

А. В. Субботин\*

**ИЗОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВ ПРИВАЛОВА  
ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ  
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ\*\***

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $n \in \mathbb{N}$  и  $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \mid z_k \in \mathbb{C}, 1 \leq k \leq n\}$  —  $n$ -мерное комплексное координатное пространство. Обозначим единым символом  $G$  единичный шар

$$B_n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1\}$$

и единичный поликруг

$$U^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_k| < 1, 1 \leq k \leq n\}$$

в пространстве  $\mathbb{C}^n$ . Символом  $\Gamma$  обозначим границу Бергмана—Шилова области  $G$ , совпадающую с топологической границей

$$S_n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$$

в случае шара  $G = B_n$  и с остовом поликруга

$$T^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_k| = 1, 1 \leq k \leq n\}$$

в случае  $G = U^n$ . В обоих случаях на  $\Gamma$  существует естественная инвариантная вероятностная мера  $\sigma$  — нормированная мера Лебега на сфере  $S_n$  (инвариантная относительно унитарных преобразований  $\mathbb{C}^n$ ) в случае шара  $G = B_n$  и прямое произведение нормированных мер Лебега на единичных окружностях, составляющих тор  $T^n = T^1 \times \dots \times T^1$

---

\*© Субботин А. В., 2006 г.

\*\*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ № НШ-680.2003.1.

(инвариантная мера относительно преобразований  $\mathbb{C}^n$  типа перестановок координат с одновременным вращением по каждой из них), в случае поликруга  $G = U^n$ . Когда  $n = 1$ , имеем

$$\begin{aligned} G = B_n = U^n = U &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \\ \Gamma = S_n = T^n = T &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \\ \sigma(d\zeta) &= \frac{|d\zeta|}{2\pi}, \quad \zeta \in T. \end{aligned}$$

Голоморфную в области  $G$  функцию  $f$  относят к классу  $\varphi(N)$ , где  $\varphi(t)$ ,  $t \geq 0$ , — произвольная неубывающая неотрицательная функция неотрицательного аргумента, если

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\Gamma} \varphi(\ln_+ |f(r\zeta)|) \sigma(d\zeta) < +\infty;$$

здесь  $\ln_+ a$ ,  $a \geq 0$ , — неотрицательная часть логарифма неотрицательного аргумента, т. е.  $\ln_+ a = \ln a$  при  $a > 1$  и  $\ln_+ a = 0$  при  $a \leq 1$ .

Полагая в этом определении  $\varphi(t) = t$  и  $\varphi(t) = e^{pt}$ ,  $p > 0$ , получаем класс Островского—Неванлинны  $N$  и классы Харди  $H^p$ ,  $p > 0$ , в шаре и поликруге (см. [1, с. 91; 2, с. 42–47]), а при  $\varphi(t) = t^q$ ,  $q > 1$  — многомерные классы Привалова  $N^q$  [3]. Отметим строгие включения

$$H^p \subset N^q \subset N,$$

справедливые при любых  $p > 0$ ,  $q > 1$ . Каждая функция  $f(z)$  из класса  $N$  — самого широкого из этих классов — обладает радиальными граничными пределами  $f^*(\zeta) = \lim_{r \rightarrow 1-} f(r\zeta)$ , совпадающими с допустимыми пределами по угловым областям, в почти всех (по мере  $\sigma$ ) точках  $\zeta \in \Gamma$  [1, с. 93; 4, гл. XVII]. Напомним, что угловые области для шара имеют вид

$$D_\alpha^n(\zeta) = \{z \in B_n \mid |1 - \langle z, \zeta \rangle| < \alpha(1 - |z|)\}, \quad \alpha > 1, \quad \zeta \in S_n$$

(где  $\langle z, \zeta \rangle$  и  $|z|$  обозначают эрмитово скалярное произведение и порожденную им норму в  $\mathbb{C}^n$ ), а для поликруга имеют вид

$$\begin{aligned} D_\alpha^n(\zeta) &= \left\{ z \in D_\alpha^1(\zeta_1) \times \dots \times D_\alpha^1(\zeta_n) \mid \frac{1}{\alpha} < \frac{1 - |z_k|}{1 - |z_l|} < \alpha, \quad 1 \leq k, l \leq n \right\}, \\ \alpha &> 1, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in T^n. \end{aligned}$$

Заметим, что классы Привалова  $N^q$ ,  $q > 1$ , содержатся в многомерном классе Смирнова  $N^*$ , определяемом как множество голоморфных

в  $G$  функций  $f(z)$ , для которых семейство  $\{\ln_+ |f(r\zeta)|, \zeta \in \Gamma\}_{0 \leq r < 1}$  имеет равномерно абсолютно-непрерывные относительно меры  $\sigma$  интегралы на  $\Gamma$  [2, с. 42; 5]. В известной теореме П. Я. Полубариновой-Кочиной (см. [6; 2, с. 48]) утверждается, что среди функций класса  $N^*$  функции классов  $H^p$ ,  $p > 0$  (или ограниченные аналитические функции), полностью характеризуются условием интегрируемости функций  $|f^*|^p$  (или ограниченностью  $|f^*|$  почти всюду на  $\Gamma$  соответственно). Множество всех ограниченных аналитических функций обозначается  $H^\infty$ .

Метрики в классах  $N^q$ ,  $q \geq 1$ , вводятся по формулам

$$\begin{aligned} \rho_{N^q}(f, g) &= |f - g|_{N^q} = \\ &= \sup_{0 \leq r < 1} \left[ \int_{\Gamma} \ln^q(1 + |f(r\zeta) - g(r\zeta)|) \sigma(d\zeta) \right]^{1/q}, \quad f, g \in N^q. \end{aligned}$$

Кроме того, введем в рассмотрение максимальные аналоги классов  $N^q$  — классы  $M^q$ ,  $q > 0$ : голоморфная функция  $f(z)$ ,  $z \in G$ , принадлежит классу  $M^q$ , если семейство функций  $\{\ln_+^q |f(r\zeta)|, \zeta \in \Gamma\}_{0 \leq r < 1}$  имеет интегрируемую мажоранту на  $\Gamma$  [7, 8]. Метрика на  $M^q$ ,  $q > 0$ , вводится посредством формулы

$$\begin{aligned} \rho_{M^q}(f, g) &= |f - g|_{M^q} = \\ &= \left[ \int_{\Gamma} \ln^q(1 + \sup_{0 \leq r < 1} |f(r\zeta) - g(r\zeta)|) \sigma(d\zeta) \right]^{\alpha_q/q}, \quad f, g \in M^q, \end{aligned}$$

где  $\alpha_q = \min(1, q)$ . В [3] доказано, что при каждом  $q > 1$  класс  $M^q$  совпадает с классом  $N^q$  как в теоретико-множественном, так и в топологическом смысле; точнее, метрики  $\rho_{N^q}$  и  $\rho_{M^q}$  липшиц-эквивалентны [3] на  $M^q = N^q$  и относительно каждой из них классы  $M^q$  и  $N^q$  образуют  $F$ -алгебры (с обычными операциями сложения и умножения функций). Последнее утверждение относится также и к классам  $M^q$  при  $0 < q \leq 1$  (см. [9], где это утверждение доказано для случая шара).

В настоящей статье изучается метрическая структура многомерных пространств  $M^q$  и  $N^q$ ; другими словами, ищется общий вид линейных изометрий этих пространств в себя. Основные результаты содержатся в § 2 и 3 (теоремы 1 и 2). В § 2 (теорема 1) дается полное описание множества линейных изометрий пространств  $N^q$ ,  $q > 1$ , в метриках  $\rho_{N^q}$ ; аналогичное описание в одномерном случае получено в [10]. В § 3 (теорема 2) дано полное описание множества сюръективных линейных изометрий пространств  $M^q$  в метриках  $\rho_{M^q}$  в случае  $q \in \mathbb{N}$ .

Наконец, в § 4 доказывается различие множеств линейных изометрий пространств  $M^q$  и  $N^q$  при  $q > 1$ . Все результаты анонсированы ранее в [11].

## § 2. ЛИНЕЙНЫЕ ИЗОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВ ПРИВАЛОВА

Доказательство основной теоремы этого параграфа опирается на два вспомогательных утверждения, первое из которых, принадлежащее У. Рудину, дает описание линейных изометрий пространств Харди  $H^p$ ,  $p > 0$ , в шаре и поликруге, а второе относится к общим дифференциальным свойствам квазинорм в пространствах логарифмически интегрируемых функций.

ЛЕММА 1 [12]. *Отображение  $A$  является линейной изометрией пространства Харди  $H^p$ ,  $p > 0$ ,  $p \neq 2$ , тогда и только тогда, когда  $A$  имеет вид*

$$Af(z) = \psi(z)f(\phi(z)), \quad z \in G, \quad f \in H^p, \quad (1)$$

где  $\psi \in H^p$  и внутреннее отображение  $\phi: G \rightarrow G$  связаны соотношением

$$\int_{\Gamma} |\psi^*(\zeta)|^p h(\phi^*(\zeta)) \sigma(d\zeta) = \int_{\Gamma} h(\zeta) \sigma(d\zeta) \quad (2)$$

для любой неотрицательной борелевской функции  $h$  на  $\Gamma$ .

ЛЕММА 2. Пусть  $C$  — некоторый конус измеримых функций на измеримом пространстве с мерой  $(X, \mu)$ , отображение  $A$ , действующее из  $C$  в множество измеримых функций, однородно с положительными коэффициентами и

$$\int_X \ln^q(1 + |Af(x)|) \mu(dx) = \int_X \ln^q(1 + |f(x)|) \mu(dx), \quad f \in C, \quad (3)$$

для некоторого  $q > 0$ . Тогда для всех  $p = q + l$ , где  $l \in \mathbb{Z}_+$ ,  $l \leq q + 1$ , выполнено

$$\int_X |f(x)|^p \mu(dx) = \int_X |Af(x)|^p \mu(dx), \quad f \in C. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого  $\varepsilon > 0$  в силу (3) и положительной однородности отображения  $A$  выполнено равенство

$$\int_X \frac{\ln^q(1 + \varepsilon |Af(x)|)}{\varepsilon^q} \mu(dx) = \int_X \frac{\ln^q(1 + \varepsilon |f(x)|)}{\varepsilon^q} \mu(dx), \quad f \in C,$$

и подынтегральные выражения монотонны по  $\varepsilon$ . Устремляя  $\varepsilon$  к нулю, получаем

$$\int_X |Af(x)|^q \mu(dx) = \int_X |f(x)|^q \mu(dx), \quad f \in C,$$

т. е. равенство (4) для  $p = q$ . Далее будем рассуждать по индукции.

Пусть  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq q+1$ , и равенство (4) выполнено для всех  $p = q+l$ ,  $l \in \mathbb{Z}_+$ ,  $l < k$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  и любой функции  $f \in C$  выполнено равенство

$$\begin{aligned} \int_X \frac{1}{\varepsilon^{q+k}} \left[ \ln^q(1 + \varepsilon |Af(x)|) - \sum_{l=0}^{k-1} c_l (\varepsilon |Af(x)|)^{q+l} \right] \mu(dx) = \\ = \int_X \frac{1}{\varepsilon^{q+k}} \left[ \ln^q(1 + \varepsilon |f(x)|) - \sum_{l=0}^{k-1} c_l (\varepsilon |f(x)|)^{q+l} \right] \mu(dx), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $c_l$  — коэффициенты Тейлора функции  $[\ln(1+t)/t]^q$  в нуле.

Предположим сначала, что  $f \in L^{q+k} = L^{q+k}(X, \mu)$ . Нетрудно заметить, что подынтегральное выражение в правой части (2) при  $\varepsilon \rightarrow 0+$  стремится к  $c_k |f(x)|^{q+k}$ , знакопостоянно в силу предположения  $k \leq q+1$  и мажорируется функцией  $C_k |f(x)|^{q+k}$  с некоторой постоянной  $C_k < +\infty$ . По теореме Лебега правая часть (2) имеет предел, равный интегралу от  $c_k |f(x)|^{q+k}$ . Следовательно, левая часть (2) также имеет конечный предел, и по теореме Фату функция  $c_k |Af(x)|^{q+k}$  интегрируема. Так как  $c_k \neq 0$  при  $k \leq q+1$ , отсюда заключаем, что  $Af \in L^{q+k}$ , и, повторяя предыдущие рассуждения, видим, что левая часть (2) сходится при  $\varepsilon \rightarrow 0+$  к интегралу от  $c_k |Af(x)|^{q+k}$ . Следовательно, переходя в (2) к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0+$  и сокращая на  $c_k \neq 0$ , получаем (4) с  $p = q+k$ . Случай, когда  $Af \in L^{q+k}$ , рассматривается аналогично. В случае, когда  $f, Af \notin L^{q+k}$ , равенство (4) при  $p = q+k$  тривиально.  $\square$

Обозначим пространство измеримых функций (с отождествлением совпадающих почти всюду функций), для которых конечен интеграл в правой части (3), через  $\ln^q L = \ln^q L(X, \mu)$ ,  $q > 0$ . Метрику в  $\ln^q L$ ,  $q > 0$ , введем посредством формулы

$$\rho_{\ln^q L}(f, g) = \left[ \int_{\Gamma} \ln^q(1 + |f(x) - g(x)|) \mu(dx) \right]^{\alpha_q/q}, \quad f, g \in \ln^q L,$$

где  $\alpha_q = \min(1, q)$ . Равенство (3) означает, что отображение  $A$  изометрично в метрике  $\rho_{\ln^q L}$ .

Напомним, что голоморфная функция  $\psi$  в  $G$  называется внутренней, если она ограничена и  $|\psi^*| = 1$  почти всюду на  $\Gamma$ . Аналогично голоморфное отображение  $\phi: G \rightarrow \bar{G}$  называется внутренним, если  $\phi^*(\zeta) \in \Gamma$  для почти всех  $\zeta \in \Gamma$ .

**ТЕОРЕМА 1.** *Отображение  $A$  из  $N^q$ ,  $q > 1$ , в себя является линейной изометрией тогда и только тогда, когда  $Af(z) = \psi(z)f(\phi(z))$ ,  $z \in G$ ,  $f \in N^q$ ,  $q > 1$ , где  $\psi$  — внутренняя функция и  $\phi$  — внутреннее отображение в  $G$ , радиальные граничные значения которого сохраняют меру  $\sigma$  на  $\Gamma$ .*

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Для одномерного случая аналогичный результат был доказан слегка отличным от приведенного ниже методом в [10]. Отметим, что в одномерном случае внутреннее отображение  $\phi$  (в данном случае функция) сохраняет меру  $\sigma$  на  $\Gamma$  тогда и только тогда, когда  $\phi(0) = 0$  [13].

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Изометрии пространств Привалова имеют в точности такой же вид, что и изометрии пространства Смирнова [5].

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Необходимость.** В силу доказанного в [3] выражения для квазинормы  $|\cdot|_{N^q}$ ,  $q > 1$ , справедливо равенство

$$|f|_{N^q} = \left[ \int_{\Gamma} \ln^q(1 + |f^*(\zeta)|) \sigma(d\zeta) \right]^{1/q}, \quad f \in N^q,$$

где  $f^*(\zeta)$  — радиальные граничные значения  $f(z)$ . Поэтому  $N^q$ ,  $q > 1$ , изометрически изоморфно некоторому линейному подпространству пространства  $\ln^q L(\Gamma, \sigma)$  с метрикой  $\rho_{\ln^q L}$ ; соответствие устанавливается следующим образом:  $f \in N^q \mapsto f^* \in \ln^q L(\Gamma, \sigma)$  (ср. [1, следствие 5.6.8]). В силу этого любая изометрия пространства  $N^q$ ,  $q > 1$ , индуцирует изометрию на этом подпространстве в метрике  $\rho_{\ln^q L}$ . Согласно лемме 2

$$\int_{\Gamma} |(Af)^*(\zeta)|^p \sigma(d\zeta) = \int_{\Gamma} |f^*(\zeta)|^p \sigma(d\zeta), \quad f \in N^q, \quad q > 1, \quad (6)$$

для всех  $p = q + l$ ,  $l \in \mathbb{Z}_+$ ,  $l \leq q + 1$ , в частности для  $p = q$  и  $q + 1$ . Так как при  $f \in H^p$ ,  $p = q$  или  $p = q + 1$ , обе части равенства (6) конечны и  $Af$  принадлежит классу  $N^q$ ,  $q > 1$ , то по теореме П. Я. Полубариновой-Кочиной из (6) вытекает, во-первых, что классы Харди  $H^p$ ,  $p = q, q + 1$ , инвариантны относительно  $A$  и, во-вторых, что  $A$  является линейной изометрией пространств  $H^p$ ,  $p = q, q + 1$ . Так как  $q + 1 > 2$ , то, применяя лемму 1 при  $p = q + 1$ , получаем, что  $A$  имеет вид (1)

для всех  $f \in H^{q+1}$  с некоторой функцией  $\psi \in H^{q+1}$  и внутренним отображением  $\phi$ , связанным с  $\psi$  соотношением (2). При этом в силу одновременной изометричности в нормах  $H^q$  и  $H^{q+1}$

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{\Gamma} |\psi^*(\zeta)|^q \sigma(d\zeta) \right]^{1/q} = \left[ \int_{\Gamma} |1|^q \sigma(d\zeta) \right]^{1/q} = 1 = \\ & = \left[ \int_{\Gamma} |1|^{q+1} \sigma(d\zeta) \right]^{1/(q+1)} = \left[ \int_{\Gamma} |\psi^*(\zeta)|^{q+1} \sigma(d\zeta) \right]^{1/(q+1)} \end{aligned}$$

(так как  $\psi = A1$ , где  $1$  — тождественно единичная функция в  $G$ ), что может быть только при условии, что  $|\psi^*| = 1$  почти всюду на  $\Gamma$  (равенство в неравенстве между средними степенными разных порядков достигается, только если усредняемая функция постоянна почти всюду). Согласно теореме П. Я. Полубариновой-Кочиной функция  $\psi$  внутренняя в области  $G$ , а соотношение (2) показывает, что отображение  $\phi^*: \Gamma \rightarrow \Gamma$  сохраняет меру  $\sigma$  на  $\Gamma$ .

Осталось показать, что  $A$  сохраняет вид (1) на всем пространстве  $N^q$ ,  $q > 1$ . Действительно, для любой функции  $f \in N^q$ ,  $q > 1$ , функции  $f_r(z) = f(rz)$ ,  $z \in G$ ,  $0 \leq r < 1$ , сходятся при  $r \rightarrow 1-$  к  $f$  в смысле метрики  $\rho_{N^q}$  [3], поэтому в силу изометричности  $A$  имеем  $Af_r \rightarrow Af$ ,  $r \rightarrow 1-$ . Так как сходимость в метрике  $\rho_{N^q}$  сильнее равномерной сходимости на компактах (см. [3]), то для любой точки  $z \in G$  выполнено  $f_r(\phi(z)) \rightarrow f(\phi(z))$  и  $Af_r(z) \rightarrow Af(z)$ ,  $r \rightarrow 1-$ . С другой стороны, функции  $f_r$ ,  $0 \leq r < 1$ , принадлежат пространству  $H^{q+1}$ , поэтому справедливо представление  $Af_r(z) = \psi(z)f_r(\phi(z))$ . Устремляя  $r$  к  $1-$ , получаем  $Af(z) = \psi(z)f(\phi(z))$ ,  $z \in G$ ,  $f \in N^q$ ,  $q > 1$ , т. е.  $A$  имеет искомый вид (1) на всем пространстве  $N^q$ ,  $q > 1$ .

*Достаточность.* Если  $\psi$  — внутренняя функция в области  $G$  и  $\phi$  — внутреннее отображение  $G$  в себя, радиальные граничные значения которого сохраняют меру  $\sigma$  на  $\Gamma$ , то свойство изометричности отображения  $Af(z) = \psi(z)f(\phi(z))$ ,  $z \in G$ ,  $f \in N^q$ ,  $q > 1$ , легко проверяется для случая, когда  $f$  — полином (в этом случае, очевидно,  $Af \in N^q$  и  $(f(\phi))^*(\zeta) = f(\phi^*(\zeta))$ ), с помощью соотношения  $|\psi^*| = 1$  почти всюду на  $\Gamma$  и формулы замены переменной в интеграле Лебега:

$$\begin{aligned} \|Af\|_{N^q} &= \left[ \int_{\Gamma} \ln^q(1 + |\psi^*(\zeta)f(\phi^*(\zeta))|) \sigma(d\zeta) \right]^{1/q} = \\ &= \left[ \int_{\Gamma} \ln^q(1 + |f(\phi^*(\zeta))|) \sigma(d\zeta) \right]^{1/q} = \end{aligned}$$

$$= \left[ \int_{\Gamma} \ln^q (1 + |f(\zeta)|) \sigma(d\zeta) \right]^{1/q} = |f|_{N^q}.$$

Так как полиномы плотны в  $N^q$ ,  $q > 1$ , и  $N^q$ ,  $q > 1$ , полное в метрике  $\rho_{N^q}$  (см. [3]), то отображение  $A$  единственным способом продолжается на все  $N^q$ ,  $q > 1$ , с сохранением свойства изометричности. Согласно доказанной необходимости эта изометрия сохраняет тот же вид  $Af(z) = \psi(z)f(\phi(z))$  (с теми же  $\psi$  и  $\phi$ ) на всем  $N^q$ ,  $q > 1$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ.** Отображение  $A$  является сюръективной линейной изометрией  $N^q$ ,  $q > 1$ , на себя тогда и только тогда, когда

$$Af(z) = \alpha f(\phi(z)), \quad z \in G, \quad f \in N^q, \quad q > 1, \quad (7)$$

где  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha| = 1$  и  $\phi$  — автоморфизм области  $G$ , сохраняющий меру  $\sigma$  на  $\Gamma$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Автоморфизмы области  $G$ , сохраняющие меру  $\sigma$  на  $\Gamma$ , или, что равносильно, оставляющие точку 0 неподвижной, имеют простое описание [5]: это группа  $U_n(\mathbb{C})$  унитарных преобразований  $\mathbb{C}^n$  (в случае шара) и подгруппа  $S_n(\mathbb{C})$  группы  $U_n(\mathbb{C})$ , состоящая из преобразований  $\mathbb{C}^n$  вида

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) \mapsto (\alpha_1 z_{\tau(1)}, \alpha_2 z_{\tau(2)}, \dots, \alpha_n z_{\tau(n)}),$$

где  $|\alpha_1| = |\alpha_2| = \dots = |\alpha_n| = 1$  и  $(\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(n))$  — перестановка  $(1, 2, \dots, n)$  (в случае поликруга). Следовательно, для групп  $\text{Isom } N^q$  изометрий пространств  $N^q$ ,  $q > 1$ , в шаре и поликруге имеем изоморфизмы

$$\text{Isom } N^q \simeq T \times U_n(\mathbb{C}) \quad \text{и} \quad \text{Isom } N^q \simeq T \times S_n(\mathbb{C})$$

соответственно.

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.** Сюръективные линейные изометрии пространств Привалова имеют такой же вид, как и у пространства Смирнова [5].

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ.** *Необходимость.* Применяя необходимость теоремы 1 к  $A$  и  $A^{-1}$ , получаем представления

$$Af(z) = \psi(z)f(\phi(z)), \quad A^{-1}f(z) = \chi(z)f(\theta(z)), \quad z \in G, \quad f \in N^q,$$

с некоторыми внутренними функциями  $\psi$  и  $\chi$  и внутренними отображениями  $\phi$  и  $\theta$ , радиальные граничные значения которых сохраняют меру  $\sigma$  на  $\Gamma$ . Подставляя второе выражение (вместо  $f$ ) в первое, получаем

$$f(z) = \psi(z)\chi(\phi(z))f(\theta(\phi(z))), \quad z \in G, \quad f \in N^q, \quad (8)$$

и, полагая  $f(z) \equiv 1$ , имеем  $\psi(z)\chi(\phi(z)) \equiv 1$ . Так как  $|\psi(z)| \leq 1$  и  $|\chi(z)| \leq 1$ , то отсюда вытекает  $|\psi(z)| \equiv 1$ ,  $|\chi(\phi(z))| \equiv 1$ , и по принципу максимума модуля  $\psi(z) \equiv \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha| = 1$ .

Подставляя теперь вместо  $f$  в (8) последовательно все координатные функции, имеем  $\theta(\phi(z)) \equiv z$ , и аналогично можно получить, что  $\phi(\theta(z)) \equiv z$ . Поэтому  $\phi$  и  $\theta$  взаимно обратны в  $G$  и, таким образом, являются автоморфизмами области  $G$ .

*Достаточность.* Определим отображения  $A$  и  $B$  равенствами

$$Af(z) = \alpha f(\phi(z)), \quad Bf(z) = \alpha^{-1} f(\phi^{-1}(z)), \quad z \in G, \quad f \in N^q.$$

Очевидно, что отображения  $\phi$  и  $\phi^{-1}$  (как автоморфизмы) являются внутренними, причем как  $\phi$ , так и  $\phi^{-1}$  сохраняют меру  $\sigma$  на  $\Gamma$ . Согласно достаточности теоремы 1 они являются линейными изометриями на  $N^q$ , и так как они взаимно обратны на  $N^q$  (что легко проверяется), то  $A$  — сюръективная линейная изометрия пространства  $N^q$ ,  $q > 1$ , на себя.  $\square$

### § 3. ЛИНЕЙНЫЕ СЮРЪЕКТИВНЫЕ ИЗОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВ $M^q$ , $q \in \mathbb{N}$

Для доказательства теоремы этого параграфа понадобятся еще две леммы.

**ЛЕММА 3** [14]. *Отображение  $A$  является линейной сюръективной изометрией пространства  $H^\infty$  в  $\sup$ -норме в том и только в том случае, когда  $A$  имеет вид (1) для всех  $f \in H^\infty$ , в котором  $\psi(z) \equiv \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha| = 1$ , и  $\phi$  — автоморфизм области  $G$ .*

**ЛЕММА 4.** *В случае  $q \in \mathbb{N}$  заключение леммы 2 справедливо для всех  $p = q + l$ ,  $l \in \mathbb{Z}_+$ . При этом если мера  $\mu$  конечна, то отображение  $A$  сохраняет норму пространства  $L^\infty(X, \mu)$  (существенный супремум модуля функции).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Условие  $k \leq q + 1$  при индуктивном переходе в доказательстве леммы 2 использовалось в двух местах: когда утверждалось, что выражение

$$\ln^q(1+t) - \sum_{l=0}^{k-1} c_l t^{q+l}$$

(где  $c_l$  — коэффициенты Тейлора функции  $\ln^q(1+t)/t^q$  в нуле) знакопостоянно при  $t \geq 0$ , и когда предполагалось, что  $c_k \neq 0$ . В случае, когда

$q \in \mathbb{N}$ , оба утверждения (для любого  $k \in \mathbb{N}$ ) вытекают из неравенства

$$(-1)^k \left\{ \left[ \frac{\ln(1+t)}{t} \right]^q \right\}^{(k)} > 0, \quad t > 0,$$

проверяемого непосредственным дифференцированием с помощью правила Лейбница дифференцирования произведения. По принципу полной математической индукции утверждение леммы справедливо для любых  $l \in \mathbb{Z}_+$ .

Второе утверждение вытекает из предельного соотношения

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p, \quad f \in L^\infty(X, \mu)$$

(где  $\|\cdot\|_\infty$  и  $\|\cdot\|_p$  обозначают стандартные нормы в пространствах  $L^\infty(X, \mu)$  и  $L^p(X, \mu)$ ), выполненного в силу конечности меры  $\mu$  (см. [15, теорема 50]).  $\square$

**ТЕОРЕМА 2.** *Отображение  $A: M^q \rightarrow M^q$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , является линейной сюръективной изометрией тогда и только тогда, когда оно имеет вид  $Af(z) = \alpha f(\phi(z))$ ,  $z \in G$ ,  $f \in M^q$ , для некоторых  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha| = 1$ , и автоморфизма  $\phi$  области  $G$ , оставляющего точку 0 на месте.*

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.** Нетрудно показать, что сюръективные линейные изометрии  $M^q$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , на себя имеют такой же вид, как и сюръективные линейные изометрии пространств Привалова и пространства Смирнова. Справедлив ли такой результат для нецелых  $q$ , автору неизвестно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.** *Достаточность.* Согласно замечанию 3 автоморфизмы  $\phi$  области  $G$ , сохраняющие точку 0, являются линейными отображениями, сохраняющими меру  $\sigma$  на  $\Gamma$ . Следовательно, если радиальная максимальная функция  $Mg(\zeta)$  функции  $g(z)$ , определенной в  $G$ , задана формулой  $Mg(\zeta) = \sup_{0 \leq r < 1} |g(r\zeta)|$ ,  $\zeta \in \Gamma$ , то

$Mg(\phi(\zeta)) = Mg(\phi(\zeta))$  для любого  $\zeta \in \Gamma$  (так как радиусы переходят в радиусы). Поэтому для отображения  $A$ , определенного по формуле  $Af(z) = \alpha f(\phi(z))$ ,  $z \in G$ ,  $f \in M^q$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha| = 1$ , справедливо равенство

$$\begin{aligned} |Af|_{M^q} &= \left[ \int_{\Gamma} \ln^q(1 + Mf(\phi(\zeta))) \sigma(d\zeta) \right]^{1/q} = \\ &= \left[ \int_{\Gamma} \ln^q(1 + Mf(\zeta)) \sigma(d\zeta) \right]^{1/q} = |f|_{M^q}, \end{aligned}$$

где мы произвели замену переменной в интеграле Лебега и использовали инвариантность меры  $\sigma$  относительно отображения  $\phi$ . Следовательно, отображение  $A$  является линейной изометрией  $M^q$  в себя. Так как отображение  $B$ , определенное по формуле  $(Bf)(z) = \alpha^{-1}f(\phi^{-1}(z))$ ,  $z \in G$ ,  $f \in M^q$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , обратное к  $A$  на  $M^q$ , то  $A$  — сюръективная линейная изометрия пространства  $M^q$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , на себя.

*Необходимость.* Пусть  $A$  — линейная изометрия пространства  $M^q$  для некоторого  $q \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим произвольную функцию  $f \in M^q$  и порожденный ею конус  $C_f = \{\lambda Mf(\zeta) \mid \lambda \geq 0\}$  в пространстве  $\ln^q L(\Gamma, \sigma)$ . Рассмотрим на этом конусе отображение

$$\tilde{A}: \lambda Mf(\zeta) \mapsto \lambda M(Af)(\zeta) = M(A[\lambda f])(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \quad \lambda \geq 0.$$

Из изометричности отображения  $A$  в метрике  $\rho_{M^q}$  вытекает, что на конусе  $C_f$  выполняются условия леммы 2, поэтому выполнено ее утверждение, а по лемме 4 в случае  $q \in \mathbb{N}$  утверждение леммы 2 выполнено для любого  $p = q + l$ ,  $l \in \mathbb{Z}_+$ , и следовательно,

$$\|Mf\|_\infty = \|M(Af)\|_\infty, \quad f \in M^q.$$

Так как

$$\|Mf\|_\infty = \|f\|_{H^\infty} = \sup_{z \in G} |f(z)|,$$

то, следовательно,  $A$ , суженное на  $H^\infty$ , является линейной изометрией  $H^\infty$  на  $H^\infty$  (сюръективной, так как  $A$  сюръективно на  $M^q$ ). По лемме 3 существуют такие  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha| = 1$ , и автоморфизм  $\phi$  области  $G$ , что  $A$  имеет вид (7) для всех  $f \in H^\infty$ .

Осталось показать, что автоморфизм  $\phi$  оставляет нуль на месте. Если это не так, то рассмотрим на  $\Gamma$  множество  $K$  специального вида: пересечение некоторого шара в  $\mathbb{C}^n$  с  $S_n$  в случае  $G = B_n$  или декартово произведение открытых дуг на единичных окружностях, составляющих остов поликруга, в случае  $G = U^n$ . Тогда для любого  $0 < \varepsilon < 1$  существует голоморфная функция  $f$  в  $G$ , которая достигает максимального по модулю значения, равного 1, на любом радиусе, идущем в точку  $K$ , при приближении к границе и принимает значения, не превосходящие по модулю  $\varepsilon$ , на остальных радиусах области  $G$ . В случае шара такая функция существует согласно основной теореме из [8], а в случае поликруга такую функцию можно построить как произведение функций, зависящих каждая от своей переменной, полученных применением упомянутой теоремы в одномерном случае. Заметим, что для почти каждого  $\zeta \in K$  справедливо  $Mf(\zeta) = |f^*(\zeta)| = 1$ , а для каждого  $\zeta \in \Gamma \setminus K$

выполняется  $Mf(\zeta) \leq \varepsilon$ . Так как автоморфизм  $\phi$  непрерывно продолжается на  $\bar{G}$ , то он переводит каждый радиус, идущий в точку  $\zeta \in \Gamma$ , в кривую, начинающуюся в  $\phi(0)$  и заканчивающуюся в  $\phi(\zeta)$ , причем эта кривая подходит к  $\phi(\zeta)$  по допустимому направлению. Так как допустимые пределы  $f$  совпадают с радиальными (там, где они существуют, т. е. почти всюду), отсюда заключаем, что  $Mf(\phi(\zeta)) \geq (Mf)(\phi(\zeta)) = 1$  в почти каждой точке  $\zeta \in \Gamma$  открытого множества, определяемого условием  $\phi(\zeta) \in K$ , а так как  $|f(z)| \leq 1$  (по принципу максимума модуля), то  $Mf(\phi)(\zeta)$  не может превосходить 1. Следовательно,  $Mf(\phi)(\zeta) = 1$  для почти всех  $\zeta \in \Gamma$ , таких, что  $\phi(\zeta) \in K$ . Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned} |Af|_{M^q}^q &= \int_{\Gamma} \ln^q(1 + Mf(\phi)(\zeta)) \sigma(d\zeta) \geq \\ &\geq \int_{\phi^{-1}(K)} \ln^q(1 + Mf(\phi)(\zeta)) \sigma(d\zeta) = \ln^q 2 \sigma(\phi^{-1}(K)). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} |f|_{M^q}^q &= \int_K \ln^q(1 + Mf(\zeta)) \sigma(d\zeta) + \int_{\Gamma \setminus K} \ln^q(1 + Mf(\zeta)) \sigma(d\zeta) \leq \\ &\leq \ln^q 2 \sigma(K) + \ln^q(1 + \varepsilon) \sigma(\Gamma \setminus K). \end{aligned}$$

Так как в силу изометричности  $A$  выполнено  $|f|_{M^q} = |Af|_{M^q}$ , то

$$\ln^q 2 \sigma(\phi^{-1}(K)) \leq \ln^q 2 \sigma(K) + \ln^q(1 + \varepsilon) \sigma(\Gamma \setminus K).$$

Устремляя в этом неравенстве  $\varepsilon$  к 0+, имеем  $\sigma(\phi^{-1}(K)) \leq \sigma(K)$ . Здесь  $K$  — произвольное открытое множество специального вида на  $\Gamma$ . Каждое борелевское множество  $E \subseteq \Gamma$  для любого  $\varepsilon > 0$  можно покрыть счетным набором множеств  $K_l$  указанного выше вида так, что выполняется неравенство

$$\sum_l \sigma K_l < \sigma E + \varepsilon.$$

Поэтому

$$\sigma(\phi^{-1}(E)) \leq \sum_l \sigma(\phi^{-1}(K_l)) \leq \sum_l \sigma K_l < \sigma E + \varepsilon,$$

откуда при  $\varepsilon \rightarrow 0+$  получаем  $\sigma(\phi^{-1}(E)) \leq \sigma E$  для любого борелевского множества  $E$  на  $\Gamma$ . Применяя это неравенство к дополнению  $E$

на  $\Gamma$ , найдем противоположное неравенство  $\sigma E \leq \sigma(\phi^{-1}(E))$ , поэтому  $\sigma E = \sigma(\phi^{-1}(E))$ , т. е.  $\phi$  сохраняет меру  $\sigma$  на  $\Gamma$ . Производя замену переменной  $\gamma = \phi(\zeta)$ , имеем

$$\int_{\Gamma} \phi(\zeta) \sigma(d\zeta) = \int_{\Gamma} \gamma \sigma(d\gamma),$$

откуда получаем  $\phi(0) = 0$ , так как

$$\int_{\Gamma} \phi(\zeta) \sigma(d\zeta) = \phi(0) \quad \text{и} \quad \int_{\Gamma} \gamma \sigma(d\gamma) = 0$$

в силу свойства среднего значения голоморфных функций.

Итак, показано, что  $A$  имеет необходимый вид на  $H^\infty$ . Так как  $H^\infty$  плотно в  $M^q$  и продолжение изометрии с плотного подмножества на все пространство единственно, то отображение  $A$  имеет такой же вид на всем  $M^q$  согласно уже доказанной достаточности условий теоремы.  $\square$

#### § 4. ОБ ИНЪЕКТИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ИЗОМЕТРИЯХ ПРОСТРАНСТВ $M^q$

В отличие от сюръективных линейных изометрий пространств  $N^q$  и  $M^q$  в случае  $q \in \mathbb{N}$ , множества линейных изометрий пространств  $N^q$  и  $M^q$  различны при каждом  $q > 1$ , как показывает сравнение теоремы 1 и следующего утверждения.

**ТЕОРЕМА 3.** Если отображение  $A$  вида

$$Af(z) = \psi(z)f(z), \quad z \in G, \quad f \in M^q,$$

с некоторой внутренней функцией  $\psi$  является изометрией пространства  $M^q$ ,  $q > 0$ , то  $\psi(z) \equiv \text{const}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\psi(z) \not\equiv \text{const}$ . Рассмотрим такую голоморфную функцию  $f$  в  $G$ , что супремум в определении радиальной максимальной функции  $Mf(\zeta) = \sup_{0 \leq r < 1} |f(r\zeta)|$  достигается во внутренней точке радиуса, идущего в точку  $\zeta$ , для множества точек  $\zeta$  положительной меры на  $\Gamma$ . Тогда  $M(\psi f)(\zeta) < Mf(\zeta)$  для всех таких точек, так как  $|\psi(z)| < 1$  при  $z \in G$  (в силу принципа максимума модуля голоморфных функций). В остальных точках  $\Gamma$  выполняется неравенство

$M(\psi f)(\zeta) \leq Mf(\zeta)$ . Отсюда

$$\int_{\Gamma} \ln^q(1 + M(\psi f)(\zeta)) \sigma(d\zeta) < \int_{\Gamma} \ln^q(1 + Mf(\zeta)) \sigma(d\zeta)$$

и, значит, отображение  $A$  не может быть изометрией пространства  $M^q$  ни при каком  $q > 0$ . Искомую функцию  $f$  можно подобрать, например, среди линейных функций.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.** Из теоремы 1 вытекает, в частности, инвариантность классов  $N^q (= M^q)$ ,  $q > 1$ , относительно подстановок внутренних отображений, сохраняющих меру  $\sigma$  на  $\Gamma$ . В случае шара инвариантность классов  $M^q$ ,  $q > 0$ , относительно подстановок автоморфизмов области  $G$  отмечена в [7].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из  $\mathbb{C}^n$ . М.: Мир, 1984.
2. Рудин У. Теория функций в поликруге. М.: Мир, 1974.
3. Субботин А. В. Функциональные свойства пространств Привалова голоморфных функций нескольких переменных // Мат. заметки. 1999. Т. 65, вып. 2. С. 280—288.
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
5. Stephenson K. Isometries of the Nevanlinna class // Indiana Univ. Math. J. 1977. V. 26, N 2. P. 307—324.
6. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
7. Kim H. O., Park Y. Y. Maximal functions of plurisubharmonic functions // Tsukuba J. Math. 1992. V. 16, N 1. P. 11—18.
8. Choe B. R., Kim H. O. On the boundary behavior of functions holomorphic on the ball // Complex Variables Theory Appl. 1992. V. 20. P. 53—61.
9. Гаврилов В. И., Субботин А. В.  $F$ -алгебры голоморфных функций в шаре, содержащие класс Неванлинны // Math. Montisnigri. 2000. V. XII. P. 17—31.
10. Iida Y., Mochizuki N. Isometries of some  $F$ -algebras of holomorphic functions // Arch. Math. 1998. V. 71. P. 297—300.
11. Субботин А. В. Группы линейных изометрий пространств И. И. Привалова голоморфных функций нескольких переменных // Докл. РАН. 1999. Т. 367, № 4. С. 451—453.
12. Rudin W.  $L^p$ -isometries and equimeasurability // Indiana Univ. Math. J. 1976. V. 25, N 3. P. 215—228.

- 
13. *Forelli F.* The isometries of  $H^p$  // *Can. J. Math.* 1964. V. 16, N 4. P. 721—728.
  14. *Ahern P., Shneider R. B.* Isometries of  $H^\infty$  // *Duke Math. J.* 1975. V. 42, N 2. P. 321—326.
  15. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972.