Некоторые задачи управления для систем с распределенными параметрами

Егорова А.А.[1], Шамаев А.С.[2]

[1]МИРЭА-Российский технологический университет, г. Москва

[2]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Москва.

Семинар "Теория управления и динамика систем" под руководством академика Ф.Л. Черноусько
г. Москва 24 сентября 2026 г.

Содержание.

1. Модель взвеси из слабовязких жидкостей
2. Усредненная (эффективная) модель
3. Существование волнового фронта
4. Невозможность распределенного управления
5. Невозможность граничного управления
6. Распределенное управление воздействием, малым по модулю и с малой по модулю производной.

1. Модель взвеси из слабовязких жидкостей.

Двухфазная область слабовязких жидкостей с периодической структурой.

Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$,

$$l/\lambda \sim l/L = \varepsilon \ll 1,$$

где l - размер ячейки периодичности, L - размер области Ω, λ - длина волны внешнего акустического возмущения.

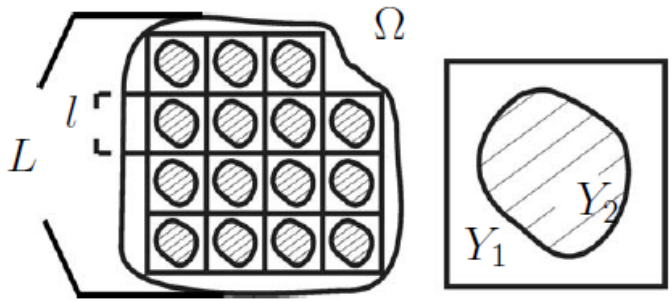


Рис. 1: Область Ω и ячейка периода Y.

Характеристики жидкостей в состоянии покоя - вязкости $\varepsilon^2\mu$, скорости звука c считаются сравнимыми:

$$\mu_1 \sim \mu_2, c_1 \sim c_2.$$

Плотность $\rho(y) > 0$ полагаем функцией из $H^2(Y)$.

1. Модель взвеси из слабовязких жидкостей.

Линеаризованные уравнения Навье-Стокса с нулевыми начальными условиями:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \nabla \cdot \varepsilon^2 \mu \nabla \mathbf{v} + \nabla(\varepsilon^2 \mu/3)\,\mathrm{div}\ \mathbf{v} + \mathbf{f}, \tag{1}$$

где $\mathbf{v}(x,t,\varepsilon)$ - скорость дисперсионной среды, $p(x,t,\varepsilon)$ - давление, $\mathbf{f}(x,t)$ - функция воздействия звукового поля на область с малой амплитудой. На границах фаз предполагается непрерывность скорости и тензора напряжений. Задача исследуется в обобщенной формулировке в соболевском пространтсве $(H_0^1(\Omega))^3$. Перемещение $\mathbf{u}(x,t,\varepsilon)$:

$$\mathbf{u}(x,t,\varepsilon) = \int_0^t \mathbf{v}(x,s,\varepsilon)d\mathbf{s} \tag{2}$$

$$p(x,t,\varepsilon) = -\gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\mathrm{div}\,\mathbf{u}, \tag{3}$$

где $\gamma(\xi) = \mathrm{c}^2(\xi)\rho(\xi) > 0$ - модуль объемной упругости.

1. Модель взвеси из слабовязких жидкостей.

Линеаризованные уравнения Навье-Стокса с нулевыми начальными условиями:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \nabla \cdot \varepsilon^2 \mu \nabla \mathbf{v} + \nabla(\varepsilon^2 \mu/3)\,\mathrm{div}\ \mathbf{v} + \mathbf{f}, \tag{1}$$

где $\mathbf{v}(x,t,\varepsilon)$ - скорость дисперсионной среды, $p(x,t,\varepsilon)$ - давление, $\mathbf{f}(x,t)$ - функция воздействия звукового поля на область с малой амплитудой. На границах фаз предполагается непрерывность скорости и тензора напряжений. Задача исследуется в обобщенной формулировке в соболевском пространтсве $(H_0^1(\Omega))^3$. Перемещение $\mathbf{u}(x,t,\varepsilon)$:

$$\mathbf{u}(x,t,\varepsilon) = \int_0^t \mathbf{v}(x,s,\varepsilon)d\mathbf{s} \tag{2}$$

$$p(x,t,\varepsilon) = -\gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\mathrm{div}\,\mathbf{u}, \tag{3}$$

где $\gamma(\xi) = \mathrm{c}^2(\xi)\rho(\xi) > 0$ - модуль объемной упругости.

1. Модель взвеси из слабовязких жидкостей.

Вспомогательная задача на ячейке периодичности:

$$\rho(\xi)\frac{\partial \mathbf{V}^j(\xi,t)}{\partial t} - \mu\Delta \mathbf{V}^j(\xi,t) + \nabla q(\xi,t) = 0, \quad \xi \in Y \tag{4}$$

$$\operatorname{div}_\xi \mathbf{V}^j = 0, \quad \mathbf{V}^j|_{t=0} = \frac{\mathbf{e_j}}{\rho(\xi)} \tag{5}$$

$$\mathbf{V}^{j1}|_S = \mathbf{V}^{j2}|_S, \quad \sigma(\mathbf{V}^{j1})\cdot\mathbf{n}|_S = \sigma(\mathbf{V}^{j2})\cdot\mathbf{n}|_S \tag{6}$$

где $\mathbf{V}^j(t) - Y-$ периодичные вектор-функции со значениями в $(H^1_{per}(Y))^3, \sigma_{ij} = \delta_{ij}q + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl}e_{ij}e_{kl}$.

Матрица диссипации:

$$\mathbf{K}(t) = \{K_{ij}(t)\}: \quad K_{ij} = \left\langle V_i^j \right\rangle_Y = \frac{1}{|Y|}\int_Y V_i^j(\xi,t)d\xi$$

1. Модель взвеси из слабовязких жидкостей.

Вспомогательная задача на ячейке периодичности:

$$\rho(\xi)\frac{\partial \mathbf{V}^j(\xi,t)}{\partial t} - \mu\Delta \mathbf{V}^j(\xi,t) + \nabla q(\xi,t) = 0, \quad \xi \in Y \tag{4}$$

$$\operatorname{div}_\xi \mathbf{V}^j = 0, \quad \mathbf{V}^j|_{t=0} = \frac{\mathbf{e_j}}{\rho(\xi)} \tag{5}$$

$$\mathbf{V}^{j1}|_S = \mathbf{V}^{j2}|_S, \quad \sigma(\mathbf{V}^{j1})\cdot\mathbf{n}|_S = \sigma(\mathbf{V}^{j2})\cdot\mathbf{n}|_S \tag{6}$$

где $\mathbf{V}^j(t) - Y-$ периодичные вектор-функции со значениями в $(H^1_{per}(Y))^3, \sigma_{ij} = \delta_{ij}q + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl}e_{ij}e_{kl}$.

Матрица диссипации:

$$\mathbf{K}(t) = \{K_{ij}(t)\}: \quad K_{ij} = \left\langle V_i^j \right\rangle_Y = \frac{1}{|Y|}\int_Y V_i^j(\xi,t)d\xi$$

2. Усредненная (эффективная) модель.

(Э. Санчес-Паленсия [1],А.А.Гавриков, Шамаев А.С. 2011г. [2]).

Задача для усредненного давления $p^0(x,t)$:

$$\frac{\partial p^0(x,t)}{\partial t} + \operatorname{div}_x \int_0^t \mathbf{K}(t-s)(\mathbf{f}(x,s) - \nabla p^0(x,s))ds = 0, \tag{7}$$

$$[\mathbf{K}(t) * (\mathbf{f}(x,t) - \nabla p^0(x,t))] \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{8}$$

Для предельных функций перемещения $\mathbf{u}^0$ и скорости $\mathbf{v}^0$, имеющих значения в $\mathbb{H}^1(\Omega, \mathbb{H}^1_{per}(Y))$ справедливы равенства:

$$\mathbf{v}^0(x,\xi,t) = \frac{\partial \mathbf{u}^0(x,\xi,t)}{\partial t}, \tag{9}$$

$$\left\langle \mathbf{v}^0(x,\xi,t) \right\rangle_Y = \int_0^t \mathbf{K}(t-s)(\mathbf{f}(x,s) - \nabla p^0(x,s))ds, \tag{10}$$

где $\langle g(\xi)\rangle_Y = \frac{1}{|Y|}\int_Y g(\xi)d\xi$- среднее по ячейке.

2. Усредненная (эффективная) модель.

Предельная теорема (Гавриков А.А., Шамаев А.С. 2011, [2]).

Теорема 1

Для решений усредненной (7)-(10) *и исходной задач* (1)-(3) *справедливы равенства:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{v}(x,t,\varepsilon)-\mathbf{v}^0(x,\frac{x}{\varepsilon},t)\|_{L_2(\Omega)}=0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\varepsilon\nabla_x\mathbf{v}(x,t,\varepsilon)-\nabla_{\frac{x}{\varepsilon}}\mathbf{v}^0(x,\frac{x}{\varepsilon},t)\|_{L_2(\Omega)}=0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|p(x,t,\varepsilon)-p^0(x,t)\|_{L_2(\Omega)}=0.$$

2. Усредненная (эффективная) модель.

Ядро диссипации.

В случае симметричности включений можно считать, что ядро диссипации - диагональная матрица, т.е. $\mathbf{K}(t) = K(t)\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ единичная матрица, а $K(t)$ скалярная функция, которая представима в виде:

$$K(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{-\lambda_i t}. \tag{11}$$

Коэффициенты $\lambda_i > 0$ в степенях экспонент являются собственными значениями спектральной задачи типа Стокса

$$-\mu\Delta\psi_k + \nabla q_k = \rho\lambda_k\psi_k, \quad \operatorname{div}\psi_k = 0,\ \psi_k - Y - \text{периодична}. \tag{12}$$

А коэффициенты $c_i > 0$ можно найти по формулам:

$$c_i = \left\langle \frac{1}{\gamma(\xi)} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle \frac{\psi_i(\xi)}{\rho(\xi)} \right\rangle_Y \langle \psi_i(\xi) \rangle_Y \tag{13}$$

3. Существование волнового фронта.

Другие модели.

В работе R.Grimmer, W.Desch, Schappacher W.(1988 г.) [3] показаны, что при определенных условиях для ядра диссипации существование фронта для задачи Коши с интегродифференциальным уравнением зависит от соответствующего дифференциального уравнения без интегрального слагаемого.

1) Если $K(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i e^{-\lambda_i t}$, то существование фронта в одномерном уравнении Гуртина-Пипкина

$$u_t - \int_0^t K(t-s)u_{xx}(x,s)ds = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{14}$$

доказано в работе [4](Романов И.В., Шамаев А.С., 2023 г.).

2) Если $K(t) \equiv \Theta_\alpha(-\beta, t) = t^\alpha \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma((n+1)(1+\alpha))}$ - функция Работнова, то уравнение Гуртина-Пипкина не имеет фронта([5] Романов И.В., Шамаев А.С., 2024г.).

3) Если $K(t) \equiv \Theta_{-1/2}(-\beta, t)$, - функция Работнова, то в задаче Коши для многомерного волнового уравнения с интегральной памятью будет существовать фронт ([6] Романов И.В., Шамаев А.С., 2026г.)

3. Существование волнового фронта.

Другие модели.

В работе R.Grimmer, W.Desch, Schappacher W.(1988 г.) [3] показаны, что при определенных условиях для ядра диссипации существование фронта для задачи Коши с интегродифференциальным уравнением зависит от соответствующего дифференциального уравнения без интегрального слагаемого.

1) Если $K(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i e^{-\lambda_i t}$, то существование фронта в одномерном уравнении Гуртина-Пипкина

$$u_t - \int_0^t K(t-s)u_{xx}(x,s)ds = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{14}$$

доказано в работе [4](Романов И.В., Шамаев А.С., 2023 г.).

2) Если $K(t) \equiv \Theta_\alpha(-\beta, t) = t^\alpha \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma((n+1)(1+\alpha))}$ - функция Работнова, то уравнение Гуртина-Пипкина не имеет фронта([5] Романов И.В., Шамаев А.С., 2024г.).

3) Если $K(t) \equiv \Theta_{-1/2}(-\beta, t)$, - функция Работнова, то в задаче Коши для многомерного волнового уравнения с интегральной памятью будет существовать фронт ([6] Романов И.В., Шамаев А.С., 2026г.)

3. Существование волнового фронта.

Другие модели.

В работе R.Grimmer, W.Desch, Schappacher W.(1988 г.) [3] показаны, что при определенных условиях для ядра диссипации существование фронта для задачи Коши с интегродифференциальным уравнением зависит от соответствующего дифференциального уравнения без интегрального слагаемого.

1) Если $K(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i e^{-\lambda_i t}$, то существование фронта в одномерном уравнении Гуртина-Пипкина

$$u_t - \int_0^t K(t-s)u_{xx}(x,s)ds = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{14}$$

доказано в работе [4](Романов И.В., Шамаев А.С., 2023 г.).

2) Если $K(t) \equiv \Theta_\alpha(-\beta, t) = t^\alpha \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma((n+1)(1+\alpha))}$ - функция Работнова, то уравнение Гуртина-Пипкина не имеет фронта([5] Романов И.В., Шамаев А.С., 2024г.).

3) Если $K(t) \equiv \Theta_{-1/2}(-\beta, t)$, - функция Работнова, то в задаче Коши для многомерного волнового уравнения с интегральной памятью будет существовать фронт ([6] Романов И.В., Шамаев А.С., 2026г.)

3. Существование волнового фронта.

Другие модели.

В работе R.Grimmer, W.Desch, Schappacher W.(1988 г.) [3] показаны, что при определенных условиях для ядра диссипации существование фронта для задачи Коши с интегродифференциальным уравнением зависит от соответствующего дифференциального уравнения без интегрального слагаемого.

1) Если $K(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i e^{-\lambda_i t}$, то существование фронта в одномерном уравнении Гуртина-Пипкина

$$u_t - \int_0^t K(t-s)u_{xx}(x,s)ds = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{14}$$

доказано в работе [4](Романов И.В., Шамаев А.С., 2023 г.).

2) Если $K(t) \equiv \mathfrak{Э}_\alpha(-\beta, t) = t^\alpha \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma((n+1)(1+\alpha))}$ - функция Работнова, то уравнение Гуртина-Пипкина не имеет фронта([5] Романов И.В., Шамаев А.С., 2024г.).

3) Если $K(t) \equiv \mathfrak{Э}_{-1/2}(-\beta, t)$, - функция Работнова, то в задаче Коши для многомерного волнового уравнения с интегральной памятью будет существовать фронт ([6] Романов И.В., Шамаев А.С., 2026г.)

3. Существование волнового фронта.

Эффективная модель двухфазной взвеси слабосжимаемых жидкостей.

Предположим, что колебания среды направлены только по одной из осей координат Ox_1 и величины компонент смещения и давления зависят только от переменных t, x_1. Полагая $f(x,t) = 0$, рассмотрим одномерное уравнение для усредненного давления:

$$\frac{\partial p^0(x,t)}{\partial t} - \int_0^t K(t-s)p^0_{xx}(x,s)ds = 0,\ t > 0 \tag{15}$$

$$p^0|_{t=0} = \theta_0(x_1),\ p^0(0,t) = p^0(1,t) = 0;$$

Теорема 2 ([7], Егорова А.А, Шамаев А.С. 2025)

Пусть функция θ_0 достаточно гладкая и финитная функция, тогда при условии $\rho(\xi) \in H^2_{per}(Y)$ решение задачи (15), является финитной по x функцией для каждого фиксированного конечного момента времени t.

Предположим, что колебания среды направлены только по одной из осей координат Ox_1 и величины компонент смещения и давления зависят только от переменных t, x_1. Полагая $f(x,t) = 0$, рассмотрим одномерное уравнение для усредненного давления:

$$\frac{\partial p^0(x,t)}{\partial t} - \int_0^t K(t-s)p^0_{xx}(x,s)ds = 0,\ t > 0 \tag{15}$$
$$p^0|_{t=0} = \theta_0(x_1),\ p^0(0,t) = p^0(1,t) = 0;$$

Теорема 2 ([7], Егорова А.А, Шамаев А.С. 2025)

Пусть функция θ_0 достаточно гладкая и финитная функция, тогда при условии $\rho(\xi) \in H^2_{per}(Y)$ решение задачи (15), является финитной по x функцией для каждого фиксированного конечного момента времени t.

3. Существование волнового фронта.

Схема доказательства теоремы 2

1. 1) $\rho(\xi) \in H^2_{per}(Y), 2) \sum_{s=1}^{\infty} f_s^2 |\lambda_s|^2 < \infty, 3) \lambda_k \sim k^{\frac{2}{3}}$ (см.[14]) $\Longrightarrow$ $K(t) \in C[0;\infty)$;
2. существование фронта для уравнения (15) с гладким ядром $K_n \in C^{\infty}[0;+\infty)$, таким, что $K_n(t) \rightrightarrows K(t); n \to \infty$
3. финитность решения $p^0(x,t)$.

Замечание: Скорость распространения звука в однородной среде:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}}$$

Скорость распространения звука в взвеси:

$$\sqrt{K(0)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} c_k}, \text{ где } c_k = \left\langle \frac{1}{\gamma(\xi)} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle \frac{\psi_k(\xi)}{\rho(\xi)} \right\rangle_Y \langle \psi_k(\xi) \rangle_Y$$

3. Существование волнового фронта.

Схема доказательства теоремы 2

1. 1) $\rho(\xi) \in H^2_{per}(Y), 2) \sum_{s=1}^{\infty} f_s^2 |\lambda_s|^2 < \infty, 3) \lambda_k \sim k^{\frac{2}{3}}$ (см.[14]) $\Longrightarrow$ $K(t) \in C[0;\infty)$;
2. существование фронта для уравнения (15) с гладким ядром $K_n \in C^{\infty}[0;+\infty)$, таким, что $K_n(t) \rightrightarrows K(t); n \to \infty$
3. финитность решения $p^0(x,t)$.

Замечание: Скорость распространения звука в однородной среде:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}}$$

Скорость распространения звука в взвеси:

$$\sqrt{K(0)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} c_k}, \text{ где } c_k = \left\langle \frac{1}{\gamma(\xi)} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle \frac{\psi_k(\xi)}{\rho(\xi)} \right\rangle_Y \langle \psi_k(\xi) \rangle_Y$$

4. Невозможность распределенного и граничного управления.

Задача распределенного управления.

Рассмотрим задачу (7)-(10) относительно перемещения $\mathbf{u}$ с ненулевым начальным условием

$$\mathbf{u}^0|_{t=0} = \varphi_0(x). \tag{16}$$

Вопрос:можно ли колебания в данной взвеси привести в покой за конечное время путем воздействия на всю область ограниченного акустического поля, заданного функцией $\mathbf{f}(x,t)$?

Определение 1

Говорят, что система, описываемая краевой задачей (7)-(16), ***приводима в покой***, *если для любого начального условия* $\varphi_0(x)$, *можно найти функцию* $\mathbf{f}(x,t)$, *тождественно равную нулю на множестве* $\{t : t > T\}$ *для некоторого* $T > 0$ *и такую, что соответствующее решение* $\mathbf{u}^0$ *задачи* (7)-(16) *также стало тождественно равным нулю на множестве* $\{t : t > T\}$.

4. Невозможность распределенного и граничного управления.

Задачи управления системами без интегральных составляющих типа свертки.

- 1965г. Бутковский А.Г.,[8]. Остановка струны малыми граничным управлением за конечное время:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, x \in (0, \pi),\ u|_{t=0} = v(x),\ u'_t|_{t=0} = w(x),$$

$$u(0,t) = \psi(t),\ |\psi(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow T_{остановки} \sim \frac{C}{\varepsilon}$$

- 1988г. Лионс Ж.Л. и др.,[9]. Управление волнового уравнения за границу области, за часть границы при определеннных условиях.
- 1992г. Черноусько Ф.Л.,[10]. Распределенное управление колебаниями мембран и пластин.

4. Невозможность распределенного и граничного управления.

Задачи управления системами с интегральными слагаемыми типа свертки.

- 2009г. Иванов С., Пандолфи Л.,[11]. Уравнение теплопроводности с памятью:

$$u_t = \alpha u_{xx} + \int_0^t K(t-s)u_{xx}(x,s)ds,\ x \in (0,\pi),\ t > 0$$

$$u(0,t) = \psi(t) \in L^2_{loc}[0,\infty],\ u(\pi,t) = 0,\ u(x,0) = v(x) \in L^2(0,\pi)$$

$\ominus$ Нет управления за граничную точку, если существует корень некоторой аналитической функции комплексного переменного.

- 2016г. Романов И.В., Шамаев А.С.,[12]. Двумерная система с интегро-дифференциальным уравнением:

$$u_t = \int_0^t K(t-s)\nabla u(x,s)ds,\ x \in \Omega,\ t > 0$$

$$u|_{\partial\Omega} = \psi(t) \in L^2_{loc}[0,\infty],\ u|_{t=0} = v(x) \in L^2(\Omega)$$

$\ominus$ Нет управления за границу круга Ω, если $\hat{K}(\lambda)$ имеет единственный корень.

4. Невозможность распределенного управления

Теорема 3 (Егорова А.А, Шамаев А.С. 2024 г.,[13])

Существуют начальные условия $\varphi_0 \in (H_0^1(\Omega))^3$ *для которых систему* (7)-(10),(16) *невозможно привести в состояние покоя за конечное время* $T > 0$ *через управление всей областью* Ω.

Схема доказательства:

1. С помощью преобразования Лапласа исходного уравнения находим изображение решения $\hat{u}^0$.
2. По теореме Винера-Пели при предположении о существовании управления это изображение должно иметь компоненты в виде целых функций.
3. Из асимптотики собственных значений задачи типа Стокса (12) в трехмерной области([14])

$$\lambda_k \sim k^{\frac{2}{3}}$$

следует, что порядок роста функции - компоненты решения - будет меньше, чем показатель сходимости нулей этой функции, что противоречит теореме о показателе сходимости последовательности нулей целой функции (Седлецкий А.М., [15]).

4. Невозможность распределенного управления

Теорема 3 (Егорова А.А, Шамаев А.С. 2024 г.,[13])

Существуют начальные условия $\varphi_0 \in (H_0^1(\Omega))^3$ *для которых систему* (7)-(10),(16) *невозможно привести в состояние покоя за конечное время* $T > 0$ *через управление всей областью* Ω.

Схема доказательства:

1. С помощью преобразования Лапласа исходного уравнения находим изображение решения $\hat{u}^0$.
2. По теореме Винера-Пели при предположении о существовании управления это изображение должно иметь компоненты в виде целых функций.
3. Из асимптотики собственных значений задачи типа Стокса (12) в трехмерной области([14])
$$\lambda_k \sim k^{\frac{2}{3}}$$
следует, что порядок роста функции - компоненты решения - будет меньше, чем показатель сходимости нулей этой функции, что противоречит теореме о показателе сходимости последовательности нулей целой функции (Седлецкий А.М., [15]).

Определение 2

Показателем сходимости последовательности комплексных чисел $\{z_k\}$ *называется число*

$$\tau(\{z_k\}) = inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_k|^\alpha} < +\infty\right\}$$

Определение 3

Порядком роста целой функции $\varphi(\lambda)$ *называется число:*

$$r = inf\left\{\mu > 0 : \max_{|\lambda|=k} |\varphi(\lambda)| < Ce^{k^\mu}\right\}$$

Рассмотрим одномерную задачу с ненулевым начальным условием $\theta_0(x)$ и управлением $\theta(t)$ на границе

$$\frac{\partial p^0(x,t)}{\partial t} - \int_0^t K(t-s)p^0_{xx}(x,s)ds = 0,\ t > 0$$
$$p^0(x,0) = \theta_0(x),\ p^0(0,t) = \theta(t),\ p^0(1,t) = 0; \tag{17}$$

Определение 4

Говорят, что система, описываемая краевой задачей (17), ***приводима в покой***, *если для любых начальных условий* $\theta_0(x)$ *можно найти функцию* $\theta(t)$, *тождественно равную нулю на множестве* $\{t : t > T\}$ *для некоторого* $T > 0$ *такого, что соответствующее решение* $p^0(x,t)$ *задачи* (17) *также стало тождественно равным нулю на множестве* $\{t : t > T\}$.

5. Невозможность граничного управления

Определение 5

Пусть $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *счетный набор комплексных чисел. Определим характеристику плотности этого множества как*

$$A(\{\mu_k\}) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t} \int_0^t \frac{n(\tau)}{\tau} d\tau,$$

где $n(\tau)$ *— количество членов последовательностной* $\{\mu_k\}$ *в круге радиуса* τ *с центром в нуле (Н.Левинсон).*

Теорема 4

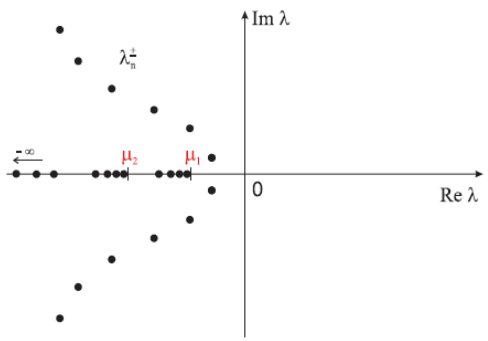
Если для спектра $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *задачи* (17) *характеристика* $A(\{\lambda_k\}) = +\infty$, *тогда для произвольных начальных условий* $\theta_0(x)$ *управление в покой за граничную точку невозможно.*

5. Невозможность граничного управления

Картина спектра(Власов В.В.[16], Раутиан Н.А.[17]). Препятствие для граничного управления

Картина спектра в одномерной эффективной модели с резкой границой фаз:

«лилия»

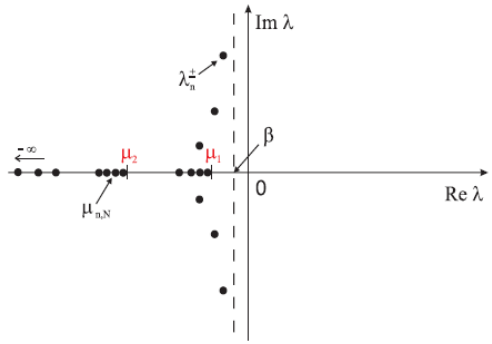


$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i < \infty, \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i c_i = \infty$$

$$\left(K'(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)\right)$$

Картина спектра одномерной эффективной модели с размытой границей фаз:

«крест»



$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i < \infty, \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i c_i < \infty$$

$$\left(K'(t) \in W_1^1(\mathbb{R}_+), \rho(y) \in H^1(Y)\right)$$

6. Распределенное управление воздействием, малым по модулю и с малой по модулю производной.

Рассмотрим задачу Дирихле для волнового уравнения, заданного в области $\Omega \subset \mathbb{R}^d, (d = 1, 2, 3)$ с гладкой границей:

$$\ddot{u} = \Delta u + f(t, x),\ x \in \Omega,\ u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{18}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x),\ \dot{u}|_{t=0} = u_1(x), \tag{19}$$

где $f(t, x)$ — функция управления удовлетворяющая условиям:

$$|f(t, x)| \leq \varepsilon,\ |f'_t(t, x)| \leq \varepsilon_1 \quad \varepsilon,\ \varepsilon_1 > 0, \tag{20}$$

Задача управления состоит в выборе постоянной $T > 0$ и управляющей функции $f(t, x)$, удовлетворяющей условиям (27), таких, чтобы $f \equiv 0$, и решение задачи (25)-(26) $u(t, x) = 0$ для любых $t > T$.

6. Распределенное управление воздействием, малым по модулю и с малой по модулю производной.

Система колебательных звеньев.

Будем искать функцию управления в виде разложения в ряд Фурье по ортонормированной системе собственных функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta\varphi_k + \omega_k^2\varphi_k = 0, \quad \text{в } \Omega, \quad \|\varphi_k\|_{L_2(\Omega)} = 1, \tag{21}$$

где ω_k^2 - соотетствующие собственные значения.
Задача (25)-(26) сводится к системе колебательных задач для каждого $k = 1, 2, ...$

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2 u = f_k(t), \; u_k(0) = u_0^k, \quad \dot{u}_k(0) = u_1^k, \tag{22}$$

где функции с индексом k обозначают соответствующие коэффициенты разложения в ряд Фурье, которые связаны только через ограничения (27) на управляющие воздействия .

Лемма 1

Существует решение задачи управления (22), *и справедлива оценка времени остановки*

$$T_k \geq 2M_k(\omega_k|u_0^k| + |u_1^k|)\max\left\{\frac{1}{\varepsilon^k}; \frac{\omega_k}{\varepsilon_1^k}\right\} + \frac{1}{\omega_k}, \tag{23}$$

где

$$M_k = \max_{x\in\Omega}|\varphi_k(x)|,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k = \varepsilon, \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_1^k = \varepsilon_1, \tag{24}$$

6. Распределенное управление воздействием, малым по модулю и с малой по модулю производной.

Определение 6

Введем обозначение $f \in H_D^k(\Omega)$, *если* $f \in H^k(\Omega)$ *и*

$$f|_{\partial\Omega} = \cdots = \Delta^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} f|_{\partial\Omega} = 0.$$

Теорема 5 (см. [18])

Если $f \in H_D^k(\Omega)$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 |\lambda_n|^k < \infty,$$

где f_n — *коэффициенты ряда Фурье при разложении по собственным функциям задачи Дирихле для уравнения Лапласа,* λ_n — *собственные значения* $\Delta u_n = \lambda_n u_n$ *в* Ω.

6. Распределенное управление воздействием, малым по модулю и с малой по модулю производной.

Теорема 6 (Егорова А.А, Шамаев А.С. 2026)

Задача управления

$$\ddot{u} = \Delta u + f(t,x),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d,\ u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{25}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \in H_D^{2\alpha}(\Omega),\ \dot{u}|_{t=0} = u_1(x) \in H_D^{2\beta}(\Omega), \tag{26}$$

$$|f| \le \varepsilon,\ |\dot{f}| \le \varepsilon_1 \quad \varepsilon,\ \varepsilon_1 > 0, \tag{27}$$

$$\alpha = \frac{3d+3}{2d} + 2\theta,\ \beta = \frac{3d+1}{2d} + 2\theta,\ \theta > 0,$$

разрешима. При этом время остановки имеет оценку:

$$T \ge C \max\left\{ \frac{\zeta(1+\theta+1/d)(\Omega_d|\Omega|)^{1/d}}{2\pi\varepsilon}; \frac{\zeta(1+\theta)}{\varepsilon_1} \right\}, \tag{28}$$

где постоянная C не зависит от ε, ε_1, но зависит от размеров области, размерности $d = 1,2,3$ и начальных условий.

6. Распределенное управление воздействием, малым по модулю и с малой по модулю производной.

Постоянная в оценке (28):

$$C = \frac{2C_d}{e\theta}\left(\alpha_2\|u_0\|_{H_D^{2\alpha}(\Omega)} + \|u_1\|_{H_D^{2\beta}(\Omega)}\right), \tag{29}$$

где постоянная C_d — постоянная в оценке (см. [19], Эйдус Д.М. 1956г.):

$$|\varphi_k(x)| \le C_d k^{\frac{d-1}{2d}} \ln k,$$

α_1, α_2 — постоянные в оценке Куранта-Вейля.

$$\alpha_1 k^{\frac{1}{d}} \le \omega_k \le \alpha_2 k^{\frac{1}{d}},$$

$\zeta(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ — дзета-функция Римана, Ω_d — объем единичного шара в $\mathbb{R}^d$, $|\Omega|$ — объем области Ω.

Распределенное управление воздействием, малым по модулю.

Заметим, что при отсутствии ограничения на производную управления скорости убывания коэффициентов разложения в ряд Фурье функций из начальных условий могут быть ниже, в этом случае достаточно

$$u_0(x) \in H_D^{3+1/d+4\theta}(\Omega),\ u_1(x) \in H_D^{3-1/d+4\theta}(\Omega).$$

При этом время погашения $T' \sim \tilde{C}\varepsilon^{-1}$, где постоянная

$$\tilde{C} = \frac{2C_d\zeta(1+\theta)}{e\theta}\left(\alpha_2\|u_0\|_{H_D^{3+\frac{1}{d}+4\theta}(\Omega)} + \|u_1\|_{H_D^{3-\frac{1}{d}+4\theta}(\Omega)}\right). \tag{30}$$

Аналогичный подход построения распределенного управления описан в работах [20]-[21], где исследуются задачи распределенного управления колебаниями мембраны или пластины путем использования малой по абсолютной величине силы для систем с внутренней диссипацией механической энергии и диссипацией за счет трения о внешнюю среду, устанавливаются порядки гладкости для функций из начальных условий, достаточные чтобы задача приведения в покой за конечное время была разрешима. При этом для времени остановки колебаний имеет место оценка: $C\ln\varepsilon^{-1}$.

Список использованной литературы I

[1] Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. – М.Мир, 1984.

[2] Гавриков А.А., Шамаев А.С. Некоторые вопросы акустики эмульсий // Тр. сем. им. И. Г. Петровского, 2011, выпуск 28, 114–146

[3] Desch W., Grimmer R., Schappacher W. Wellposdness and Wave Propagation for a Class of Integrodifferential Equations in Banach Space// J. Differential Equations 74(1988), 391-411.

[4] И. В. Романов, А. С. Шамаев, О существовании волнового фронта в задаче Коши для уравнения Гуртина–Пипкина, Матем. заметки, 116:4 (2024), 636–640.

[5] Romanov I.V., Shamaev A.S., On the Absence of a Propagation Front in the Cauchy Problem for a Certain Integro-Differential Equation with a Rabotnov Kernel// Russian Journal of Mathematical Physics, Pleiades Publishing, Ltd (Road Town, United Kingdom), V. 31, № 4, P. 758-761

Список использованной литературы II

[6] И. В. Романов, А. С. Шамаев, О существовании фронта распространения в задаче Коши для некоторого интегро-дифференциального уравнения второго порядка с ядром Работнова, Матем. заметки, 119:3 (2026), 426–432.

[7] Егорова А.А., Шамаев А.С., Существование волнового фронта в модели динамики слабовязкой сжимаемой жидкости//Современная математика. Фундаментальные направления.Том 72, No 2 (2026). С. 250–257 DOI:10.22363/2413-3639-2026-72-2-250-257 EDN:AWMJMS

[8] Бутковский А.Г. *Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами*, 1965.

[9] Lions J.L., *Exact Controllability. Stabilization and Perturbations for Distributed Systems.* SIAM Review. V. 30 (1) (1988) 1-68.

[10] Chernousko F. L., *Bounded Control in Distributed-Parameter Systems.* Journal of Applied Mathematics and Mechanics. V. 56, (5) (1992) 707-723.

Список использованной литературы III

[11] Ivanov S., Pandolfi L.,*Heat Equations with Memory: Lack of Controllability to Rest*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. V. 355 (1) (2009) 1-11.

[12] И. В. Романов, А. С. Шамаев, О задачах распределенного и граничного управления некоторыми системами с интегральным последействием, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, 2016, выпуск 31, 134–157

[13] Егорова А.А., Шамаев А.С. Задача распределенного управления колебаниями эмульсии слабовязких сжимаемых жидкостей// Изв.РАН. Теория и системы управления: Управление системами с распределенными параметрами. 2024, № 6, с. 41–45.

[14] Ильин А.А. О спектре оператора Стокса//Функц. Анализ и его прил. – 2009. – Т.43.- вып. 4. – С. 14-25.

[15] Седлецкий А.М. Целые функции в анализе //https://math.msu.ru/sites/default/files/entire_functions.pdf 30 с.

Список использованной литературы IV

[16] Vlasov V.V., Gavrikov A.A., Ivanov S.A., Knyazkov D.Yu., Samarin V.A. and Shamaev A.S. Spectral properties of combined media // Journal of Mathematical Sciences. 2010. V. 164. № 6. P. 948-963.

[17] Н.А. Раутиан, Исследование вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах, Док. дисс. по спец. 1.1.1 (физ.-мат. науки), 2022г. https://istina.ipmnet.ru/dissertations/536965637/

[18] *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.

[19] *Эйдус Д. М.* Некоторые неравенства для собственных функций // Докл. АН СССР. 1956. Т. 107. № 6. С. 796–798.

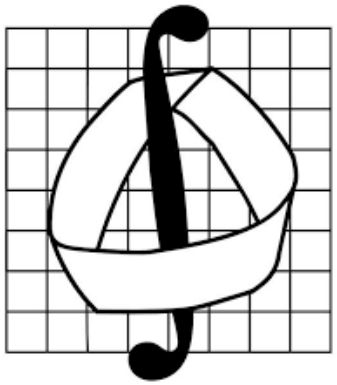
[20] *Бобылева Т. Н., Гусев И. М., Шамаев А. С.* Ограниченные и гладкие управления колебаниями в системах, заданных дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями// ПММ. 2023. Т.87 № 5. С. 820–828.

Список использованной литературы V

[21] *Бобылева Т. Н., Шамаев А. С.* Влияние характера диссипации энергии на управляемость колебательными процессами в системах с распределенными параметрами// Известия РАН.ПММ. 2025. №.2 С. 226–237.







Спасибо за внимание!