, $\eta \in p^{-1}(b)$. Задав таким образом при всяком $b \in B$ структуру n-мерного векторного пространства на множестве $p^{-1}(b)$, мы превратили тройку $(E,\ p,\ B)$ в *абстрактное векторное расслоение*. Напомним, что абстрактным векторным расслоением называется тройка $(E,\ p,\ B)$, где E и B —

---

* *Миллионщиков В. М.* Показатели Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений. — Изв. АН КазССР. Сер. физ-мат., 1986, № 1, с. 36—40.

некоторые множества, а p — некоторое отображение E на B, причем на полном прообразе $p^{-1}(b)$ всякой точки $b \in B$ задана структура n-мерного векторного пространства. При всяком $t \in R$ определим отображение $X^t : E \to E$ формулой

$$X^t((A,\ x),\ u) = ((A,\ f^t x),\ X(t,\ 0;\ A,\ x)\,u), \tag{8}$$

где $A \in S$, $x \in D$, $u \in R^n$. При всяком $t \in R$ определим также отображение $\chi^t : B \to B$; оно задается формулой

$$\chi^t(A,\ x) = (A,\ f^t x), \tag{9}$$

где $A \in S$, $x \in D$.

Напомним, что эндоморфизмом абстрактного векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ называется пара $(X,\ \chi)$, где отображения $X : E \to E$, $\chi : B \to B$ таковы, что $pX = \chi p$ и сужение отображения X на всякий слой есть линейное отображение (слоем над точкой базы B называется полный прообраз этой точки при отображении p). Умножение эндоморфизмов определяется формулой

$$(X,\ \chi)\cdot(Y,\ \eta) = (XY,\ \chi\eta), \tag{10}$$

где XY, $\chi\eta$ — произведения (композиции) отображений X, Y и соответственно χ, η. Как известно, эндоморфизм называется *автоморфизмом*, если существует эндоморфизм, являющийся его левым и правым обратным. Автоморфизмы образуют группу.

Л е м м а 1. Для всякого $t \in R$ пара $(X^t,\ \chi^t)$ есть эндоморфизм абстрактного векторного расслоения, определенного формулами (2) — (7).

Доказательство. Пусть дано $t \in R$.

1. Для всяких $A \in S$, $x \in D$, $u \in R^n$ в силу формулы (8) имеем $X^t((A,\ x),\ u) = ((A,\ f^t x),\ X(t,\ 0;\ A,\ x)\,u)$, откуда вследствие формулы (4), взятой с $f^t x$ вместо x и $X(t,\ 0;\ A,\ x)\,u$ вместо u, имеем

$$pX^t((A,\ x),\ u) = (A,\ f^t x). \tag{11}$$

В силу (9) имеет место равенство

$$(A,\ f^t x) = \chi^t(A,\ x) \tag{12}$$

для всяких $A \in S$, $x \in D$. Согласно (4), имеем

$$p\,((A,\ x),\ u) = (A,\ x) \tag{13}$$

для всяких $A \in S$, $x \in D$, $u \in R^n$.

Из (11) — (13) следует, что для всяких $A \in S$, $x \in D$, $u \in R^n$ имеет место равенство $pX^t((A,\ x),\ u) = \chi^t p\,((A,\ x),\ u)$. Значит,

$$pX^t = \chi^t p, \tag{14}$$

2. Пусть дано $b \in B$. Согласно формуле (3), $b = (A,\ x)$, где $A \in S$, $x \in D$. Для сужения $X^t[b] = X^t[(A,\ x)]$ отображения $X^t : E \to E$ на слой $p^{-1}(b)$ в силу формул (6), (8) имеем

$$X^t[b] = F^{-1}_{(A,\,f^t x)} X(t,\ 0;\ A,\ x)\,F_b. \tag{15}$$

Отображение $X(t,\ 0;\ A,\ x) : R^n \to R^n$ линейно, поскольку оператор Коши линейной однородной системы дифференциальных уравнений линеен. Отображение F_c при всяком $c \in B$ есть изоморфизм векторного пространства $p^{-1}(b)$ на векторное пространство R^n — так была введена структура векторного пространства на слоях. Поэтому из формулы (15) следует, что $X^t[b]$ есть линейное отображение слоя $p^{-1}(b)$ в слой $p^{-1}((A,\ f^t x)) = p^{-1}(x^t b)$; последнее равенство следует из (9). Лемма доказана.

При всяком $t \in R$ положим

$$Ht = (X^t,\ \chi^t), \tag{16}$$

где отображение $X^t : E \to E$ определено формулой (8), а отображение $\chi^t : B \to B$ —

формулой (9).

Согласно лемме 1, формула (16) определяет отображение H действительной прямой в множество эндоморфизмов абстрактного векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$.

Т е о р е м а. Отображение H есть гомоморфизм группы R в группу автоморфизмов абстрактного векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$. Доказательству этой теоремы предпошлем несколько лемм.

Л е м м а 2. При всяких $\Theta \in R$, $\tau \in R$, $A \in S$, $x \in D$ для оператора Коши системы $\dot{u} = A(f^t x)u$ имеет место равенство $X(\Theta+\tau,\ \Theta;\ A,\ x) = X(\tau,\ 0;\ A,\ f^{\Theta}x)$.

Доказательство. Пусть даны $\Theta \in R$, $\tau \in R$, $A \in S$, $x \in D$.

1. По определению оператор $X(\Theta+\tau,\ \Theta;\ A,\ x)$ есть отображение $u(\Theta) \to u(\Theta+\tau)$, где $u(\cdot)$ пробегает множество решений системы $\dot{u} = A(f^t x)u$.

2. Оператор $X(\tau,\ 0;\ A,\ f^{\Theta}x)$, согласно тому же определению, есть отображение $v(0) \to v(\tau)$, где $v(\cdot)$ пробегает множество решений системы $\dot{v} = A(f^t f^{\theta} x)v$. Так как $f^t f^{\theta} = f^{t+\theta}$ для всякого $t \in R$, то последняя система переписывается в виде $\dot{v} = A(f^{t+\theta}x)v$.

3. Мы можем переписать систему $\dot{v} = A(f^{t+\theta}x)v$ в виде $\dot{v} = C(t+\Theta)v$, если обозначим $A(f^t x)$ через $C(t)$. При таком обозначении система $\dot{u} = A(f^t x)u$ запишется в виде $\dot{u} = C(t)u$.

4. Далее, если $u(\cdot)$ — решение системы $\dot{u} = C(t)u$, то его сдвиг на Θ есть решение системы $\dot{v} = C(t+\Theta)v$, поскольку из тождества $\dot{u}(t) \equiv C(t)u(t)$ следует тождество $\dot{v}(t+\Theta) \equiv C(t+\Theta)v(t+\Theta)$. Обратно, если $v(\cdot)$ — решение системы $\dot{v} = C(t+\Theta)v$, то его сдвиг на $-\Theta$ есть решение системы $\dot{u} = C(t)u$, поскольку из тождества $\dot{v}(t) \equiv C(t+\Theta)v(t)$ следует тождество $\dot{v}(t+\Theta) \equiv C(t)v(t+\Theta)$. Следовательно, всякое решение $v(\cdot)$ системы $\dot{v} = C(t+\Theta)v$ есть сдвиг на Θ некоторого решения $u(\cdot)$ системы $\dot{u} = C(t)u$.

5. Из предыдущего пункта следует, что отображение $u(\Theta) \to u(\Theta+\tau)$, где $u(\cdot)$ пробегает множество решений системы $\dot{u} = C(t)u$, совпадает с отображением $v(0) \to v(\tau)$, где $v(\cdot)$ пробегает множество решений системы $\dot{v} = C(t+\Theta)v$. Вернувшись от обозначений п. 3 к исходным обозначениям, получим, что отображение $u(\Theta) \to u(\Theta+\tau)$, где $u(\cdot)$ пробегает множество решений системы $\dot{u} = A(f^t x)u$, совпадает с отображением $v(0) \to v(\tau)$, где $v(\cdot)$ пробегает множество решений системы $\dot{v} = A(f^{t+\Theta}x)v$. Первое из этих отображений, согласно п. 1, есть $X(\Theta+\tau,\ \Theta;\ A,\ x)$, а второе, согласно п. 2, есть $X(\tau,\ 0;\ A,\ f^{\theta}x)$. Лемма доказана.

Л е м м а 3. Для всяких $\Theta \in R$, $\sigma \in R$, $\tau \in R$, $A \in S$, $x \in D$ имеет место равенство

$$X(\Theta,\ \sigma;\ A,\ x)\,X(\sigma,\ \tau;\ A,\ x) = X(\Theta,\ \tau;\ A,\ x).$$

Доказательство. Пусть даны $\Theta \in R$, $\sigma \in R$, $\tau \in R$, $A \in S$, $x \in D$. По определению оператор $X(\sigma,\ \tau;\ A,\ x)$ есть отображение $u(\tau) \to u(\sigma)$, а оператор $X(\Theta,\ \sigma;\ A,\ x)$ есть отображение $u(\sigma) \to u(\Theta)$, где $u(\cdot)$ пробегает множество решений системы $\dot{u} = A(f^t x)u$. Произведение этих операторов $X(\Theta,\ \sigma;\ A,\ x)\, X(\sigma,\ \tau;\ A,\ x)$ есть, следовательно, отображение $u(\tau) \to u(\Theta)$, где $u(\cdot)$ пробегает множество решений системы $\dot{u} = A(f^t x)u$. Последнее отображение есть $X(\Theta,\ \tau;\ A,\ x)$. Лемма доказана.

Л е м м а 4. Для всяких $\Theta \in R$, $A \in S$, $x \in D$ имеет место равенство $X(\Theta,\ \Theta;\ A,\ x) = 1_{R^n}$.

Доказательство. Пусть даны $\Theta \in R$, $A \in S$, $x \in D$. По определению оператор $X(\Theta,\ \Theta;\ A,\ x)$ значению всякого решения системы $\dot{u} = A(f^t x)u$ в точке Θ ставит в соответствие значение этого же решения в этой же точке Θ. Следовательно, этот оператор есть тождественное отображение пространства R^n. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. 1. Так как при всяких $t \in R$, $s \in R$ имеет место равенство $f^{t+s} = f^t f^s$, то из (9) следует, что $\chi^{t+s} = \chi^t \chi^s$ для всяких $t \in R$, $s \in R$. 2. Пусть даны $t \in R$, $s \in R$, $A \in S$, $x \in D$, $u \in R^n$. В силу формулы (8) имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} X^t X^s((A,\ x),\ u) &= X^t((A,\ f^s x),\ X(s,\ 0;\ A,\ x)u) = \\ &= ((A,\ f^{t+s}x),\ X(t,\ 0;\ A,\ x)\, X(s,\ 0;\ A,\ x)u). \end{aligned} \tag{17}$$

Вследствие леммы 2 имеем $X(t,\ 0;\ A,\ f^s x) = X(t+s,\ s;\ A,\ x)$, а в силу леммы 3 $X(t+s,\ s;\ A,\ x)\, X(s,\ 0;\ A,\ x) = X(t+s,\ 0;\ A,\ x)$. Поэтому правая часть последнего равенства цепочки (17) равна $((A,\ f^{t+s}x),\ X(t+s,\ 0;\ A,\ x)u) = X^{t+s}((A,\ x),\ u)$; последнее равенство получено из (8) заменой t на $t+s$. Таким образом, $X^{t+s} = X^t X^s$ для всяких $t \in R$, $s \in R$. 3. Объединив результаты предыдущих пунктов с помощью формулы (10), получим, что

$$(X^{t+s},\ \chi^{t+s}) = (X^t,\ \chi^t)\cdot(X^s,\ \chi^s) \tag{18}$$

для всяких $t \in R$, $s \in R$. 4. При всяком $t \in R$ имеют место формулы

$$X^t X^{-t} = X^0 = 1_E;\ X^{-t} X^t = X^0 = 1_E, \tag{19}$$

в этих двух цепочках первые равенства следуют из (18), а последние — из формулы (8) в силу леммы 4. При всяком $t \in R$ имеем также

$$\chi^t \chi^{-t} = \chi^0 = 1_B;\ \chi^{-t}\chi^t = \chi^0 = 1_B, \tag{20}$$

В этих цепочках первые равенства следуют из (18), а последние — из (9).

Из (19), (20) вследствие (10) вытекает формула

$$(X^t,\ \chi^t)\cdot(X^{-t},\ \chi^{-t}) = (X^{-t},\ \chi^{-t})\cdot(X^t,\ \chi^t) = (1_E,\ 1_B), \tag{21}$$

означающая, что при всяком $t \in R$ эндоморфизм $(X^{-t},\ \chi^{-t})$ является обратным к эндоморфизму $(X^t,\ \chi^t)$. Следовательно, пара $(X^t,\ \chi^t)$ при всяком $t \in R$ есть автоморфизм абстрактного векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$. 5. Соединив результаты двух предыдущих пунктов, получим, что отображение H, определенное формулой (16), является гомоморфизмом группы R в группу автоморфизмов абстрактного векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, определенного формулами (2) — (7). Теорема доказана.