Вопросы по "Уравнениям с частными производными" (осенний семестр)

1. Сформулировать задачу Коши для линейного уравнения с частными производными второго порядка. Преобразование задачи в соответствующую задачу Коши с начальными данными, заданными в области $V(0)$, лежащей на плоскости $y_n = 0$. Объяснить введение понятия характеристики. Пример задачи Коши с данными на характеристике (разобрать случаи, когда решение не существует и когда решений бесконечно много).

2. Объяснить естественность выбора класса аналитических функций для решения задачи Коши в случае, когда поверхность, на которой заданы начальные условия не является характеристикой. Сформулировать теорему Коши - Ковалевской и доказать единственность решения задачи Коши в классе аналитических функций.

3. Понятие мажоранты в точке x_0 аналитической функции. Примеры мажорант. Доказательство теоремы Коши - Ковалевской (существование аналитического решения). Понятие мажорирующей задачи, построение такой задачи и ее решение.

4. Пример Ковалевской и пример Адамара.

5.Задача Коши для волнового уравнения. Физическая интерпретация решения для $n = 1, 2, 3$. Формула Кирхгофа для однородного волнового уравнения и доказательство того, что эта формула определяет классическое решение задачи Коши.

6. Решение задачи Коши ($n = 3$) для неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными условиями.

7. Энергетическое неравенство. Единственность классического решения задачи Коши.

8. Задача Коши для однородного волнового уравнения в случае, когда $n = 2$. Вывод формулы Пуассона из формулы Кирхгофа.

9. Вывод формулы Д'Аламбера. Процесс распространения волн в пространстве (принцип Гюйгенса), на плоскости и на прямой. Область зависимости решения от начальных данных задачи.

10. Средние функции и их свойства.

11. Два определения обобщенного решения однородного волнового уравнения и их эквивалентность.

12. Определение обобщенной производной в смысле Соболева. Единственность обобщенной производной. Примеры.

13. Пространство $H^1(\Omega)$. Доказательство того, что $H^1(\Omega)$ - гильбертово пространство. При каких $\alpha \in R$ функция $u(x) = |x|^\alpha$ принадлежит $H^1(|x| < 1)$?

14. Пространство $H_0^1(\Omega)$. Формула интегрирования по частям для функций $u \in H^1(\Omega)$ и $v \in H_0^1(\Omega)$. Неравенство Фридрихса для функций из $H_0^1(\Omega)$.

15. Доказать, что $C^\infty(\overline{\Pi_a})$ всюду плотно в $H^1(\Pi_a)$, где $\Pi_a = \{x : |x_j| < a_j,\ j = 1, \ldots, n\}$.

16. Неравенство Пуанкаре для $u \in H^1(\Pi_a)$.

17. Теорема вложения Реллиха - Кондрашова.

18. Понятие следа функции из $H_0^1(\Omega)$ на сечении $S = \{x_1 = x_1^0\} \cap \Omega$. Доказательство корректности определения следа функции (т.е. не зависимость определения от выбора последовательности функций $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$, сходящейся в $H_0^1(\Omega)$ к функции u.

19. След функции из $H_0^1(\Omega)$ на $\partial\Omega$.

20. Задача Дирихле для уравнения Пуассона с однородными краевыми условиями. Определение классического и обобщенного решения (из $H_0^1(\Omega)$. Теорема существования и единственности обобщенного решения задачи Дирихле.

21. Задача Дирихле для уравнения Пуассона с неоднородными краевыми условиями. Понятия классического и обобщенного решения. Теорема существования и единственности обобщенного решения и оценка этого решения.

22. Смешанная задача для волнового уравнения. Определение классического и обобщенного решения. Теорема единственности обобщенного решения смешанной задачи для волнового уравнения.

23. Свойства собственных функций и собственных значений задачи Дирихле для оператора Лапласа.

24. Обоснование метода Фурье (Теорема существования обобщенного решения смешанной задачи для волнового уравнения).

25. Задача на минимум функционала на замкнутом подпространстве H пространства $H^1(\Omega)$. Понятие минимизирующей последовательности. Существование и единственность элемента, на котором достигается минимум функционала. Вариационное свойство решения задачи Дирихле.

26. Метод Ритца.