

Численное исследование кризиса фондового рынка на основе теории игр среднего поля

аспирант 1 г.о. Н. В. Трусов

Ф-т ВМК МГУ, Кафедра системного анализа
МФТИ, ФУПМ, кафедра анализа систем и решений
ФИЦ ИУ РАН

26 марта 2021 г.

Динамика курсовой стоимости акции CITIC Securities (600030)

Участники рынка: основные инвесторы, высокочастотные трейдеры
проницательные и непрофессиональные



Рис.: 1. Динамика курсовой стоимости акции CITIC Securities (600030). Данные взяты из Reuters.

$$\begin{cases} dx_t = \alpha(t, x_t)dt + \sigma_t dW_t, \\ x_0 = \tilde{x}_0. \end{cases}$$

x_t — запас акций непрофессионального трейдера;

$\alpha(t, x): [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримое управление; $\sigma_t > 0, \forall t \in [0, T]$;

dW_t — стохастический дифференциал стандартного Винеровского процесса;

$\tilde{x}_0$ — случайная величина с заданным распределением $m_0(x)$;

$m(t, x): [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ — плотность распределения непрофессиональных трейдеров по запасам акций.

$$U(\alpha) = \mathbb{E} \left(\int_0^T \left(V(m(t, x_t)) - k_t \alpha^2(t, x_t) - \lambda_t (x_t - \tilde{a}_t)^2 \right) dt - \theta (x_T - a)^2 \right).$$

Задача непрофессиональных трейдеров: максимизировать функцию полезности

$U(\alpha) \rightarrow \max.$



L. Fatone, F. Mariani, M. C. Recchioni, F. Zirilli. (2014) A Trading Execution Model Based on Mean Field Games and Optimal Control. Applied Mathematics, 5, P. 3091-116.

$$u(t, x) = \max_{\alpha \in \mathcal{A}_1} \mathbb{E} \left(\int_t^T \left(V(m(\tau, x_\tau)) - k_\tau \alpha^2(\tau, x_\tau) - \lambda_\tau (x_\tau - \tilde{a}_\tau)^2 \right) d\tau - \theta (x_T - a)^2 \right) \Big|_{x_t = x},$$

Уравнения ГЯБ и КФП со связывающим условием $\alpha(t, x) = \frac{1}{2k_t} \frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4k_t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \lambda_t (x - \tilde{a}_t)^2 = -V(m), \\ \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{1}{2k_t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} m \right) = 0, \\ u(T, x) = -\theta(x - a)^2, \\ m(0, x) = m_0(x). \end{cases}$$

$$J(m, \alpha) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(G(m) + \left(-k_t \alpha^2 - \lambda_t (x - \tilde{a}_t)^2 \right) m \right) dx dt - \\ - \theta \int_{\mathbb{R}} (x - a)^2 m(T, x) dx \rightarrow \max_{\alpha}, \quad (1)$$

где $V = \frac{\partial G}{\partial m}$, $m(t, x)$ удовлетворяет уравнению КФП:

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha m) = 0, \\ m(0, x) = m_0(x). \end{cases} \quad (2)$$

Функционал (1) выбирается таким образом, чтобы множители Лагранжа к ограничениям (2) удовлетворяли исходному уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана и граничному условию в конечный момент времени.

Теорема [1]

Пусть (m, α) является решением (1)–(2), $m(t, x) \in C^{1,2}$, $\alpha(t, x) \in C^{0,1}$, $|m(t, x)| \leq C_1 (1 + x^2)^n$, $|\alpha(t, x)| \leq C_2 (1 + x^2)^n$; $C_1, C_2 > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим функцию $v(t, x)$ являющимся решением

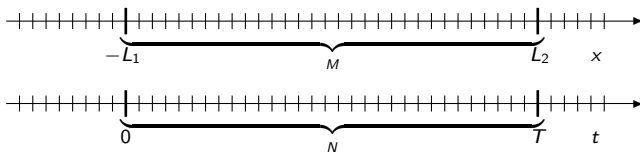
$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - k_t \alpha^2 - \lambda_t (x - \tilde{a}_t)^2 + V(m) = 0, \\ v(T, x) = -\theta(x - a)^2, \end{cases}$$

тогда пара (m, v) является решением системы УЧП

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{4k_t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \lambda_t (x - \tilde{a}_t)^2 = -V(m), \\ \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{1}{2k_t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} m \right) = 0, \\ v(T, x) = -\theta(x - a)^2, \\ m(0, x) = m_0(x), \end{cases} \quad (3)$$

где $\alpha = \frac{1}{2k_t} \frac{\partial v}{\partial x}$; и, наоборот, если пара (m, v) является решением системы УЧП (3), тогда пара (m, α) , где $\alpha = \frac{1}{2k_t} \frac{\partial v}{\partial x}$ является решением экстремальной задачи (1)–(2).





$$\Delta x = \frac{L_1 + L_2}{M}, \Delta t = \frac{T}{N}$$

$$m_j^i \rightarrow (i\Delta t, j\Delta x); i = \overline{0, N-1}, j = \overline{1, M-1}$$

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i \rightarrow (i\Delta t, (j + \frac{1}{2})\Delta x), i = \overline{0, N-1}, j = \overline{0, M-1};$$

$$\alpha_{\frac{1}{2}}^i = \alpha_{M-1+\frac{1}{2}}^i = 0, i = \overline{0, N-1}$$

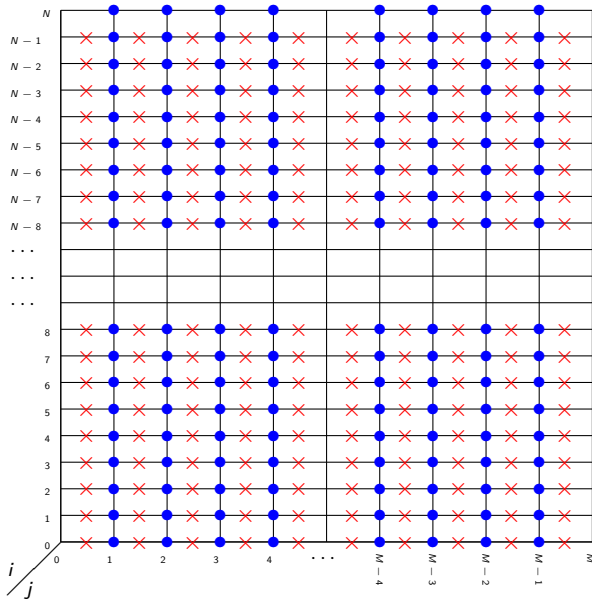
Граничные условия

$$\left. \frac{\partial m}{\partial x} \right|_{\{-L_1, L_2\}} = 0.$$

Ограничения на $G(m)$

Для реализации ЧМ потребуем выпуклости $G(m)$ по m .

Численное решение экстремальной задачи



● — плотность
распределения
× — управление

Разностная схема уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка

$$m_j^{i+1} = m_j^i + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (m_{j+1}^i - 2m_j^i + m_{j-1}^i) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(m_{j+\frac{1}{2}}^i \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i - m_{j-\frac{1}{2}}^i \alpha_{j-\frac{1}{2}}^i \right),$$
$$m_{j+\frac{1}{2}}^i = \begin{cases} m_{j+1}^i, & \text{если } \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i < 0; \\ m_j^i, & \text{если } \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i \geq 0; \end{cases}, \quad j = \overline{1, M-1}, i = \overline{0, N-1}.$$

Лемма 1

Пусть $m^i \in \mathbb{R}_+^{M-1}$ — вектор, состоящий из положительных компонент. Пусть выполнено условие $\left| \alpha_{j-\frac{1}{2}}^i \right| \leq \frac{\Delta x}{2\Delta t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{1}{\Delta x}$. Тогда вектор следующего временного слоя m^{i+1} имеет положительные компоненты, $\forall i = \overline{0, N-1}, j = \overline{1, M-1}$.



Aime Lachapelle, Julien Salomon and Gabriel Turinici. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences Vol. 20, NO. 4 (2010) P. 567-588.

Обозначения

$$\langle u, v \rangle = \Delta x \sum_{j=1}^{M-1} u_j v_j, \forall u, v \in \mathbb{R}^{M-1}; q_j^i = \frac{(\alpha_{j-\frac{1}{2}}^i)^2 + (\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i)^2}{2}, \quad \forall j = \overline{1, M-1}, i = \overline{0, N-1};$$

$$g(m^i) = \Delta x \sum_{j=1}^{M-1} G(m_j^i), \quad \forall i = \overline{0, N-1}.$$

Экстремальная задача

$$J_{\Delta t, \Delta x} = \Delta t \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \left(\langle -k^i q^i - \lambda^i (x - \tilde{a}^i)^2, m^i \rangle + g(m^i) \right) - \theta \langle (x - a)^2, m^N \rangle$$

$$\begin{cases} m^{i+1} = \left(A + B \left(\alpha^i \right) \right) m^i, & i = \overline{0, N-1}, \quad A, B \in \mathbb{R}^{(M-1) \times (M-1)}; \\ m^0 = m_0(x). \end{cases}$$

Сопряжённое уравнение

$$\begin{cases} v^i = \left(A^T + B^T \left(\alpha^i \right) \right) v^{i+1} - \Delta t \cdot k^i \cdot q^i - \Delta t \cdot \lambda^i (x - \tilde{a}^i)^2 + \Delta t \cdot V(m^i), \\ v^N = -\theta(x - a)^2. \end{cases}$$

Численное решение экстремальной задачи. Монотонные разностные схемы.

$$\begin{aligned}
 J_{\Delta t, \Delta x}(\alpha') - J_{\Delta t, \Delta x}(\alpha) &= \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \left(\langle -k^i q'^i - \lambda^i (x - \tilde{a}^i)^2, m'^i \rangle + g(m'^i) \right) - \theta \langle (x - a)^2, m'^N \rangle - \\
 &\quad - \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \left(\langle -k^i q^i - \lambda^i (x - \tilde{a}^i)^2, m^i \rangle + g(m^i) \right) + \theta \langle (x - a)^2, m^N \rangle = \\
 &= \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \left(\langle -k^i q'^i - \lambda^i (x - \tilde{a}^i)^2, m'^i \rangle + g(m'^i) \right) - \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \left(\langle -k^i q^i - \lambda^i (x - \tilde{a}^i)^2, m^i \rangle + g(m^i) \right) + \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\langle m'^{i+1} - m^{i+1}, v^{i+1} \rangle - \langle m'^i - m^i, v^i \rangle \right) \geq \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} k^i \langle -m'^i, q'^i - q^i \rangle + \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \langle (A + B(\alpha'^i)) m'^i - (A + B(\alpha^i)) m^i, v^{i+1} \rangle + \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \langle m'^i - m^i, - (A^T + B^T(\alpha^i)) v^{i+1} \rangle = \Delta t \Delta x \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-2} \Upsilon_j^i(\alpha', \alpha) \quad (4)
 \end{aligned}$$

Численное решение экстремальной задачи. Монотонные разностные схемы.

$$\Upsilon_j^i(\alpha', \alpha) = k^i \cdot (m_j^{i'} + m_{j+1}^{i'}) \cdot \left(\frac{(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i)^2 - (\alpha_{j+\frac{1}{2}}^{i'})^2}{2} \right) + (m_{j+\frac{1}{2}}^{i'} \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i - \tilde{m}_{j+\frac{1}{2}}^{i'} \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i) \cdot \left(\frac{v_{j+1}^{i+1} - v_j^{i+1}}{\Delta x} \right),$$

$$\tilde{m}_{j+\frac{1}{2}}^{i'} = \begin{cases} m_{j+1}^{i'}, & \text{если } \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i < 0, \\ m_j^{i'}, & \text{если } \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i \geq 0. \end{cases}$$

$$\Upsilon_j^i(\alpha', \alpha) = \hat{\theta} k^i (m_j^{i'} + m_{j+1}^{i'}) (\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i - \alpha_{j+\frac{1}{2}}^{i'})^2$$

$$a_{j+\frac{1}{2}}^{i'} (\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i)^2 + b_{j+\frac{1}{2}}^i \alpha_{j+\frac{1}{2}}^{i'} + c_{j+\frac{1}{2}}^i = 0,$$

Пусть

$$\mathfrak{Z}_{j+\frac{1}{2}}^i = \frac{c_{j+\frac{1}{2}}^i}{a_{j+\frac{1}{2}}^{i'}},$$

$$\mathfrak{B}_{j+\frac{1}{2}}^i = \frac{-b_{j+\frac{1}{2}}^i - \text{sign}(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i) \sqrt{(b_{j+\frac{1}{2}}^i)^2 - 4a_{j+\frac{1}{2}}^{i'} c_{j+\frac{1}{2}}^i}}{2a_{j+\frac{1}{2}}^{i'}}.$$

Пусть

$$\check{\alpha}_{j+\frac{1}{2}}^{i'} = \begin{cases} \mathfrak{B}_{j+\frac{1}{2}}^i, & \text{если } \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i \mathfrak{Z}_{j+\frac{1}{2}}^i < 0, \\ \mathfrak{Z}_{j+\frac{1}{2}}^i, & \text{если } \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i \mathfrak{Z}_{j+\frac{1}{2}}^i \geq 0. \end{cases}$$

Новое управление

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}}^{i'} = \text{sign}(\check{\alpha}_{j+\frac{1}{2}}^{i'}) \cdot \min \left\{ \frac{\Delta x}{2\Delta t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{1}{\Delta x}, |\check{\alpha}_{j+\frac{1}{2}}^{i'}| \right\}. \quad (5)$$

$$\alpha^0 = 0;$$

- ❶ Решаем m^κ в соответствии с $\alpha = \alpha^\kappa$ в прямом времени;
- ❷ Решаем v^κ в соответствии с $\alpha = \alpha^\kappa$ в обратном времени;
- ❸ Переопределяем $\alpha^{\kappa+1}$ в соответствии с (5);
- ❹ Критерий останова:

$$\sup_{1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq M-2} \left| 2k^i \cdot \frac{(m^\kappa)_j^i + (m^\kappa)_{j+1}^i}{2} (\alpha^\kappa)_{j+\frac{1}{2}}^i - (m^\kappa)_{j+\frac{1}{2}}^i \frac{(v^\kappa)_{j+1}^{i+1} - (v^\kappa)_j^{i+1}}{\Delta x} \right| \leq \varepsilon,$$

где

$$(m^\kappa)_{j+\frac{1}{2}}^i = \begin{cases} (m^\kappa)_{j+1}^i, & \text{если } (\alpha^\kappa)_{j+\frac{1}{2}}^i < 0 \\ (m^\kappa)_j^i, & \text{если } (\alpha^\kappa)_{j+\frac{1}{2}}^i \geq 0. \end{cases}$$

Утверждение [1]

Пусть $\mu_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$, $V(m) = \ln m$. Положим:

$$m_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_0^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\delta_0^2} (x - \mu_0)^2 \right], \quad x \in \mathbb{R},$$

$\tilde{x}_0 \sim N(\mu_0, \delta_0)$.

Тогда решение системы

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4k_t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \lambda_t (x - \tilde{a}_t)^2 = -\ln m, \\ \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{1}{2k_t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} m \right) = 0, \\ u(T, x) = -\theta(x - a)^2, \\ m(0, x) = m_0(x) \end{cases} \quad (6)$$

со связующим условием $\alpha = \frac{1}{2k_t} \frac{\partial u}{\partial x}$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$ имеет следующий вид:

$$u(t, x) = C_0(t) + C_1(t)x + C_2(t)x^2, \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, T],$$

$$m(t, x) = \exp \left[D_0(t) + D_1(t)x + D_2(t)x^2 \right], \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, T],$$

$$\alpha(t, x) = \frac{1}{2k_t} (C_1(t) + 2C_2(t)x), \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, T],$$

где функции $D_0(t)$, $D_1(t)$, $D_2(t)$, $C_0(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$, $t \in [0, T]$ являются решениями следующей краевой системы ОДУ Риккати:

Утверждение (продолжение) [1]

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{D}_0 = -\frac{1}{2k_t} C_1 D_1 - \frac{1}{k_t} C_2 + \frac{\sigma_t^2}{2} D_1^2 + \sigma_t^2 D_2, \\ D_0(0) = -\frac{\mu_0^2}{2\delta_0^2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi\delta_0^2), \\ \dot{D}_1 = -\frac{1}{k_t} C_1 D_2 - \frac{1}{k_t} C_2 D_1 + 2\sigma_t^2 D_1 D_2, \\ D_1(0) = \frac{\mu_0}{\delta_0^2}, \\ \dot{D}_2 = -\frac{2}{k_t} C_2 D_2 + 2\sigma_t^2 D_2^2, \\ D_2(0) = -\frac{1}{2\delta_0^2}, \\ \dot{C}_0 = -\frac{1}{4k_t} C_1^2 - \sigma_t^2 C_2 - D_0 + \lambda_t \tilde{a}_t, \\ C_0(T) = -a^2\theta, \\ \dot{C}_1 = -\frac{1}{k_t} C_1 C_2 - D_1 - 2\lambda_t \tilde{a}_t, \\ C_1(T) = 2a\theta, \\ \dot{C}_2 = -\frac{1}{k_t} C_2^2 - D_2 + \lambda_t, \\ C_2(T) = -\theta. \end{array} \right.$$



L. Fatone, F. Mariani, M. C. Recchioni, F. Zirilli. (2014) A Trading Execution Model Based on Mean Field Games and Optimal Control. Applied Mathematics, 5, P. 3091-116.

Выделим подсистему

$$\begin{cases} \dot{D}_2 = -\frac{2}{k_t} C_2 D_2 + 2\sigma_t^2 D_2^2, \\ \dot{C}_2 = -\frac{1}{k_t} C_2^2 - D_2 + \lambda_t, \\ D_2(0) = -\frac{1}{2\delta_0^2}, \\ C_2(T) = -\theta. \end{cases}$$

Фазовый портрет подсистемы

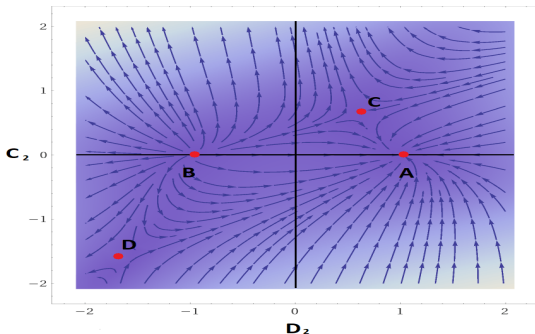


Рис.: 2. Фазовый портрет подсистемы при $\lambda_t \equiv 1$, $\sigma_t \equiv 1$, $k_t \equiv 1$.

Пусть $T = 1$, $\lambda = 5$, $\sigma = 0.7$, $\mu_0 = 1$, $\delta_0 = 2$, $a = 2$, $k = 0.5$, $\tilde{a} = 3$, $\theta = 5$, $V(m) = \ln m$.
Параметры сетки: $L_1 = 10$, $L_2 = 10$, $N = 4 \cdot 10^4$, $M = 2 \cdot 10^3$, $\hat{\theta} = 10$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

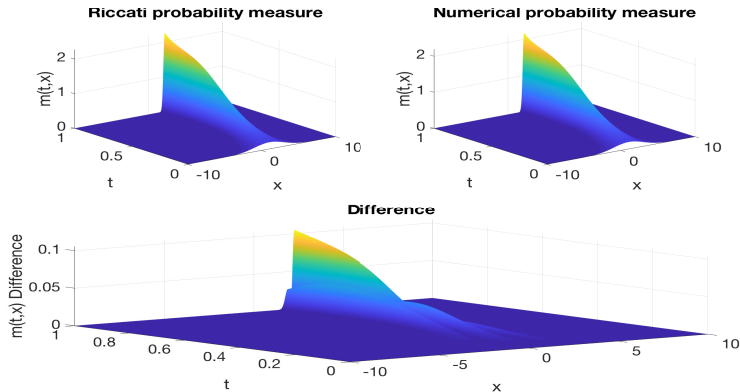


Рис.: 3. Плотность распределения трейдеров по запасам акций.

Пусть $T = 5$, $\lambda = 10$, $\sigma = 0.7$, $\mu_0 = 2$, $\delta_0 = 1$, $\theta = 0$, $V(m) = \ln m$.

Параметры сетки: $L_1 = 10$, $L_2 = 10$, $N = 2 \cdot 10^4$, $M = 400$, $\hat{\theta} = 3$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

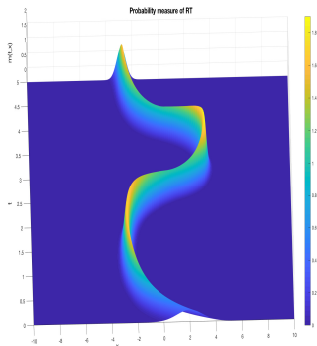
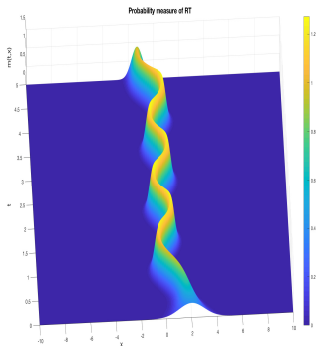


Рис.: 4. Слева: $\tilde{a}_t = 3 \sin(5t)$. Справа: $\tilde{a}_t = \begin{cases} -3, & \text{если } t < \frac{T}{2} \\ 4, & \text{если } \frac{T}{2} \leq t \leq \frac{3T}{4} \\ -3, & \text{если } t > \frac{3T}{4} \end{cases}$.

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{dt} = S_t \left(\sum_{\ell=1}^n M_\ell + f_t + h\delta(t - \hat{\tau}) \right), \\ S_0 = \tilde{S}_0, \end{cases}$$

где $M_\ell = \eta_\ell \int_{\mathbb{R}} \alpha_\ell(t, x_\ell) m_\ell(t, x_\ell) dx_\ell$, $\eta_\ell > 0$, $\ell = \overline{1, n}$, $h > 0$.

$$J(m, \alpha) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(G(m) + \left(-\underset{\text{red}}{k_t} \alpha^2 - \underset{\text{blue}}{\lambda_t} (x - \underset{\text{green}}{\tilde{a}_t})^2 \right) m \right) dx dt - \theta \int_{\mathbb{R}} (x - a)^2 m(T, x) dx \rightarrow \max_{\alpha},$$

$$J_\ell = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[G_\ell(m_\ell(t, x_\ell)) - \underset{\text{red}}{\tilde{k}_\ell} \exp \left(-\frac{1}{S_t} \left| \frac{dS_t}{dt} \right| \right) \alpha_\ell^2(t, x_\ell) m_\ell(t, x_\ell) - \right. \\ \left. - \underset{\text{blue}}{\tilde{\lambda}_\ell} \exp \left(\frac{1}{S_t} \left| \frac{dS_t}{dt} \right| \right) \left(x_\ell - \underset{\text{green}}{\xi_\ell} \frac{1}{S_t} \frac{dS_t}{dt} - \underset{\text{blue}}{C_\ell} \right)^2 m_\ell(t, x_\ell) \right] dx_\ell dt \rightarrow \max_{\alpha_\ell}. \quad (7)$$

Здесь $\tilde{k}_\ell > 0$, $\tilde{\lambda}_\ell > 0$, $\xi_\ell > 0$, $C_\ell \in \mathbb{R}$ — известные константы, $\ell = \overline{1, n}$. Сопоставляя (7) с экстремальной задачей, мы ставим в соответствие функции

$$\underset{\text{red}}{k_t} = \underset{\text{red}}{\tilde{k}} \exp \left(-\frac{1}{S_t} \left| \frac{dS_t}{dt} \right| \right), \quad 0 < \underset{\text{blue}}{k} \leq k_t \leq \bar{k}; \quad \underset{\text{blue}}{\lambda_t} = \underset{\text{blue}}{\tilde{\lambda}} \exp \left(\frac{1}{S_t} \left| \frac{dS_t}{dt} \right| \right), \quad 0 < \underset{\text{blue}}{\lambda} \leq \lambda_t \leq \bar{\lambda};$$

$$\underset{\text{green}}{\tilde{a}_t} = \underset{\text{green}}{\xi} \frac{1}{S_t} \frac{dS_t}{dt} + \underset{\text{blue}}{C}, \quad \underset{\text{blue}}{\tilde{a}} \leq \tilde{a}_t \leq \bar{\tilde{a}}. \quad \text{Здесь } \underset{\text{blue}}{k}, \bar{k}, \underset{\text{blue}}{\lambda}, \bar{\lambda}, \underset{\text{blue}}{\tilde{a}}, \bar{\tilde{a}} \text{ — известные константы.}$$

$$\alpha^0 = 0;$$

- ❶ Считаем m^κ в соответствии с $\alpha = \alpha^\kappa$ в прямом времени;
- ❷ Считаем S^κ в соответствии с $\alpha = \alpha^\kappa$, $m = m^\kappa$;
- ❸ Считаем v^κ в соответствии с $\alpha = \alpha^\kappa$ в обратном времени;
- ❹ Переопределяем $\alpha^{\kappa+1}$ в соответствии с (5),

$$\hat{n} = \min_{\kappa} \left\{ \left| \int_0^T (\tilde{a}^\kappa(t) - \tilde{a}^{\kappa-1}(t)) dt \right| < \hat{\varepsilon} \right\}, \hat{\varepsilon} > 0. \text{ Таким образом, после } \hat{n} \text{ итераций,}$$

функции k_t , λ_t , $\tilde{a}_t$ становятся детерминированными.

Критерий останова итерационного алгоритма остаётся прежним.

Проницательные трейдеры:

$$\begin{cases} \dot{y}_t = f_t, \\ \dot{P}_t = -S_t f_t, \\ y_0 = 0, \\ P_0 = 0. \end{cases}$$

Здесь y_t — запас акций в момент времени $t \in [0, T]$, P_t — расчётный счёт в момент времени $t \in [0, T]$.

Непрофессиональные трейдеры:

$$\begin{cases} \dot{z}_t^\ell = \int_{-L_1}^{L_2} \alpha^\ell(t, x) m^\ell(t, x) dx \\ \dot{K}_t^\ell = -S_t \int_{-L_1}^{L_2} \alpha^\ell(t, x) m^\ell(t, x) dx, \\ z_0^\ell = \tilde{z}_0^\ell, \\ K_0^\ell = 0. \end{cases}$$

Здесь z_t — запас акций репрезентативного непрофессионального трейдера в момент времени $t \in [0, T]$, K_t — расчётный счёт в момент времени $t \in [0, T]$.

Под результатом ℓ -го класса непрофессиональных трейдеров будем понимать следующую характеристику:

$$F_T^\ell = S_T z_T^\ell + K_T^\ell - z_0^\ell S_0, \quad \ell = \overline{1, n}.$$

Параметры трейдеров: $\mu_0 = (0.3, 1)^T$, $\delta_0 = (0.5, 0.7)^T$, $C = (2.5, 0.5)^T$, $\xi = (3.5, 0.3)^T$,
 $\bar{k} = (1.2, 0.5)^T$, $\tilde{\lambda} = (5, 1)^T$, $\theta = (0, 0)^T$, $\tilde{a} = (-5, -5)^T$, $\bar{a} = (5, 5)^T$, $\underline{k} = (0.3, 0.3)^T$,
 $\bar{k} = (1, 1)^T$, $\underline{\lambda} = (1, 1)^T$, $\bar{\lambda} = (8, 8)^T$, $V_1(m_1) = V_2(m_2) = \ln m$, $\sigma = (1.2, 1)^T$, $\eta = (0.6, 0.35)^T$.
 Параметры курсовой стоимости акции: $S_0 = 14.6$, $\hat{\tau} = 0.95$, $h = 0.2$.
 Параметры численного решения: $L_1 = 10$, $L_2 = 10$, $N = 2 \cdot 10^4$, $M = 10^3$, $T = 1$.

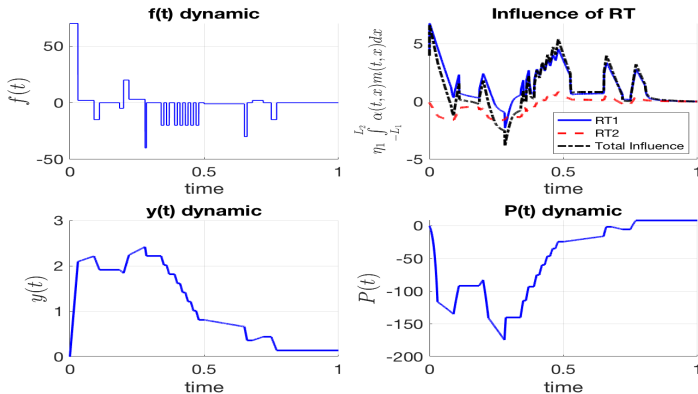


Рис.: 5. $y_T = 0.14$, $P_T = 8.12$

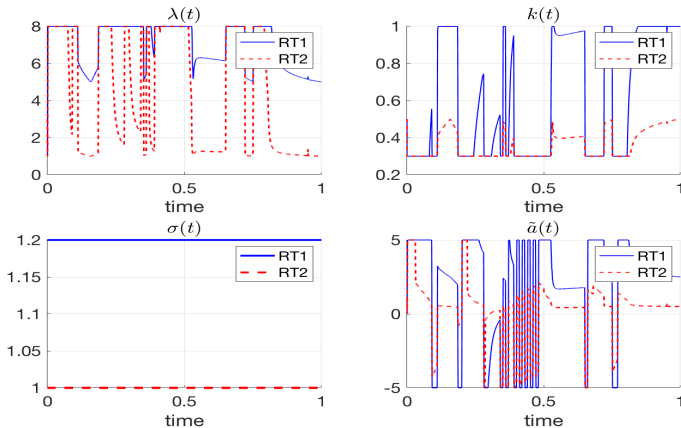


Рис.: 6. Функции λ_t , k_t , σ_t , $\tilde{a}_t$ двух классов непрофессиональных трейдеров.

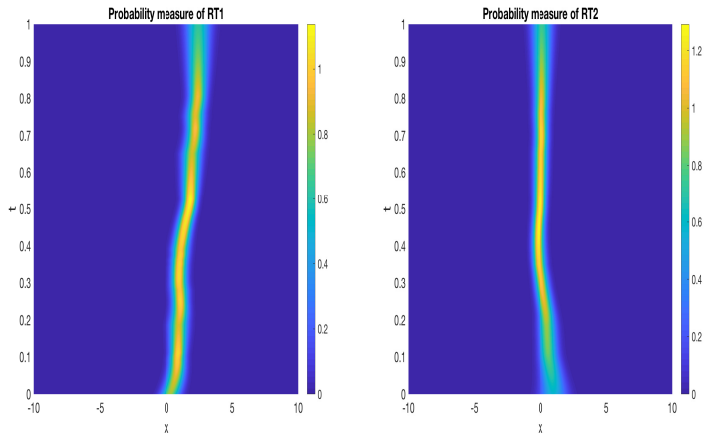


Рис.: 7. Плотности распределения двух классов непрофессиональных трейдеров по запасам акций.

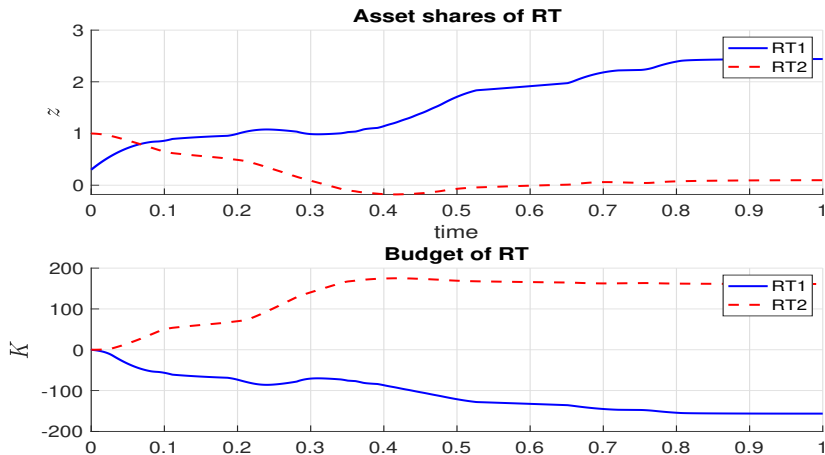


Рис.: 8. Динамики запасов акций и динамики бюджетов репрезентативных трейдеров двух классов непрофессиональных трейдеров. $F_T^1 = -28.5$, $F_T^2 = 151.7$.

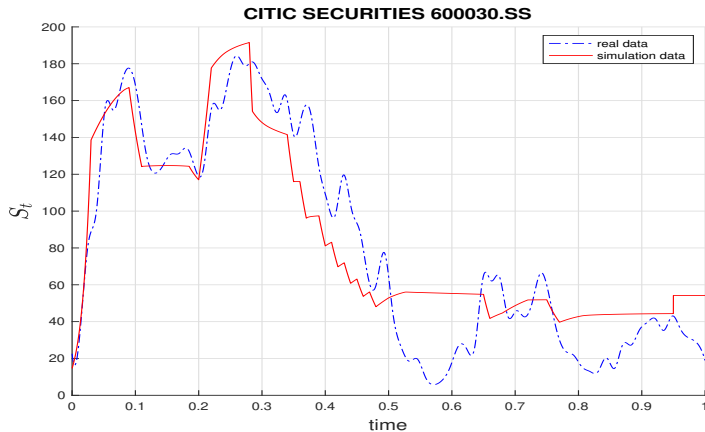


Рис.: 9. Сравнение динамики курсовой стоимости акции, полученной в примере, с реальными данными.

Спасибо за внимание!

- [1] J.-M. Lasry, P.-L. Lions. Jeux á champ moyen. I. Le cas stationnaire. (French) [Mean field games. I. The stationary case] C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2006. V. 343. N 9. P. 619-25.
- [2] A. Lachapelle, J. Salomon and G. Turinici. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences Vol. 20, NO. 4 (2010) P.567-88.
- [3] N. I. Klemashev, A. A. Shananin, S. Zhang. Inverse problems in Pareto's demand theory and their applications to analysis of stock market crises. Journal of Inverse and Ill posed Problems. 2017. V.26. P. 1-14.
- [4] L. Fatone, F. Mariani, M. C. Recchioni, F. Zirilli. (2014) A Trading Execution Model Based on Mean Field Games and Optimal Control. Applied Mathematics, 5, P. 3091-116.
- [5] Bensoussan A., Frehse J., Yam P. (2013). Mean field games and mean field type control theory. Springer, Berlin.
- [6] E. Coddington, N. Levinson. Theory of ordinary differential equations. (New York: McGraw-Hill, 1955).
- [7] A. Lachapelle, J. Salomon, G. Turinici. Computation of Mean Field equilibria in economics. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 20, P. 567-88 (2010).
- [8] N. Trusov, Application of Mean field Games Approximation to economic processes modeling. IX Moscow International Conference on Operations Research (ORM2018), V.I, Moscow, 2018.
- [9] Н. В. Трусов. Применение аппроксимации «среднего поля» в моделировании экономических процессов // Труды ИСА РАН. 2018. Т.68, №2. с.88-91.
- [10] N.V. Trusov. Numerical solution of Mean Field Games problems with turnpike effect. Lobachevskii Journal of Mathematics, 4, 41, P. 561-76 (2020).
- [11] N.V. Trusov. Numerical study of the stock market crises based on Mean Field Games approach. J. Inverse Ill-Posed (2021).