Билет 1

1. Сформулировать задачу Коши для линейного уравнения с частными производными второго порядка. Понятие характеристики. Пример задачи Коши с данными на характеристике (разобрать случаи, когда решение не существует и когда решений бесконечно много).

2. Принцип максимума для решения уравнения теплопроводности в слое. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Теорема единственности решения задачи Коши в классе ограниченных функций.

Билет 2

1. Объяснить выбор класса аналитических функций для решения задачи Коши в случае, когда поверхность, на которой заданы начальные условия не является характеристикой. Сформулировать теорему Коши - Ковалевской и доказать единственность решения задачи Коши в классе аналитических функций.

2. Изолированные особенности гармонических функций. Теорема об устранимой особенности.

Билет 3

1. Понятие мажоранты аналитической функции. Примеры мажорант. Доказательство (схема) теоремы Коши - Ковалевской (существование аналитического решения). Понятие мажорирующей задачи, построение такой задачи и ее решение.

2. Теорема о потоке тепла. Теоремы о среднем значении для гармонической функции.

Билет 4

1. Примеры Ковалевской и Адамара. Понятие корректно поставленной задачи.

2. Лемма Хопфа - Олейник о знаке нормальной производной гармонической функции в точке максимума (минимума). Задача Неймана. Единственность с точностью до аддитивной постоянной решения этой задачи.

Билет 5

1. Задача Коши для волнового уравнения. Физическая интерпретация решения для $n = 1, 2, 3$. Формула Кирхгофа для однородного волнового уравнения и доказательство того, что эта формула определяет классическое решение задачи Коши.

2. Энергетический метод доказательства единственности решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности. Единственность в обратном направлении времени.

Билет 6

1. Средние функции и их свойства.

2. Теорема о бесконечной дифференцируемости гармонической функции. Оценка производных гармонической функции.

Билет 7

1. Два определения обобщенного решения однородного волнового уравнения и их эквивалентность.

2. Теоремы Лиувилля для гармонической функции.

Билет 8

1. Обобщенная производная в смысле Соболева. Единственность обобщенной производной. Примеры.

2. Объемный потенциал и его свойства.

Билет 9

1. Смешанная задача для волнового уравнения. Классическое и обобщенное решение. Теорема единственности обобщенного решения смешанной задачи для волнового уравнения.

2. Функция Грина задачи Дирихле для шара. Решение задачи Дирихле в шаре. Интеграл Пуассона. Неравенство Харнака.

Билет 10

1. Свойства собственных функций и собственных значений задачи Дирихле для оператора Лапласа.

2. Постановки начально-краевых задач для уравнения теплопроводности. Принцип максимума для решения уравнения теплопроводности в цилиндре. Теоремы единственности решений начально-краевых задач для уравнения теплопроводности.

Билет 11

1. Пространство $H^1(\Omega)$. Доказательство полноты. Для каких α функция $|x|^\alpha \in H^1(|x| < 1)$?

2. Разрешимость в классе полиномов задачи Дирихле для уравнения Пуассона на единичном шаре. Теорема существования и единственности классического решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре (без использования функции Грина).

Билет 12

1. Пространство $H_0^1(\Omega)$. Неравенство Фридрихса.

2. Постановки внешних задач для уравнения Лапласа. Теоремы единственности решения внешних задач.

Билет 13

1. Теорема вложения Реллиха - Кондрашова.

2. Принцип максимума (нестрогий) для гармонической функции.

Билет 14

1. Неравенство Пуанкаре для функций из $H^1(\Pi_a)$, где $\Pi_a = \{x : |x_j| \le a_j,\ j = 1, \dots, n\}$.

2. Теорема о стабилизации решения уравнения теплопроводности в бесконечном цилиндре.

Билет 15

1. Понятие следа функции $u \in H_0^1(\Omega)$ на многообразии $S = \{x_1 = x_1^0\} \cap \Omega$. Доказательство корректности определения следа функции, принадлежащей $H_0^1(\Omega)$.

2. Теорема об аналитичности гармонической функции.

Билет 16

1. Обоснование метода Фурье (теорема существования обобщенного решения смешанной задачи для волнового уравнения).

2. Фундаментальное решение оператора теплопроводности. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в классе ограниченных функций.

Билет 17

1. Лемма Вейля. Теоремы о последовательностях гармонических функций.

2. Строгий принцип максимума (минимума) для гармонических функций.

Билет 18

1. Задача на минимум функционала на замкнутом подпространстве H пространства $H^1(\Omega)$. Минимизирующая последовательность. Существование и единственность элемента, на котором достигается минимум функционала. Вариационное свойство решения задачи Дирихле.

2. Определение гармонической функции в области; две формулы Грина. Фундаментальное решение оператора Лапласа.

Билет 19

1. Метод Ритца.

2. Интегральное представление произвольной функции класса $C^2(\overline{\Omega})$ (Ω - ограниченная область с гладкой границей) в виде суммы трех потенциалов.

Билет 20

1. Задача Дирихле для уравнения Пуассона с однородными краевыми условиями. Определение классического и обобщенного решения из пространства $H_0^1(\Omega)$. Теорема существования и единственности обобщенного решения задачи Дирихле.

2. Априорная оценка решения уравнения теплопроводности. Теоремы единственности.

Билет 21

1. Задача Дирихле для уравнения Пуассона с неоднородными краевыми условиями. Понятие классического и обобщенного (из $H^1(\Omega)$) решения. Теорема существования и единственности обобщенного решения.

2. Теорема о стабилизации решения уравнения теплопроводности в ограниченной области.

Билет 22

1. Лемма Вейля. Теоремы о последовательностях гармонических функций.

2. Функция Грина для полупространства. Решение задачи Дирихле для полупространства в классе ограниченных функций (интеграл Пуассона).

Билет 23

1. Решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными условиями.

2. Принцип максимума для решения уравнения теплопроводности в слое. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Теорема единственности решения задачи Коши в классе ограниченных функций.

Билет 24

1. Принцип максимума для решения уравнения теплопроводности в цилиндре.

2. Функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа. Симметрия функции Грина.

Билет 25

1. Энергетическое неравенство. Единственность решения задачи Коши для волнового оператора.

2. Принцип максимума для гармонической функции.

Билет 26

1. Формула Д$'$ Аламбера. Процесс распространения волн в пространстве (принцип Гюйгенса), на плоскости и на прямой. Область зависимости решения задачи Коши от начальных данных задачи.

2. Изолированные особенности гармонических функций. Теорема об устранимой особенности.