И. Н. Сергеев*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

Для заданного натурального n обозначим через $\mathcal{E}^n$ множество линейных однородных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0;\infty),$$

с *ограниченными непрерывными* коэффициентами

$$a_1, \ldots, a_n \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},$$

образующими строку $a \equiv (a_1, \ldots, a_n)$ (каждую такую строку будем отождествлять с соответствующим уравнением). Через $\mathcal{C}^n$ обозначим подмножество множества $\mathcal{E}^n$, состоящее из уравнений с *постоянными коэффициентами*. Пространство всех решений $y\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ обозначим через $\mathcal{S}(a)$, а подмножество всех его ненулевых решений — через $\mathcal{S}_*(a)$.

Вопросам *колеблемости* решений как линейных, так и нелинейных уравнений посвящено немало работ (см. библиографию в [4], а также, например, более поздние статьи [5] и [6]). С этими вопросами тесно связано

Определение 1. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *смена знака* функции $y\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные, так и отрицательные значения. Под величиной $\nu(y,t)$ или $\nu^0(y,t)$ будем понимать число смен знака или соответственно *нулей* функции y, принадлежащих промежутку $(0;t]$.

Через $\mathcal{S}_*$ обозначим множество всех непрерывных функций $y\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, для которых величина $\nu^0(y,t)$ конечна при любом $t > 0$, а кроме того, через $\mathcal{S}$ обозначим множество *допустимых* функций, получаемое добавлением к множеству $\mathcal{S}_*$ нулевой функции. Формулами

$$\nu(y) \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\nu(y,\pi t), \quad \nu^0(y) \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\nu^0(y,\pi t)$$

зададим (*характеристические*) *частоты* допустимой функции y: ее *частоту знаков* и соответственно *частоту нулей*.

Замечание 1. Любая функция $y \in \mathcal{S}_*$ обладает тем свойством, что для нее каждая точка смены знака — это нуль (но не наоборот), а потому она удовлетворяет *неравенствам*

$$0 \leqslant \nu(y,t) \leqslant \nu^0(y,t), \quad t > 0.$$

Замечание 2. Случай $n = 1$ по отношению к рассматриваемым частотам *вырожден*, так как любое ненулевое решение уравнения первого порядка не имеет нулей вовсе, а значит, справедливы равенства

$$\nu^0(y) = \nu(y) = 0, \quad y \in \mathcal{S}_*(a), \quad a \in \mathcal{E}^1.$$

Замечание 3. В случае $n > 1$ любое решение $y \in \mathcal{S}_*(a)$ любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ может иметь только *изолированные* нули, поэтому оно представляет собой заведомо допустимую функцию, а при переходе через точку своей смены знака по-настоящему меняет знак с одного на другой.

Функции из семейства $y_\omega(t) = \sin\omega t$, зависящего от параметра $\omega > 0$, можно считать *эталонными*, поскольку и частота нулей, и частота знаков функции y_ω равна задающему ее числу ω.

Вообще, частоту $\nu(y)$ или $\nu^0(y)$ можно интерпретировать как *верхнее среднее* (по всей полуоси $\mathbb{R}^+$) значение числа смен знака или соответственно числа нулей функции $y \in \mathcal{S}_*$ на полуинтервале длины π. Формально эти величины могли бы принимать и бесконечные значения, однако по отношению к уравнениям с ограниченными коэффициентами это опасение снимает

Теорема I. *Любое ненулевое решение y любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ имеет конечные частоты знаков и нулей, удовлетворяющие неравенствам*

$$0 \leqslant \nu(y) \leqslant \nu^0(y).$$

Замечание 4. Случай $n = 2$ обладает следующей особенностью: для любого решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ уравнения $a \in \mathcal{E}^2$ его нули и точки смены знака — это *одно и то же*, поскольку любой нуль $t > 0$ решения y есть обязательно и точка смены его знака (ср. замечание 1).

Еще одну особенность уравнений второго порядка отмечает

Теорема II. *При $n = 2$ все ненулевые решения какого-либо уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ имеют одну и ту же частоту знаков, совпадающую с частотой нулей.*

Эта теорема делает для уравнений второго порядка естественным

Определение 2. Частоту знаков или нулей любого ненулевого решения уравнения $a \in \mathcal{E}^2$ разрешим называть просто *частотой* уравнения a, обозначая ее через $\omega(a)$.

О том, насколько большим на самом деле может оказаться количество различных частот решений одного уравнения более чем второго порядка, пусть даже с постоянными коэффициентами, позволяет судить

Теорема III. *При $n = 4$ для любого $N > 0$ существует уравнение $a \in \mathcal{C}^n$, у которого как общее число частот знаков, так и общее число частот нулей различных ненулевых решений превышает N.*

Чтобы иметь возможность разобраться в обилии частот решений любого уравнения, дадим

Определение 3. Введем *главные* (*характеристические*) *частоты* линейного уравнения $a \in \mathcal{E}^n$: *главные частоты знаков* зададим формулами

$$\omega_{\bar{i}}(a) \equiv \inf_{L \in G_*^i(a)} \sup_{y \in L} \nu(y), \quad \omega_{\underline{i}}(a) \equiv \sup_{L \in G_*^{n-i+1}(a)} \inf_{y \in L} \nu(y),$$

а *главные частоты нулей* — формулами

$$\omega^0_{\bar{i}}(a) \equiv \inf_{L \in G_*^i(a)} \sup_{y \in L} \nu^0(y), \quad \omega^0_{\underline{i}}(a) \equiv \sup_{L \in G_*^{n-i+1}(a)} \inf_{y \in L} \nu^0(y),$$

где $i = 1, \ldots, n$, а через $G_*^i(a)$ обозначено множество i-мерных подпространств пространства $\mathcal{S}(a)$, в которых выколота нулевая точка (нулевое решение).

Введенные в определении 3 главные частоты уравнения отвечают за наличие у него подпространства решений заданной размерности, все ненулевые решения которого имеют частоты, не бóльшие или не меньшие заданного числа.

Например, если для уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ имеет место равенство $\omega^0_{\bar{i}}(a) = \omega$, то при любом $\varepsilon > 0$ частоты нулей всех ненулевых решений из некоторого i-мерного подпространства решений этого уравнения не превосходят $\omega+\varepsilon$, но ни при каком $\varepsilon > 0$ в пространстве решений уравнения a не найдется i-мерного подпространства решений с частотами нулей, не превосходящими $\omega - \varepsilon$.

Замечание 5. Использованная в определении 3 конструкция применялась и ранее, но к другим характеристикам решений. Например, если в формулах этого определения частоту решения y заменить его *верхним* или *нижним* (*характеристическим*) *показателем*

$$\bar{\chi}(y) \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln |y(t)|^{(n)} \quad \text{или} \quad \underline{\chi}(y) \equiv \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln |y(t)|^{(n)},$$

где

$$|y(t)|^{(n)} \equiv |y(t)| + \ldots + |y^{(n-1)}(t)|, \tag{1}$$

то те же формулы зададут показатели Ляпунова [3, 7]

$$\lambda_{\bar{\imath}}(a) = \lambda_{\underline{i}}(a) \equiv \lambda_i(a), \quad i = 1, \ldots, n,$$

уравнения a или соответственно показатели Перрона [14] $\pi_{\bar{\imath}}(a)$, $\pi_{\underline{i}}(a)$ уравнения a (точнее, линейной системы, к которой сводится это уравнение с помощью *канонической замены* переменных [1]), причем множество нижних, в отличие от верхних, показателей различных решений одного уравнения может достигать мощности континуума [9, 12].

Замечание 6. Если $a \in \mathcal{C}^n$, т. е. a — уравнение с постоянными коэффициентами, то показатели Ляпунова

$$\lambda_1(a) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(a) —$$

это упорядоченные по нестрогому возрастанию действительные части всех n корней *характеристического многочлена*, соответствующего уравнению a.

Для уравнения $a \in \mathcal{C}^n$ обозначим через $\Lambda_1(a), \ldots, \Lambda_n(a)$ все корни соответствующего ему характеристического многочлена, *упорядоченные* по нестрогому возрастанию модулей их мнимых частей

$$|\operatorname{Im}\Lambda_1(a)| \leqslant \ldots \leqslant |\operatorname{Im}\Lambda_n(a)|, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Роль введенных в определении 3 главных частот уравнения с постоянными коэффициентами раскрывает

Теорема IV. *Для любого уравнения $a \in \mathcal{C}^n$ имеют место равенства*

$$\omega_{\bar{\imath}}(a) = \omega_{\underline{i}}(a) = |\operatorname{Im}\Lambda_i(a)| = \omega^0_{\bar{\imath}}(a) = \omega^0_{\underline{i}}(a), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Следующие теоремы описывают свойства главных частот уравнений с *переменными* коэффициентами.

Теорема V. *Все главные частоты любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ конечны.*

Теорема VI. *Для любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ главные частоты знаков удовлетворяют соотношениям*

$$0 \leqslant \omega_{\bar{1}}(a) \leqslant \ldots \leqslant \omega_{\bar{n}}(a), \quad 0 \leqslant \omega_{\underline{1}}(a) \leqslant \ldots \leqslant \omega_{\underline{n}}(a),$$
$$\omega_{\underline{i}}(a) \leqslant \omega_{\bar{i}}(a), \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$\omega_{\underline{1}}(a) = \omega_{\bar{1}}(a) = \inf_{y \in \mathcal{S}_*(a)} \nu(y), \quad \omega_{\underline{n}}(a) = \omega_{\bar{n}}(a) = \sup_{y \in \mathcal{S}_*(a)} \nu(y), \tag{3}$$

а главные частоты нулей — аналогичным соотношениям, получающимся из выписанных заменой всюду буквы ω сочетанием ω^0.

Равенства последней теоремы позволяют дать

Определение 4. Величины (3) будем называть соответственно *младшей* и *старшей* частотами знаков уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, обозначив их соответственно через $\omega_1(a)$ и $\omega_n(a)$. Аналогично определим младшую $\omega_1^0(a)$ и старшую $\omega_n^0(a)$ часто́ты нулей уравнения $a \in \mathcal{E}^n$.

Хотя в последней теореме любое из неравенств иногда и обращается в равенство, но уже для уравнения третьего порядка каждое из этих неравенств может оказаться строгим, причем практически независимо друг от друга, о чем говорит

Теорема VII. *При $n = 3$ для каждой из следующих цепочек соотношений существует уравнение $a \in \mathcal{E}^n$, для которого она имеет место*:

$$0 < \omega_1(a) = \omega_1^0(a) = \omega_{\underline{2}}(a) = \omega_{\underline{2}}^0(a) < \omega_{\bar{2}}(a) = \omega_{\bar{2}}^0(a) = \omega_3(a) = \omega_3^0(a),$$
$$0 < \omega_1(a) = \omega_1^0(a) < \omega_{\underline{2}}(a) = \omega_{\underline{2}}^0(a) = \omega_{\bar{2}}(a) = \omega_{\bar{2}}^0(a) < \omega_3(a) = \omega_3^0(a),$$
$$0 < \omega_1(a) = \omega_1^0(a) = \omega_{\underline{2}}(a) = \omega_{\underline{2}}^0(a) < \omega_{\bar{2}}(a) = \omega_{\bar{2}}^0(a) < \omega_3(a) = \omega_3^0(a),$$
$$0 < \omega_1(a) = \omega_1^0(a) = \omega_{\underline{2}}(a) < \omega_{\underline{2}}^0(a) < \omega_{\bar{2}}(a) = \omega_{\bar{2}}^0(a) = \omega_3(a) = \omega_3^0(a),$$
$$0 < \omega_1(a) < \omega_1^0(a) = \omega_{\underline{2}}(a) = \omega_{\underline{2}}^0(a) = \omega_{\bar{2}}(a) = \omega_{\bar{2}}^0(a) < \omega_3(a) = \omega_3^0(a),$$
$$0 < \omega_1(a) = \omega_1^0(a) = \omega_{\underline{2}}(a) < \omega_{\underline{2}}^0(a) < \omega_{\bar{2}}(a) = \omega_{\bar{2}}^0(a) < \omega_3(a) = \omega_3^0(a),$$
$$0 = \omega_1(a) < \omega_1^0(a) = \omega_{\underline{2}}(a) = \omega_{\underline{2}}^0(a) < \omega_{\bar{2}}(a) = \omega_{\bar{2}}^0(a) = \omega_3(a) = \omega_3^0(a).$$

Последние четыре цепочки в предыдущей теореме дополнительно показывают, что строгими бывают также и некоторые из неравенств следующей теоремы.

Теорема VIII. *Главные частоты любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ удовлетворяют неравенствам*

$$\omega_{\bar{i}}(a) \leqslant \omega^0_{\bar{i}}(a), \quad \omega_{\underline{i}}(a) \leqslant \omega^0_{\underline{i}}(a), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Каждую из главных частот линейного уравнения рассмотрим как функционал на *линейном топологическом* пространстве $\mathcal{E}^n$ с естественными для функций линейными операциями и *равномерной* на $\mathbb{R}^+$ топологией, задаваемой *нормой*

$$\|a\| = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |a(t)| \equiv \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \sqrt{a_1^2(t) + \ldots + a_n^2(t)}, \quad a \in \mathcal{E}^n.$$

Исходя из такого взгляда на главные частоты, можно изучать их непрерывность, которая означает их *устойчивость* к малым возмущениям коэффициентов $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, причем, возможно, сразу всех и сразу при всех $t \in \mathbb{R}^+$.

Замечание 7. С этой точки зрения уже изучались [11] показатели Ляпунова линейных уравнений, чему предшествовало бурное развитие *теории характеристических показателей* линейных систем (см. монографию [3], а также, например, работы [7—9] и обзор [10]).

Очередную особенность уравнений второго порядка подчеркивает

Теорема IX. *При $n = 2$ частота ω непрерывна в любой точке $a \in \mathcal{E}^n$.*

Исследование устойчивости главных частот уравнений более чем второго порядка делает содержательным

Теорема X. *При $n = 3$ каждая из главных частот разрывна хотя бы в одной точке $a \in \mathcal{E}^n$.*

Подпространство $\mathcal{C}^n \subset \mathcal{E}^n$ можно рассматривать и как самостоятельное топологическое пространство с той же (индуцированной) топологией, благодаря чему может быть сформулирована

Теорема XI. *Сужение любой из главных частот на топологическое подпространство $\mathcal{C}^n \subset \mathcal{E}^n$ есть непрерывная функция.*

Следующий класс (рассматривавшийся ранее [13] в связи с разрывностью показателей Ляпунова линейных систем) так называемых бесконечно малых возмущений коэффициентов уравнения в определенном смысле более узок, чем класс равномерно малых возмущений, но все же достаточно содержателен.

Определение 5. Для уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ обозначим через $\mathcal{B}(a)$ множество уравнений $b \in \mathcal{E}^n$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \to \infty} |b(t) - a(t)| = 0,$$

при котором возмущение $b - a$ назовем *бесконечно малым*. Скажем, что функционал, определенный на $\mathcal{E}^n$, *инвариантен в точке* $a \in \mathcal{E}^n$ относительно бесконечно малых возмущений, если его сужение на множество $\mathcal{B}(a)$ есть константа.

Свойства инвариантности частот относительно бесконечно малых возмущений аналогичны описанным выше свойствам их непрерывности.

Теорема XII. *При $n = 2$ частота ω инвариантна относительно бесконечно малых возмущений в любой точке $a \in \mathcal{E}^n$.*

Теорема XIII. *При $n = 3$ каждая из главных частот хотя бы в одной точке $a \in \mathcal{E}^n$ не инвариантна относительно бесконечно малых возмущений.*

Последняя из сформулированных теорем позволяет несколько усилить утверждение о разрывности главных частот уравнений третьего порядка, а именно верна

Теорема XIV. *При $n = 3$ каждая из главных частот хотя бы в одной точке $a \in \mathcal{E}^n$ не является полунепрерывной сверху и хотя бы в одной точке $a \in \mathcal{E}^n$ не является полунепрерывной снизу.*

Перечисленные теоремы в основном анонсированы в докладах [15, 16] (обозначения и терминология в них слегка отличаются от принятых здесь), к которым примыкает и доклад [17]. Ниже приводятся их доказательства, сопровождаемые рядом вспомогательных утверждений (лемм и следствий), имеющих независимую сквозную нумерацию.

§ 1. СВЕДЕНИЯ О ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Как известно [1], любое уравнение $a \in \mathcal{E}^n$ с помощью канонической замены $x = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$ сводится к линейной системе

$$\dot{x} = A(t)x$$

с матрицей, составленной из нулей, единиц и коэффициентов уравнения a, взятых с обратными знаками.

Лемма 1. *Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $d > 0$ существует такое $c > 0$, что если $a \in \mathcal{E}^n$ и $\|a\| < d$, то оператор Коши $X(\cdot,\cdot)$, соответствующей этому уравнению линейной системы, удовлетворяет оценке*

$$\|X(t,t_0) - E\| \leqslant c(t - t_0) \cdot e^{c(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0,$$

где E — единичная матрица.

Доказательство. В силу оценки

$$\|A\| \leqslant c \equiv n^2 \cdot \max\{1, d\}$$

для нормы матрицы A (соответствующей уравнению a) при всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ получаем [3] оценку

$$\|X(t, t_0)\| \leqslant e^{c(t-t_0)}, \tag{4}$$

откуда

$$|(X(t, t_0) - E)x(t_0)| = \left| \int_{t_0}^{t} A(\tau)X(\tau, t_0)\, d\tau \cdot x(t_0) \right| \leqslant c(t - t_0) \cdot e^{c(t-t_0)}|x(t_0)|.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, числа $\beta > 0$ и числа $T > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если уравнение $b \in \mathcal{E}^n$ удовлетворяет условию $\|b - a\| < \delta$, то операторы Коши $X(\cdot, \cdot)$ и $Z(\cdot, \cdot)$ линейных систем*

$$\dot{x} = A(t)x \quad \text{и} \quad \dot{z} = B(t)z,$$

к которым с помощью канонической замены сводятся уравнения a и b соответственно, удовлетворяют оценке

$$\|Z(t, t_0)X(t_0, t) - E\| < \beta, \quad 0 \leqslant t_0 < t \leqslant t_0 + T,$$

где E — единичная матрица.

Доказательство. К уравнению

$$\dot{z} = A(t)z + f(t, z), \quad f(t, z) \equiv (B(t) - A(t))z,$$

применима формула вариации постоянной [1], из которой получаем

$$Z(t, t_0) = X(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t, \tau)(B(\tau) - A(\tau))Z(\tau, t_0)\, d\tau,$$

откуда, с учетом оценок

$$\|A\| \leqslant c \equiv n^2 \max\{1, \|a\|\}, \quad \|B - A\| \leqslant n^2\|b - a\| < \delta n^2 \leqslant c, \quad \|B\| \leqslant 2c$$

и (4), при $t - t_0 \leqslant T$ имеем

$$\|Z(t, t_0) - X(t, t_0)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} X(t, \tau)(B(\tau) - A(\tau))Z(\tau, t_0)\, d\tau \right\| \leqslant \delta n^2 T e^{3cT},$$

$$\|Z(t,t_0)X(t_0,t)-E\|\leqslant\|Y(t,t_0)-X(t,t_0)\|\cdot\|X(t_0,t)\|\leqslant\delta n^2Te^{4cT}<\beta,$$

как только

$$\delta<\min\left\{\frac{c}{n^2},\frac{\beta}{n^2Te^{4cT}}\right\}.$$

Лемма 2 доказана.

§ 2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЧАСТОТ

Доказательство теоремы VI. Пусть задано уравнение $a\in\mathcal{E}^n$.

1. Если $1\leqslant i<j\leqslant n$, то для каждого $L\in G_*^j(a)$ существует такое $M_L\in G_*^i(a)$, что выполнено включение $M_L\subset L$ и, стало быть, неравенство

$$\sup_{y\in L}\nu(y)\geqslant\sup_{y\in M_L}\nu(y)\geqslant\inf_{M\in G_*^i(a)}\sup_{y\in M}\nu(y),$$

беря от обеих частей которого точную нижнюю грань по $L\in G_*^j(a)$, получаем требуемое соотношение

$$\omega_{\bar{j}}(a)=\inf_{L\in G_*^j(a)}\sup_{y\in L}\nu(y)\geqslant\inf_{M\in G_*^i(a)}\sup_{y\in M}\nu(y)=\omega_{\bar{\imath}}(a),$$

и для каждого $L\in G_*^{n-i+1}(a)$ найдется такое $M_L\in G_*^{n-j+1}(a)$, что $M_L\subset L$, откуда аналогично получаем

$$\omega_{\underline{i}}(a)=\sup_{L\in G_*^{n-i+1}(a)}\inf_{y\in L}\nu(y)\leqslant\sup_{M\in G_*^{n-j+1}(a)}\inf_{y\in M}\nu(y)=\omega_{\underline{j}}(a).$$

2. Если $1\leqslant i\leqslant n$, то для каждых $L\in G_*^i(a)$ и $M\in G_*^{n-i+1}(a)$ имеем условие $L\cap M\neq\varnothing$, а с ним и неравенство

$$\sup_{y\in L}\nu(y)\geqslant\inf_{y\in M}\nu(y),$$

беря от обеих частей которого точную нижнюю грань по $L\in G_*^i(a)$ и верхнюю по $M\in G_*^{n-i+1}(a)$, получаем требуемое соотношение

$$\omega_{\bar{\imath}}(a)=\inf_{L\in G_*^i(a)}\sup_{y\in L}\nu(y)\geqslant\sup_{M\in G_*^{n-i+1}(a)}\inf_{y\in M}\nu(y)=\omega_{\underline{i}}(a).$$

3. В случае $i=1$ обе части последнего неравенства превращаются в точную нижнюю грань величины $\nu(y)$ по всем $y\in\mathcal{S}_*(a)$, поскольку

тогда $M = \mathcal{S}_*(a)$ и размерность пространства L (с выколотым нулем) равна 1, а значит, $\nu(y_1) = \nu(y_2)$ для любых $y_1, y_2 \in L$. В случае $i = n$ получаем такую же, но верхнюю грань.

4. Аналогично устанавливаются соотношения между главными частотами нулей уравнения a.

Теорема VI доказана.

Замечание 8. В доказательстве теоремы нигде не использовались никакие свойства функционала ν (кроме равенства $\nu(cy) = \nu(y)$, $c \neq 0$) и даже *конечность* его значений — формально они могли быть и символами $\pm\infty$. Более того, не использовались также и какие-либо специальные свойства линейного пространства $\mathcal{S}(a)$, которые, и вправду, не играют роли, как показывает

Лемма 3. *Если для уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ отображение $\varphi_a\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{S}(a)$ осуществляет изоморфизм линейных пространств, то справедливы формулы*

$$\omega_{\bar{\imath}}(a) \equiv \inf_{L \in G_*^i} \sup_{c \in L} \nu(\varphi_a(c)), \quad \omega_{\underline{i}}(a) \equiv \sup_{L \in G_*^{n-i+1}} \inf_{c \in L} \nu(\varphi_a(c)),$$
$$\omega^0_{\bar{\imath}}(a) \equiv \inf_{L \in G_*^i} \sup_{c \in L} \nu(\varphi_a(c)), \quad \omega^0_{\underline{i}}(a) \equiv \sup_{L \in G_*^{n-i+1}} \inf_{c \in L} \nu(\varphi_a(c)),$$

где $i = 1, \ldots, n$, а через G_*^i обозначено множество i-мерных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$, в которых выколот нулевой вектор.

Доказательство сводится к проверке того, что отображение φ_a для каждого $i = 1, \ldots, n$ порождает также и изоморфизм множеств G_*^i и $G_*^i(a)$, который делает формулы леммы 3 и определения 3, по существу, одинаковыми.

Определение 6. Назовем $[\alpha; \beta] \subset \mathbb{R}^+$ отрезком *неосцилляции* для уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, если на нем любое решение $y \in \mathcal{S}_*(a)$ имеет менее n нулей.

Замечание 9. Определение отрезка неосцилляции следовало бы слегка модифицировать [4], потребовав, чтобы на нем было менее n нулей, даже с учетом их *кратности*. Но и после указанного изменения (несущественного с точки зрения настоящего исследования) также была бы справедлива следующая лемма, идея доказательства которой подсказана автору В. А. Кондратьевым (см. разложение Пойа—Маммана [4]).

Лемма 4. *Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $d \geqslant 0$ существует такое $l = l_n(d) > 0$, что для любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, удовлетворяющего условию $\|a\| \leqslant d$, любой отрезок $J \subset \mathbb{R}^+$ длины l есть отрезок неосцилляции.*

Доказательство проведем индукцией по $n \in \mathbb{N}$.

1. При $n = 1$ утверждение верно уже при любом значении $l > 0$ (замечание 2).

2. Докажем утверждение леммы для заданного значения $n > 1$, считая его уже доказанным для предыдущего значения.

А. Пусть $y \in \mathcal{S}_*(a)$ — произвольное решение уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, удовлетворяющего условию $\|a\| < d$.

Б. Выберем такое значение $l' > 0$ (зависящее только от чисел n и d), что для любого $t_0 \in \mathbb{R}^+$ на отрезке $[t_0; t_0 + l']$ решение y_0 уравнения a, определяемое начальными условиями

$$y_0(t_0) = 2,\ \dot{y}_0(t_0) = 0, \ldots,\ y_0^{(n-1)}(t_0) = 0,$$

больше 1, а все его производные до $(n-1)$-го порядка по модулю не превосходят 1 (что достигается малостью величины $|y_0(t) - y_0(t_0)|^{(n)}$; см. равенство (1) и лемму 1).

В. Если сделать в исходном уравнении замену $y = zy_0$, то для функции z получится [1] уравнение b, также линейное, n-го порядка, с коэффициентом $b_n = 0$ (поскольку $1 \in \mathcal{S}(b)$). Остальные коэффициенты $b_1, \ldots, b_{n-1}$ будут представлять собой стандартные линейные комбинации выражений $\dot{y}_0/y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}/y_0$ с коэффициентами, являющимися стандартными (зависящими только от n) линейными комбинациями коэффициентов уравнения a. Поэтому найдется такое число $d' > 0$ (зависящее только от n и d), что $\|b\| \leqslant d'$. Функция $u = \dot{z}$ — решение линейного уравнения $b' = (b_1, \ldots, b_{n-1})$, уже $(n-1)$-го порядка, также удовлетворяющего условию $\|b'\| \leqslant d'$.

Г. Положим $l \equiv \min\{l', l_{n-1}(d')\}$. Тогда для любого $t_0 \in \mathbb{R}^+$ на отрезке $[t_0; t_0 + l]$ функция y не может иметь n (или более) нулей, поскольку иначе на этом отрезке функция z также имела бы не менее n нулей, а функция u — не менее $n - 1$ нулей (по теореме Ролля), что противоречило бы предположению индукции.

Лемма 4 доказана.

К определению 1 добавим обозначения

$$\nu(y,t,s) \equiv \nu(y,t) - \nu(y,s), \quad \nu^0(y,t,s) \equiv \nu^0(y,t) - \nu^0(y,s) \qquad (5)$$

для числа смен знака и соответственно числа нулей функции y *на промежутке* $(s,t]$ (при $t > s$).

Лемма 5. *Для любого решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ при любом $T > 0$ справедливы равенства*

$$\nu(y) = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{\pi}{mT}\nu(y, mT), \quad \nu^0(y) = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{\pi}{mT}\nu^0(y, mT)$$

и цепочки неравенств

$$\nu(y,s+T,s) \leqslant \nu^0(y,s+T,s) \leqslant p_n(\|a\|,T) \equiv \equiv (n-1)\left(1+\frac{T}{l_n(\|a\|)}\right), \tag{6}$$

$$\nu(y) \leqslant \nu^0(y) \leqslant \frac{\pi(n-1)}{l_n(\|a\|)} \tag{7}$$

(*см. лемму* 4).

Доказательство. 1. Цепочка неравенств (6) получается из того, что полуинтервал длины T можно покрыть $m = 1 + T/l_n(\|a\|)$ непересекающимися полуинтервалами длины $l_n(\|a\|)$, на каждом из которых, по лемме 4, решение имеет не более чем $n-1$ нулей и не более того (см. замечание 1) точек смены знака.

2. Далее, обозначив $m(t) \equiv [t/T] \in \mathbb{Z}$, получим

$$\nu(y) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\nu(y,\pi t)}{t} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi\nu(y,t)}{t} = = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\pi\nu(y,mT)}{mT} \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{m(t)T}{t} + \pi \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{\nu(y,t,m(t)T)}{t} = = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\pi\nu(y,mT)}{mT},$$

так как существуют пределы

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)T}{t} = 1, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\nu(y,t,m(t)T)}{t} \leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{n-1}{t}\left(\frac{T}{l_n(\|a\|)}\right) = 0.$$

Аналогично получается и второе из доказываемых равенств.

3. Наконец, положив $T = l_n(\|a\|)$, с помощью уже доказанной выше цепочки неравенств выведем цепочку (7):

$$\nu(y) \leqslant \nu^0(y) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\pi\nu^0(y,mT)}{mT} \leqslant \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\pi m(n-1)}{mT} = \frac{\pi(n-1)}{l_n(\|a\|)}.$$

Лемма 5 доказана.

Доказательство теорем I, V и VIII завершается теперь непосредственным применением определения 3 к цепочке неравенств (7).

Лемма 6. *Пусть последовательность положительных чисел*

$$t_1 < t_2 < \ldots$$

удовлетворяет условиям

$$\lim_{m\to\infty} t_m = \infty, \quad \lim_{m\to\infty} \frac{t_{m+1}}{t_m} = 1. \tag{8}$$

Тогда для любой функции $y \in \mathcal{S}_*$ *выполнены равенства*

$$\nu(y) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\pi}{t_m}\nu(y,t_m), \quad \nu^0(y) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\pi}{t_m}\nu^0(y,t_m),$$

а при дополнительном условии

$$\lim_{m\to\infty} (t_{m+1} - t_m) = \infty, \tag{9}$$

влекущем соотношения

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{t_m} = 0, \quad \inf_{m\in\mathbb{N}} (t_{m+1} - t_m) \equiv T > 0,$$

верно еще и следующее: если для некоторого числа $p \geqslant 0$ *в последнем пределе каждое из чисел* t_m *уменьшить на* $T_m \leqslant mT$, *а каждое из чисел* $\nu(y,t_m)$ *— на* $p_m \leqslant mp$, *то значение предела от этого не изменится.*

Доказательство. Временно обозначим через L правую часть первого из доказываемых равенств (для частоты знаков).

1. Благодаря условиям (8) можно каждое значение $t > t_1$ заключить в свои границы $t_m < t \leqslant t_{m+1}$ и записать цепочку оценок

$$\begin{gathered}
\nu(y) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi\nu(y,t)}{t} \geqslant \\
\geqslant \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\pi\nu(y,t_m)}{t_{m+1}} = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\pi\nu(y,t_m)}{t_{m+1}} \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{t_{m+1}}{t_m} = L = \\
= \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\pi\nu(y,t_{m+1})}{t_{m+1}} \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{t_{m+1}}{t_m} = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\pi\nu(y,t_{m+1})}{t_m} \geqslant \\
\geqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi\nu(y,t)}{t} = \nu(y),
\end{gathered}$$

в которой все неравенства обращаются в равенства, откуда $\nu(y) = L$.

2. Из условия (9) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ при каждом $m \in \mathbb{N}$ начиная с некоторого m_0 имеет место оценка $t_{m+1} - t_m > 1/\varepsilon$, а с ней и оценка для предела

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{t_m} = \lim_{m\to\infty} \frac{m}{t_{m_0} + (t_m - t_{m_0})} \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{m}{t_{m_0} + (m - m_0)/\varepsilon} = \varepsilon,$$

который вследствие произвольности числа ε равен нулю.

3. Таким образом, при выполнении обоих условий (8) и (9) справедливо равенство

$$\varlimsup_{m\to\infty} \frac{\nu(y,t_m)-p_m}{t_m-T_m} = \frac{\varlimsup\limits_{m\to\infty} \frac{\nu(y,t_m)}{t_m} - \lim\limits_{m\to\infty} \frac{p_m}{t_m}}{1-\lim\limits_{m\to\infty} \frac{T_m}{t_m}} = L,$$

поскольку второй предел в числителе (как и в знаменателе) равен нулю.

4. Для частоты нулей утверждения настоящей леммы доказываются аналогично.

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть $y, z \in \mathcal{S}_*$, тогда*:

1) *если строго между любыми двумя точками смены знака функции y есть хотя бы одна точка смены знака функции z, то $\nu(z) \geqslant \nu(y)$, а если строго между любыми двумя нулями функции y есть хотя бы один нуль функции z, то $\nu^0(z) \geqslant \nu^0(y)$;*
2) *если $z = \dot{y}$, то $\nu(z) \geqslant \nu(y)$ и $\nu^0(z) \geqslant \nu^0(y)$.*

Доказательство. 1. При первом предположении леммы для точек смены знака (для нулей — аналогично) имеем

$$\nu(z) = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi\nu(z,t)}{t} \geqslant \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi(\nu(y,t)-1)}{t} = \nu(y) - \lim_{t\to\infty} \frac{\pi}{t} = \nu(y),$$

так как последний из выписанных пределов равен нулю.

2. Пусть $y, z \in \mathcal{S}_*$ и $z = \dot{y}$, тогда:

а) все нули (а тем более точки смены знака) функции y изолированы и, по теореме Ролля, строго между ее соседними нулями имеется нуль функции z;

б) возьмем любой интервал I с концами в соседних точках смены знака функции y. На нем имеется не менее одного нуля функции z, причем хотя бы в одном из них происходит смена знака функции z (в противном случае функция z имела бы фиксированный знак на всем интервале I, за исключением своих нулей, а тогда функция y была бы строго монотонной на I, что невозможно, так как она обнуляется на его концах).

Таким образом, мы оказались полностью в условиях предыдущего пункта настоящей леммы, следовательно, оба доказываемых неравенства выполнены.

Лемма 7 доказана.

Определение 7. Для заданных множеств M и $F = \{f\colon \mathbb{R}^+ \to M\}$ назовем функционал $\lambda\colon F \to \mathbb{R}$ *остаточным*, если для любых функций $f, g \in F$, удовлетворяющих хотя бы при одном $t_0 \in \mathbb{R}^+$ условию $f(t) = g(t)$, $t \geqslant t_0$, имеет место равенство $\lambda(f) = \lambda(g)$.

Это определение дано в [13], где фактически доказана

Лемма 8. *Если остаточный функционал, определенный на $\mathcal{E}^n$, полунепрерывен во всех точках в одном и том же смысле, то в любой точке $a \in \mathcal{E}^n$ он инвариантен относительно бесконечно малых возмущений (см. определение 5).*

Лемма 9. *Функционалы $\nu, \nu^0\colon \mathcal{S}_* \to \mathbb{R}$, а для любого $n \in \mathbb{N}$ еще и при каждом $i = 1, \ldots, n$ функционалы $\omega_{\bar{\imath}}, \omega_{\underline{i}}, \omega^0_{\bar{\imath}}, \omega^0_{\underline{i}}\colon \mathcal{E}^n \to \mathbb{R}$ остаточны.*

Доказательство. 1. Пусть функции $y, z \in \mathcal{S}_*$ удовлетворяют при $t \geqslant t_0$ условию $y(t) = z(t)$. Тогда для функции ν (и аналогично для функции ν^0) верны равенства

$$\nu(z) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi\nu(z,t)}{t} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi\nu(y,t)}{t} + \lim_{t\to\infty} \frac{\pi(\nu(z,t_0) - \nu(y,t_0))}{t} = \nu(y)$$

(см. обозначение (5)), так как последний из выписанных пределов равен нулю.

2. Пусть теперь уравнения $a, b \in \mathcal{E}^n$ удовлетворяют при $t \geqslant t_0$ условию $a(t) = b(t)$. Рассмотрим изоморфизмы $\varphi_a\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{S}(a)$ и $\varphi_b\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{S}(b)$ линейных пространств, действующие по правилу: вектору $c \in \mathbb{R}^n$ ставится в соответствие решение соответствующего уравнения с начальными условиями $(y(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0)) = c$. Каждый из функционалов ν и ν^0, в силу их остаточности, для любого $c \in \mathbb{R}^n$ принимает одинаковые значения на решениях $\varphi_a(c) \in \mathcal{S}(a)$ и $\varphi_b(c) \in \mathcal{S}(b)$ (совпадающих при $t \geqslant t_0$ из-за совпадения самих уравнений). Поэтому, согласно лемме 3, наборы всех главных частот уравнений a и b идентичны.

Лемма 9 доказана.

Следствие 10. *Характеристическая частота нулей функции, имеющей на $\mathbb{R}^+$ конечное число нулей, равна нулю.*

Доказательство. Если изменить такую функцию на конечном участке так, чтобы она не имела нулей вовсе, то ее частота нулей станет равной нулю, хотя в силу леммы 9 и не изменится.

§ 3. УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть теперь $n = 2$. Пользуясь замечанием 4, мы будем говорить только о нулях решений уравнений второго порядка, предполагая, что речь идет также и о точках смены знака.

Доказательство теоремы II. Про нули любых двух ненулевых решений y, z одного уравнения $a \in \mathcal{E}^2$ известно [1], что они либо полностью совпадают, либо строго перемежаются, поэтому равенство $\nu(y) = \nu(z)$ получается соответственно либо сразу, либо из двух неравенств $\nu(z) \geqslant \nu(y)$ и $\nu(y) \geqslant \nu(z)$, выполненных в силу леммы 7.

Лемма 11. *С любым ненулевым решением y любого уравнения $a \in \mathcal{E}^2$ можно связать непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, значение которой в точке t равно некоторому значению угла, образуемого вектором $(y(t), \dot{y}(t))$ с положительным направлением оси абсцисс (отсчитываемого на плоскости $\mathbb{R}^2$ против часовой стрелки) и которая обладает следующими свойствами:*

1) *точка s является нулем решения y тогда и только тогда, когда выполнено равенство $\operatorname{ctg}\varphi(s) = 0$;*
2) *если точка s является нулем решения y, то $\dot{\varphi}(s) < 0$;*
3) *если $s_1 < s_2$ — соседние нули решения y, то $\varphi(s_2) = \varphi(s_1) - \pi$.*

Доказательство (см. [2]). Существование функции φ следует из непрерывной дифференцируемости функции $x \equiv (x_1, x_2) = (y, \dot{y})$, не принимающей нулевых значений.

Равенство $x_1(s) = 0$ (при котором автоматически $x_2(s) \neq 0$) равносильно равенству

$$\operatorname{ctg}\varphi(s) \equiv \frac{x_1(s)}{x_2(s)} = 0,$$

причем если оно выполнено, то

$$\frac{d}{dt}\operatorname{ctg}\varphi(t)\Big|_{t=s} = \frac{\dot{x}_1(s)x_2(s) - x_1(s)\dot{x}_2(s)}{x_2^2(s)} = \frac{x_2^2(s)}{x_2^2(s)} = 1 > 0,$$

а значит, $\dot{\varphi}(s) < 0$.

Наконец, для нуля s_2 функции $\operatorname{ctg}\varphi(t)$, соседнего с нулем s_1 и большего, чем он, в силу непрерывности функции φ имеется три возможности: либо $\varphi(s_2) = \varphi(s_1)$, либо $\varphi(s_2) = \varphi(s_1) + \pi$, либо $\varphi(s_2) = \varphi(s_1) - \pi$. Однако первые две отпадают, поскольку вследствие неравенств $\dot{\varphi}(s_1), \dot{\varphi}(s_2) < 0$ обе они предполагают выполнение при достаточно малом $\varepsilon > 0$ оценок

$$\varphi(s_2 - \varepsilon) > \varphi(s_2) \geqslant \varphi(s_1) > \varphi(s_1 + \varepsilon),$$

из которых вытекает, что в некоторой точке интервала $(s_1+\varepsilon; s_2-\varepsilon)$ функция φ принимает промежуточное между $\varphi(s_1+\varepsilon)$ и $\varphi(s_2-\varepsilon)$ значение $\varphi(s_1)$, т. е. нули s_1 и s_2 не соседние.

Лемма 11 доказана.

Доказательство теорем IX и XII. 1. Пусть заданы уравнение $a\in\mathcal{E}^2$ и вспомогательное положительное число $\beta<1$. По произвольному числу $T>0$ в соответствии с леммой 2 можно выбрать такое число $\delta>0$, чтобы для любого уравнения $b\in\mathcal{E}^2$, удовлетворяющего условию $\|b-a\|<\delta$, операторы Коши $X(\cdot,\cdot)$ и $Z(\cdot,\cdot)$ линейных систем, соответствующих уравнениям a и b, удовлетворяли оценке

$$\|Z(t,t_0)X(t_0,t)-E\|<\beta, \quad 0\leqslant t_0<t\leqslant t_0+\pi T.$$

2. Возьмем произвольное уравнение $b\in\mathcal{E}^2$, удовлетворяющее условию $\|b-a\|<\delta$, и произвольное решение $y\in\mathcal{S}_*(b)$. На каждом полуинтервале

$$I_k\equiv(\pi(k-1)T;\pi kT], \quad k\in\mathbb{N},$$

выберем решение $y_k\in\mathcal{S}_*(a)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y_k(t_k)=y(t_k), \quad \dot{y}_k(t_k)=\dot{y}(t_k), \quad t_k\equiv\pi(k-1)T.$$

Тогда соответствующие решениям y_k и y решения $x_k=(y_k,\dot{y}_k)$ и $z=(y,\dot{y})$ линейных систем, в силу сделанного выше выбора числа δ, будут удовлетворять неравенству

$$|z(t)-x_k(t)|=|(Z(t,t_k)X(t_k,t)-E)x_k(t)|\leqslant\beta|x_k(t)|, \quad t\in I_k.$$

3. Временно фиксируем число $k\in\mathbb{N}$. В соответствии с леммой 11 свяжем с решением y_k непрерывную функцию $\varphi\colon I_k\to\mathbb{R}$, а с решением y — аналогичную функцию ψ, причем подчиним последнюю условию $\psi(t_k)=\varphi(t_k)$ (естественному в силу равенства $z(t_k)=x_k(t_k)$). Тогда будет иметь место оценка

$$\sin|\psi(t)-\varphi(t)|\leqslant\frac{|z(t)-x_k(t)|}{|x_k(t)|}\leqslant\beta<1, \quad t\in I_k,$$

из которой получается неравенство

$$|\psi(t)-\varphi(t)|\leqslant\arcsin\beta\equiv\gamma<\frac{\pi}{2}, \quad t\in I_k. \tag{10}$$

4. Пусть $s_1<\ldots<s_m$ — последовательность всех нулей функции $\operatorname{ctg}\varphi$ на промежутке I_k, на котором (по лемме 11) функция φ принимает

значения вида $\varphi(s_1)+\pi(j-1)$ при $j=1,\ldots,m$ и ни при каких $j\in\mathbb{Z}$ больше. Тогда непрерывная функция ψ, в силу неравенства (10), на том же промежутке обязательно принимает значения того же вида при $j=2,\ldots,m-1$, а дополнительно может принимать какие-то из них только еще при $j=0,1,m,m+1$. Это и будут все нули функции $\operatorname{ctg}\psi$, поэтому

$$|\nu(y,kT,(k-1)T)-\nu(y_k,kT,(k-1)T)|\leqslant 2.$$

5. Фиксируем какое-либо решение $y_0\in\mathcal{S}_*(a)$. Тогда из того [1], что на промежутке I_k его нули либо совпадают, либо строго перемежаются с нулями решения $y_k\in\mathcal{S}_*(a)$, имеем неравенство

$$|\nu(y_0,kT,(k-1)T)-\nu(y_k,kT,(k-1)T)|\leqslant 1,$$

а с учетом предыдущего — еще одно:

$$|\nu(y_0,kT,(k-1)T)-\nu(y,kT,(k-1)T)|\leqslant 3.$$

6. Далее, с помощью леммы 5 (см. также обозначение (5) и определение 4) получаем оценку как с одной стороны:

$$\omega(b)=\nu(y)=\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{mT}\nu(y,mT)=\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{mT}\sum_{k=1}^{m}\nu(y,kT,(k-1)T)\geqslant$$

$$\geqslant\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{mT}\sum_{k=1}^{m}(\nu(y_0,kT,(k-1)T)-3)=\nu(y_0)+\frac{3}{T}=\omega(a)+\frac{3}{T},$$

так и, аналогично, с другой стороны:

$$\omega(b)\leqslant\omega(a)-\frac{3}{T}.$$

7. Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ (дополнительно возьмем и число $T>3/\varepsilon$, которое до сих пор было произвольным) существует такое $\delta>0$, что для любого уравнения $b\in\mathcal{E}^2$, удовлетворяющего условию $\|b-a\|<\delta$, выполняется неравенство

$$|\omega(b)-\omega(a)|\leqslant\frac{3}{T}<\varepsilon.$$

Это и означает непрерывность функции ω в точке $a\in\mathcal{E}^2$.

8. Согласно лемме 8, из непрерывности остаточного (лемма 9) функционала ω следует и его инвариантность относительно бесконечно малых возмущений в любой точке $a\in\mathcal{E}^2$.

Теоремы IX и XII доказаны.

§ 4. УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Доказательство теоремы III. 1. При каждом $\mu = 5, 9, 13, \ldots$ рассмотрим уравнение $a_\mu \in \mathcal{C}_4$ с характеристическим многочленом $(\lambda^2+1)(\lambda^2+\mu^2)$, имеющим корни $\pm i$, $\pm\mu i$. Среди решений этого уравнения выделим семейство функций

$$y_c(t) = (1-c)\sin t + c\sin\mu t, \quad c \in \mathbb{R},$$

для которого по лемме 5 имеем

$$\nu^0(y_1) = \nu(y_1) = \nu(\sin\mu t) = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{\mu}{m}\nu\left(\sin\mu t, m\frac{\pi}{\mu}\right) = \mu,$$
$$\nu^0(y_0) = \nu(y_0) = \nu(\sin t) = 1.$$

2. Меняя непрерывно параметр c от 0 до 1, получим среди значений каждой из величин $\nu(y_c)$ и $\nu^0(y_c)$ заведомо все числа $1, 5, 9, \ldots, \mu$ (при плавном увеличении параметра $c \in [0;1]$ на полупериоде $(0;\pi]$ функции y_c регулярно повторяется следующее изменение: сначала появляется пара новых нулей — точек касания графиком оси абсцисс, симметричных относительно точки $\pi/2$, а затем каждый из них раздваивается, превращаясь в пару новых точек смены знака).

3. Таким образом, общее число частот знаков, как и частот нулей, реализуемых на различных решениях уже из выделенного семейства решений, заведомо превзойдет при надлежащем выборе числа μ любое наперед заданное число N.

Теорема III доказана.

Определение 8. Для заданного целого $k \geqslant 0$ обозначим через $\Phi(k)$ множество функций (будем называть их функциями *степени меньше* k), представимых в виде линейной комбинации конечного числа выражений вида

$$e^{-\varepsilon t}t^j\cos(\beta t+\gamma), \quad \varepsilon, j, \beta \geqslant 0, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

где либо $\varepsilon > 0$, либо $\varepsilon = 0$, но тогда $j < k$, а если $\beta = 0$, то и $\gamma = 0$. Если, кроме того, в указанном представлении каждое из выражений (11) удовлетворяет неравенству $\beta > 0$, то функцию степени меньше k дополнительно назовем *колеблющейся*, а множество таких функций обозначим через $\tilde{\Phi}(k)$.

Лемма 12. *Для множеств* $\Phi(k)$ *и* $\tilde{\Phi}(k)$, *каждое из которых при любом* $k \in \mathbb{R}$ *образует линейное пространство, справедливы утверждения*:

1) *если* $\varphi \in \Phi(k)$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi}{t^k} = 0$;
2) *если* $\varphi \in \Phi(k)$, *то* $\dot\varphi \in \Phi(k)$;
3) *если* $\varphi = t^k \cos(\beta t + \gamma)$, *то при некотором* $\gamma' \in \mathbb{R}$
$$(\dot\varphi - \beta t^k \cos(\beta t + \gamma')) \in \Phi(k);$$
4) *если* $\varphi \in \tilde\Phi(k)$, *то при некотором* $c \in \mathbb{R}$
$$\left(\int\limits_1^t \varphi(\tau)\,d\tau + c\right) \in \tilde\Phi(k);$$
5) *если* $\beta > 0$ *и* $\varphi = t^k \cos(\beta t + \gamma)$, *то при некоторых* $c \in \mathbb{R}$ *и* $\gamma' \in \mathbb{R}$
$$\left(\int\limits_1^t \varphi(\tau)\,d\tau + c - \frac{t^k}{\beta}\cos(\beta t + \gamma')\right) \in \tilde\Phi(k).$$

Доказательство. Линейная комбинация функций степени меньше k (колеблющихся) есть снова линейная комбинация выражений вида (11), т. е. опять функция степени меньше k (соответственно колеблющаяся).

1. Первое утверждение леммы вытекает из поведения на бесконечности каждой из функций (11) при $\varepsilon < 0$ или при $\varepsilon = 0$, $j < 0$.

2. Второе утверждение для каждого выражения (11) (а значит, и для их линейной комбинации) при $\varepsilon > 0$ вытекает из равенства
$$\frac{d}{dt}(e^{-\varepsilon t} t^j \cos(\beta t + \gamma)) =$$
$$= e^{-\varepsilon t}\left((\varepsilon t^j + j t^{j-1})\cos(\beta t + \gamma) + t^j \cos\left(\beta t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right)\right),$$
а при $\varepsilon = 0$, $j < k$ — из равенства
$$\frac{d}{dt}(t^j \cos(\beta t + \gamma)) = \beta t^j \cos\left(\beta t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right) + j t^{j-1}\cos(\beta t + \gamma). \tag{12}$$

3. Третье утверждение получается применением последнего равенства при $j = k$ и $\gamma + \pi/2 = \gamma'$.

4. Четвертое утверждение леммы вытекает из того факта [1], что для каждого выражения (11) при $\beta > 0$ уравнение
$$\dot y = \varphi \equiv e^{-\varepsilon t} t^j \cos(\beta t + \gamma)$$

имеет частное решение вида

$$\int\limits_1^t \varphi(\tau)\,d\tau = e^{-\varepsilon t}\left(c_j t^j \cos(\beta t + \gamma_j) + \ldots + c_0 t^0 \cos(\beta t + \gamma_0)\right) + c,$$

представляющее собой колеблющуюся функцию степени меньше k как при $\varepsilon > 0$, так и при $\varepsilon = 0$, $j < k$.

5. Пятое утверждение вытекает из последнего равенства при $\varepsilon = 0$, $j = k$. Старший коэффициент c_j при этом вычисляется (скажем, по формуле (12)) и равен $1/\beta$.

Лемма 12 доказана.

Доказательство теоремы IV. 1. Выпишем все корни $\Lambda_1(a), \ldots, \Lambda_n(a)$ характеристического многочлена, соответствующего данному уравнению $a \in \mathcal{C}^n$, упорядочив их (см. неравенства (2)) по нестрогому возрастанию модулей их мнимых частей (а в каждой группе корней с равными мнимыми частями, например, еще и по нестрогому возрастанию их действительных частей).

В соответствии с полученным списком корней выпишем стандартную фундаментальную систему решений [1] следующим образом: каждому действительному корню Λ, встречающемуся в списке ровно k раз, поставим в соответствие набор функций

$$e^{\Lambda t},\ te^{\Lambda t}, \ldots,\ t^{k-1}e^{\Lambda t},$$

а каждой паре комплексно сопряженных корней $\Lambda = \alpha \pm i\beta$ ($\beta > 0$), встречающейся в списке корней ровно k раз, поставим в соответствие набор функций

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\sin\beta t, \ldots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

В итоге получится упорядоченный список, состоящий в общей сложности ровно из n функций. Кстати, все эти функции аналитичны на $\mathbb{R}^+$, поэтому они заведомо допустимы (определение 1) вместе со всеми своими производными и первообразными.

2. Для заданного числа $m \in \{1, \ldots, n\}$ возьмем произвольное решение $y \in \mathcal{S}_*(a)$, являющееся линейной комбинацией только первых m решений из полученного в первом пункте списка, и выделим в нем главную часть, представив его в виде

$$y(t) = e^{\alpha t}t^k(c_1\cos(\beta_1 t + \gamma_1) + \ldots + c_l\cos(\beta_l t + \gamma_l)) + \varphi(t), \qquad (13)$$

где

$$k \geqslant 0, \quad c_1, \ldots, c_l \neq 0, \quad \alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_l \in \mathbb{R}, \quad |\operatorname{Im}(\Lambda_m)| \geqslant \beta_1 > \ldots > \beta_l \geqslant 0$$

(если $\beta_l = 0$, то и $\gamma_l = 0$), а остаток φ содержит те слагаемые линейной комбинации, у которых показатель экспоненты либо строго меньше числа α, либо равен α, но тогда показатель степени при t строго меньше k.

А. В представлении (13) не исключается случай вырождения главной части, когда $l = 1$ и $\beta_1 = 0$. Тогда она имеет вид $c_1 e^{\alpha t} t^k$, следовательно, функция y при достаточно больших t отделена от нуля, а значит, имеет конечное число нулей и потому (следствие 10)

$$\nu^0(y) \leqslant |\operatorname{Im}(\Lambda_m)|. \tag{14}$$

Б. В случае $\beta_1 > 0$ рассмотрим функцию

$$y_0(t) \equiv e^{-\alpha t} y(t) = t^k (c_1 \cos(\beta_1 t + \gamma_1) + \ldots + c_l \cos(\beta_l t + \gamma_l)) + \varphi_0(t), \tag{15}$$

где остаток φ_0 уже представляет собой функцию степени меньше k (см. определение 8), т. е. $\varphi_0 \in \Phi(k)$. Применяя p раз второе и третье утверждения леммы 12, получаем для ее производной p-го порядка представление

$$y_p(t) = t^k (\beta_1^p c_1 \cos(\beta_1 t + \gamma_{1,p}) + \ldots + \beta_l^p c_l \cos(\beta_l t + \gamma_{l,p})) + \varphi_p(t),$$

где $\varphi_p \in \Phi(k)$.

В. Функция

$$z_p(t) \equiv \frac{y_p(t)}{t^k \beta_1^p c_1} = \cos(\beta_1 t + \gamma_{1,p}) + \ldots + \frac{\beta_l^p c_l}{\beta_1^p c_1} \cos(\beta_l t + \gamma_{l,p}) + \frac{\varphi_p(t)}{t^k \beta_1^p c_1}$$

при достаточно большом значении p, каковым и будем его в дальнейшем считать, имеет частоту нулей, не превосходящую β_1.

Действительно, в последней сумме все слагаемые со второго по l-е малы по модулю вместе с производной при всех $t > 0$ из-за малости величины $(\beta_j/\beta_1)^p$, а последнее слагаемое мало в том же смысле, но лишь при достаточно больших t, в силу первых двух утверждений леммы 12. Следовательно, можно считать, что для некоторого $t_0 > 0$ при всех $t \geqslant t_0$ имеет место представление функции z_p в виде суммы двух слагаемых:

$$z_p(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t),$$
$$\psi_1(t) \equiv \cos(\beta_1 t + \gamma_{1,p}), \quad |\psi_2(t)| < \frac{1}{2}, \quad |\dot{\psi}_2(t)| < \frac{\beta_1}{2}.$$

Разобьем всю полуось $\mathbb{R}^+$ на последовательные полуинтервалы точками, где первое слагаемое по модулю равно $\sqrt{2}/2$. На тех полуинтервалах, где первое слагаемое по модулю не меньше чем $\sqrt{2}/2$, второе не влияет на отделенность суммы от нуля (так как $\operatorname{sgn}(z_p) = \operatorname{sgn}(\psi_1)$). На каждом же из остальных полуинтервалов производная первого слагаемого по модулю не меньше чем $\beta_1\sqrt{2}/2$, поэтому второе не влияет на монотонность суммы (так как $\operatorname{sgn}(\dot{z}_p) = \operatorname{sgn}(\dot{\psi}_1)$) и тем самым опять не может увеличить количество нулей.

Таким образом, функция z_p на каждом полуинтервале вида

$$((j-1)T; jT], \quad j \in \mathbb{N}, \quad T = \frac{\pi}{\beta_1},$$

начиная с некоторого j (все равно что с первого; см. лемму 9) имеет не более одного нуля, откуда $\nu^0(z_p) = \beta_1$ (см. второе равенство из леммы 5).

Г. Итак, с помощью леммы 7 (ни одна из функций $y_0, \ldots, y_p$ не нулевая, так как $z_p \neq 0$) получаем ту же оценку (14):

$$\nu^0(y) = \nu^0(y_0) \leqslant \nu^0(y_p) = \nu^0(z_p) \leqslant \beta_l \leqslant |\operatorname{Im}(\Lambda_m)|,$$

из которой, согласно определению 3, вытекает оценка

$$\omega^0_{\underline{m}}(a) \leqslant |\operatorname{Im}\Lambda_m(a)|.$$

3. Для заданного числа $m \in \{1, \ldots, n\}$ возьмем произвольное решение $y \in \mathcal{S}_*(a)$, являющееся линейной комбинацией только последних $n - m + 1$ решений из полученного выше в п. 1 списка, и представим его в виде (13).

А. В случае $\operatorname{Im}(\Lambda_m) = 0$ сразу получаем

$$\nu(y) \geqslant |\operatorname{Im}(\Lambda_m)|. \tag{16}$$

Б. В случае же $\operatorname{Im}(\Lambda_m) \neq 0$ имеем тем более $\beta_l > 0$. Снова рассмотрим ту же функцию (15), в которой остаток φ_0 есть уже колеблющаяся функция степени меньше k (см. определение 8), т. е. $\varphi_0 \in \tilde{\Phi}(k)$. Применяя p раз четвертое и пятое утверждения леммы 12, получаем для некоторой ее первообразной p-го порядка представление

$$y_p(t) = t^k \left(\frac{c_1}{\beta_1^p} \cos(\beta_1 t + \gamma_{1,p}) + \ldots + \frac{c_l}{\beta_l^p} \cos(\beta_l t + \gamma_{l,p}) \right) + \varphi_p(t),$$

где $\varphi_p \in \tilde{\Phi}(k)$.

В. Функция

$$z_p(t) \equiv \frac{\beta_l^p y_p(t)}{t^k c_l} = \frac{\beta_l^p c_1}{\beta_1^p c_l} \cos(\beta_1 t + \gamma_{1,p}) + \ldots + \cos(\beta_l t + \gamma_{l,p}) + \frac{\beta_l^p \varphi_p(t)}{t^k c_l}$$

при достаточно большом значении p, каковым и будем его в дальнейшем считать, имеет частоту, не меньшую β_l.

Действительно, в последней сумме все слагаемые с первого по $(l-1)$-е малы по модулю вместе с производной при всех $t > 0$ из-за малости величины $(\beta_l/\beta_j)^p$, а последнее слагаемое мало в том же смысле, но лишь при достаточно больших t в силу первого утверждения леммы 12. Следовательно, можно считать, что для некоторого $t_0 > 0$ при всех $t \geqslant t_0$ имеет место представление

$$z_p(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t), \quad \psi_1(t) \equiv \cos(\beta_l t + \gamma_{l,p}), \quad |\psi_2(t)| < \frac{1}{2}.$$

На тех интервалах, где первое слагаемое по модулю не меньше чем $\sqrt{2}/2$, второе не влияет на его знак, а значит, на каждом из остальных интервалов сумма $\psi_1(t)+\psi_2(t)$, как и ее первое слагаемое, меняет знак хотя бы один раз, поэтому функция z_p на каждом полуинтервале вида

$$((j-1)T; jT], \quad j \in \mathbb{N}, \quad T = \frac{\pi}{\beta_l},$$

имеет по меньшей мере одну точку смены знака.

Г. Итак, с помощью леммы 7 (ни одна из функций $y_1, \ldots, y_p$ не нулевая, так как $y_0 \neq 0$) получаем ту же оценку (16)

$$\nu(y) = \nu(y_0) \geqslant \nu(y_p) = \nu(z_p) \geqslant \beta_1 \geqslant |\operatorname{Im}(\Lambda_m)|,$$

из которой, по определению 3, вытекает оценка

$$\omega_{\underline{m}}(a) \geqslant |\operatorname{Im} \Lambda_m(a)|.$$

4. Из доказанных в пп. 2, 3 оценок и теоремы VI для любого $m = 1, \ldots, n$ получаем цепочку

$$|\operatorname{Im} \Lambda_m(a)| \leqslant \omega_{\underline{m}}(a) \leqslant \omega^0_{\overline{m}}(a) \leqslant |\operatorname{Im} \Lambda_m(a)|,$$

все неравенства которой обращаются в равенства. А с учетом оценок для остальных главных частот уравнения a с тем же индексом

$$\omega_{\underline{m}}(a) \leqslant \omega_{\overline{m}}(a) \leqslant \omega^0_{\overline{m}}(a), \quad \omega_{\underline{m}}(a) \leqslant \omega^0_{\underline{m}}(a) \leqslant \omega^0_{\overline{m}}(a)$$

(см. теоремы VI и VIII) получаем те же равенства и для них.

Теорема IV доказана.

Доказательство теоремы XI получается теперь из известного факта о непрерывной зависимости корней многочлена, а значит, и модулей их мнимых частей от его коэффициентов.

Действительно, пусть $\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$ — упорядоченные по нестрогому возрастанию модули мнимых частей корней характеристического многочлена, соответствующего уравнению $a \in \mathrm{C}_n$ (они же, согласно теореме IV, — его главные частоты). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $b \in \mathrm{C}_n$ и $|b - a| < \delta$, то модули $\beta_1, \ldots, \beta_n$ мнимых частей корней характеристического многочлена, соответствующего уравнению b, удовлетворяют оценкам $|\beta_j - \alpha_j| < \varepsilon$ $(j = 1, \ldots, n)$, следовательно, те же модули $\gamma_1 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_n$, но упорядоченные по нестрогому возрастанию (на этот раз уже главные частоты уравнения b) удовлетворяют тем же оценкам

$$\alpha_j + \varepsilon > \max\{\beta_1, \ldots, \beta_j\} \geqslant \gamma_j \geqslant \min\{\beta_j, \ldots, \beta_n\} > \alpha_j - \varepsilon.$$

Теорема XI доказана.

§ 5. ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО

Лемма 13. *Для любого числа $\varepsilon \in (0; \pi/2)$ существуют числа $T_2 > T_1 > \pi/2$, $\alpha_2 > \alpha_1 > 1$ и параметрическое семейство функций $u_\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, зависящее от $\alpha \in A \equiv [\alpha_1; \alpha_2]$, бесконечно дифференцируемое по паре (t, α) и удовлетворяющее следующим условиям:*

1) *при каждом $\alpha \in A$ имеет место представление*

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} \sin t, & t \leqslant 0, \\ \alpha \sin \frac{t}{\alpha} + \varphi_\alpha(t), & 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \\ \alpha \sin \frac{t}{\alpha}, & \varepsilon \leqslant t \leqslant T_1, \\ u_\alpha(T_2), & t \geqslant T_2, \end{cases}$$

где

$$|\varphi_\alpha^{(i)}(t)| \leqslant \varepsilon, \quad i = 0, 1, 2, \quad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon; \tag{17}$$

2) *для некоторой монотонной бесконечно дифференцируемой функции $\alpha(\cdot) \colon \mathrm{M} \to A$, где $\mathrm{M} \equiv [1/2; 2]$, справедливо равенство*

$$u_{\alpha(\mu)}(t) = \mu, \quad \mu \in \mathrm{M}, \quad t \geqslant T_2;$$

3) *справедливо неравенство*

$$\ddot{u}_\alpha(t) + u_\alpha(t) > 0, \quad \alpha \in A, \quad t > \varepsilon.$$

Доказательство. 1. Пусть задано $\varepsilon \in (0; \pi/2)$. Положив $T_1 \equiv 5\pi/6$ и $\gamma \equiv \pi/18$, зададим функцию $v \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ с помощью начальных условий $v(0) = 0$, $\dot{v}(0) = 1$ и ее второй производной $\ddot{v} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$, определяемой формулой

$$\ddot{v}(t) = -\sin t \cdot \theta\left(\frac{t - T_1}{\gamma}\right) + h \cdot \left(\theta\left(\frac{t - T_1}{\gamma} - 2\right) - \theta\left(\frac{t - T_1}{\gamma} - 1\right)\right),$$

где $h > 0$ и $\theta \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ — некоторая функция, принимающая на интервале $(0; 1)$ положительные значения, меньшие 1, а на остальной части числовой прямой задаваемая формулами

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \leqslant 0, \\ 0, & t \geqslant 1, \end{cases} \tag{18}$$

и, кстати, ограниченная вместе с первыми двумя своими производными.

2. Полученная функция $\ddot{v}(t)$:

а) бесконечно дифференцируема;

б) при $t \leqslant T_1$ равна $-\sin t$, а при $t \geqslant \pi = T_1 + 3\gamma$ — нулю;

в) при $T_1 < t < \pi$ больше чем $-\sin t$;

г) при $T_1 \leqslant t < T_1 + \gamma$ отрицательна, а при $T_1 + \gamma < t < \pi$ положительна.

Последнее свойство позволяет выбрать, что мы и сделаем, число $h > 0$ таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_{T_1}^{\pi} \ddot{v}(t)\, dt = -\cos T_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Из перечисленных свойств функции $\ddot{v}(t)$ следует представление

$$\dot{v}(t) = \begin{cases} \cos t, & t \leqslant T_1, \\ \cos T_1 + \int\limits_{T_1}^{t} \ddot{v}(\tau)\, d\tau \in (\cos t; 0), & T_1 < t \leqslant \pi, \\ \cos T_1 + \int\limits_{T_1}^{\pi} \ddot{v}(t)\, dt = 0, & t \geqslant \pi, \end{cases}$$

из которого получаем представление

$$v(t) = \begin{cases} \sin t, & t \leqslant T_1, \\ \sin T_1 + \int\limits_{\pi/2}^{t} \dot v(\tau)\,d\tau \in (\sin t; \frac{1}{2}), & T_1 < t \leqslant \pi, \\ v_0 \in (0; \frac{1}{2}), & t \geqslant \pi. \end{cases}$$

4. Положим

$$u_\alpha(t) \equiv \alpha v\left(\frac{t}{\alpha}\right) + \varphi_\alpha(t),$$

где

$$\varphi_\alpha(t) = \theta\left(\frac{t}{\delta}\right) \cdot \left(\sin t - \alpha v\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right)$$

для некоторого числа $\delta \in (0; \varepsilon)$ и функции θ из первого пункта настоящего доказательства. Тогда если

$$\alpha \in \left[\frac{1}{2v_0}; \frac{2}{v_0}\right] \equiv [\alpha_1; \alpha_2], \quad \alpha_1 = \frac{1/2}{v_0} > 1,$$

то имеем

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} \sin t, & t \leqslant 0, \\ \alpha \sin\frac{t}{\alpha}, & \delta < \varepsilon \leqslant t \leqslant T_1 \leqslant \alpha T_1, \\ \mu \equiv \alpha v_0, & t \geqslant T_2 \equiv \frac{2\pi}{v_0} \geqslant \alpha\pi. \end{cases}$$

5. Бесконечная дифференцируемость функции $u_\alpha(t)$ по паре (t, α) вытекает из бесконечной дифференцируемости функций v и θ, а чтобы выполнялись еще и оценки (17), достаточно выбрать число δ поменьше: при $0 \leqslant t \leqslant \delta$ и $\delta \to 0$ имеем равномерные по параметру $\alpha \in A$ оценки

$$\varphi_\alpha(t) = \theta\left(\frac{t}{\delta}\right) \cdot \left(\sin t - \alpha \sin\frac{t}{\alpha}\right) = o(\delta^2) \leqslant \varepsilon,$$

$$\dot\varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\delta}\dot\theta\left(\frac{t}{\delta}\right) \cdot \left(\sin t - \alpha\sin\frac{t}{\alpha}\right) + \theta\left(\frac{t}{\delta}\right) \cdot \left(\cos t - \cos\frac{t}{\alpha}\right) = o(\delta) \leqslant \varepsilon,$$

$$\ddot\varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\delta^2}\ddot\theta\left(\frac{t}{\delta}\right) \cdot \left(\sin t - \alpha\sin\frac{t}{\alpha}\right) +$$

$$+ 2\frac{1}{\delta}\dot\theta\left(\frac{t}{\delta}\right) \cdot \left(\cos t - \cos\frac{t}{\alpha}\right) + \theta\left(\frac{t}{\delta}\right) \cdot \left(-\sin t + \frac{1}{\alpha}\sin\frac{t}{\alpha}\right) = o(1) \leqslant \varepsilon,$$

если δ достаточно мало.

6. Таким образом, первое условие доказываемой леммы уже установлено, второе выполняется для функции $\alpha(\mu) \equiv \mu/v_0$, а третье вытекает из оценок

$$\ddot{u}_\alpha(t) + u_\alpha(t) = \begin{cases} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\sin\frac{t}{\alpha} > 0, & \delta < t \leqslant \alpha T_1, \\ \frac{1}{\alpha}\ddot{v}\left(\frac{t}{\alpha}\right) + \alpha v\left(\frac{t}{\alpha}\right) > \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\sin\frac{t}{\alpha} \geqslant 0, & \alpha T_1 < t \leqslant \alpha\pi, \\ \mu > 0, & t \geqslant \alpha\pi. \end{cases}$$

Лемма 13 доказана.

Лемма 14. *Для некоторого числа $T_0 > 0$ существует семейство уравнений $a_{\tau_0,\mu',\mu''} \in \mathcal{E}^3$, зависящее от параметров $\tau_0 \in \mathbb{R}^+$ и $\mu', \mu'' \in \in \mathrm{M} \equiv [1/2; 2]$ и обладающее следующими свойствами*:

1) *для каждой тройки $(\tau_0, \mu', \mu'') \in \mathbb{R}^+ \times \mathrm{M}^2$ уравнение $a_{\tau_0,\mu',\mu''}$ имеет решения ξ, η, ζ, удовлетворяющие равенствам*

$$\xi(t) = \sin(t-\tau_0),\ \ \eta(t) = \mu',\ \ \zeta(t) = \cos(t-\tau_0),\quad 0 \leqslant t \leqslant \tau_0, \tag{19}$$

$$\xi(t) = \mu'',\ \ \eta(t) = \cos(t-\tau_0),\ \ \zeta(t) = \sin(t-\tau_0),\quad t \geqslant \tau_0+T_0; \tag{20}$$

2) *для некоторой константы d выполнена оценка*

$$\|a_{\tau_0,\mu',\mu''}\| \leqslant d, \quad \tau_0 \in \mathbb{R}^+, \quad \mu', \mu'' \in \mathrm{M};$$

3) *функции $a_{\tau_0,\mu',\mu''}(t)$ бесконечно дифференцируемы по t и непрерывны по паре (μ', μ'') равномерно по паре $(\tau_0, t) \in (\mathbb{R}^+)^2$;*

4) *при всех $t \leqslant \tau_0$ или $t \geqslant \tau_6$ строка коэффициентов любого уравнения $a_{\tau_0,\mu',\mu''}$ совпадает со строкой*

$$a(t) \equiv (a_1(t), a_2(t), a_3(t)) = (0, 1, 0). \tag{21}$$

Доказательство. 1. Число T_2 в лемме 13 можно безболезненно увеличивать, поэтому без ограничения общности считаем выполненным равенство

$$T_2 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть задано число $\tau_0 \in \mathbb{R}^+$, тогда положим

$$\tau_1 \equiv \tau_0 + T_2 - \frac{\pi}{6} = \tau_0 + \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$\tau_2 \equiv \tau_0 + T_2 = \tau_0 + \frac{2\pi}{3} + 2\pi k = \tau_1 + \frac{\pi}{6}, \quad \tau_3 \equiv \tau_0 + 2T_2,$$

$$\tau_4 \equiv \tau_0 + 3T_2 = \tau_0 + 2\pi + 6\pi k = \tau_3 + \frac{\pi}{6}, \quad \tau_5 \equiv \tau_0 + 3T_2 + \frac{\pi}{6},$$

$$\tau_6 \equiv \tau_0 + 4T_2 + \frac{3\pi}{2} = \tau_2 + \frac{3\pi}{2} + 2\pi + 6\pi k = \tau_5 + 2\pi + 2\pi k,$$
$$T_0 \equiv \tau_6 - \tau_0.$$

2. Пользуясь леммой 13, по заданным значениям $\mu', \mu'' \in \mathrm{M}$ выберем числа $\alpha(\mu'), \alpha(\mu'') > 1$, какое-либо положительное $\varepsilon < \pi/6$, удовлетворяющее оценке (22), и функции

$$w_1(t) \equiv u_{\alpha(\mu')}(t), \quad w_2(t) \equiv u_{\alpha(\mu'')}(t).$$

3. Положим

$$\xi(t) = w_2(t - \tau_4), \quad \eta(t) = w_1(\tau_2 - t),$$
$$\zeta(t) = \begin{cases} -w_1(t - \tau_1), & t \leqslant \tau_3, \\ -w_1(\tau_5 - t), & t \geqslant \tau_3. \end{cases}$$

Тогда, согласно лемме 13, имеем $\xi, \eta, \zeta \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$, поскольку в некоторой малой окрестности точки стыка τ_3 функций $-w_1(t-\tau_1)$ и $-w_1(\tau_5-t)$ обе они равны по $-\mu'$, и при $t \leqslant \tau_0$ выполнены условия (19):

$$\xi(t) = \sin(t - \tau_4) = \sin(t - \tau_0), \quad \eta(t) = \mu',$$
$$\zeta(t) = -\sin(t - \tau_1) = \cos(t - \tau_0),$$

а при $t \geqslant \tau_6$ — условия (20):

$$\xi(t) = \mu'', \quad \eta(t) = \sin(\tau_2 - t) = \cos(t - \tau_6),$$
$$\zeta(t) = -\sin(\tau_5 - t) = \sin(t - \tau_6).$$

4. Обозначим

$$X \equiv \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \dot\xi & \dot\eta & \dot\zeta \\ \ddot\xi & \ddot\eta & \ddot\zeta \end{pmatrix}.$$

При $t \leqslant \tau_1$ (аналогично при $t \geqslant \tau_5$) имеем

$$\det X(t) = \begin{vmatrix} \sin(t - \tau_0) & w_1(\tau_2 - t) & \cos(t - \tau_0) \\ \cos(t - \tau_0) & -\dot w_1(\tau_2 - t) & -\sin(t - \tau_0) \\ -\sin(t - \tau_0) & \ddot w_1(\tau_2 - t) & -\cos(t - \tau_0) \end{vmatrix} =$$
$$= w_1(\tau_2 - t) + \ddot w_1(\tau_2 - t) > 0,$$

так как $\tau_2 - t \geqslant \tau_2 - \tau_1 = \pi/6 > \varepsilon$ (см. лемму 13).

5. Далее, при $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$ (аналогично при $\tau_4 \leqslant t \leqslant \tau_5$), временно положив $\alpha \equiv \alpha(\mu')$, имеем

$$\eta(t) = w_1(\tau_2 - t) = \alpha \sin \frac{\tau_2 - t}{\alpha} + \varphi_\alpha(\tau_2 - t),$$
$$\zeta(t) = -w_1(t - \tau_1) = -\alpha \sin \frac{t - \tau_1}{\alpha} - \varphi_\alpha(t - \tau_1)$$

(функция φ_α определена в лемме 13), откуда получаем оценку

$$\det X(t) =$$
$$= \begin{vmatrix} \sin(t-\tau_0) & \alpha \sin \frac{\tau_2 - t}{\alpha} + \varphi_\alpha(\tau_2 - t) & -\alpha \sin \frac{t-\tau_1}{\alpha} - \varphi_\alpha(t-\tau_1) \\ \cos(t-\tau_0) & -\cos \frac{\tau_2 - t}{\alpha} - \dot\varphi_\alpha(\tau_2 - t) & -\cos \frac{t-\tau_1}{\alpha} - \dot\varphi_\alpha(t-\tau_1) \\ -\sin(t-\tau_0) & -\frac{1}{\alpha} \sin \frac{\tau_2 - t}{\alpha} + \ddot\varphi_\alpha(\tau_2 - t) & \frac{1}{\alpha} \sin \frac{t-\tau_1}{\alpha} - \ddot\varphi_\alpha(t-\tau_1) \end{vmatrix} =$$
$$= \sin(t-\tau_0) \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \left(\cos \frac{\tau_2 - t}{\alpha} \sin \frac{t-\tau_1}{\alpha} + \sin \frac{\tau_2 - t}{\alpha} \cos \frac{t - \tau_1}{\alpha}\right) - \chi(t) =$$
$$= \cos(t - \tau_1) \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \sin \frac{\tau_2 - \tau_1}{\alpha} - \chi(t) > 0,$$

поскольку для суммы всех остальных членов при раскрытии последнего определителя, обозначенной здесь через $(-\chi(t))$, верна цепочка неравенств (см. оценки (17))

$$\chi(t) \equiv \cos(t - \tau_1) \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \sin \frac{\tau_2 - \tau_1}{\alpha} - \det X(t) \leqslant$$
$$\leqslant 6\varepsilon(2\alpha_2 + 1) < \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{6} \left(\alpha_1 - \frac{1}{\alpha_1}\right) \sin \frac{\pi}{6\alpha_2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \cos(t - \tau_1) \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \sin \frac{\tau_2 - \tau_1}{\alpha}, \tag{22}$$

если только число ε достаточно мало.

6. Наконец, при $\tau_2 \leqslant t \leqslant \tau_3$ (аналогично при $\tau_3 \leqslant t \leqslant \tau_4$) имеем

$$\det X(t) = \begin{vmatrix} \sin(t-\tau_0) & \sin(\tau_2 - t) & -w_1(t-\tau_1) \\ \cos(t-\tau_0) & -\cos(\tau_2 - t) & -\dot w_1(t-\tau_1) \\ -\sin(t-\tau_0) & -\sin(\tau_2 - t) & -\ddot w_1(t-\tau_1) \end{vmatrix} =$$
$$= (\sin(t-\tau_0)\cos(\tau_2 - t) + \cos(t-\tau_0)\sin(\tau_2 - t))(w_1(t-\tau_1) +$$
$$+ \ddot w_1(t-\tau_1)) =$$
$$= \sin(\tau_2 - \tau_0) \cdot (w_1(t-\tau_1) + \ddot w_1(t-\tau_1)) > 0$$

по лемме 13, так как $t - \tau_1 \geqslant \tau_2 - \tau_1 = \pi/6 > \varepsilon$.

7. По данной системе из трех функций $\xi, \eta, \zeta \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$, которая, как было доказано выше, удовлетворяет условию

$$\det X(t) > 0, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

известным способом [1] восстанавливается линейное однородное уравнение $a_{\tau_0,\mu',\mu''}$ третьего порядка, для которого эти функции служат решениями.

Более того, строка коэффициентов любого уравнения из построенного семейства при всех $t \notin I \equiv [\tau_0; \tau_6]$ одинакова и имеет вид (21). Действительно, при указанных значениях t построенное уравнение, как, между прочим, и уравнение с постоянными коэффициентами и характеристическим многочленом $\lambda(\lambda^2+1) = \lambda^3 + \lambda$, имеет тройку решений и (19), и (20), но поскольку по этим решениям первое уравнение восстанавливается однозначно, то оно совпадает со вторым.

8. При каждом фиксированном $\tau_0 \in \mathbb{R}^+$ каждая из построенных функций ξ, η, ζ бесконечно дифференцируема по тройке (t, μ', μ''), а при $t \notin I$ вообще не зависит от пары $(\mu', \mu'') \in \mathrm{M}^2$. Этим же свойством будут обладать и все коэффициенты семейства уравнений $a_{\tau_0,\mu',\mu''} \in \mathcal{E}^3$. Поэтому строка коэффициентов $a_{\tau_0,\mu',\mu''}(t)$ непрерывна по тройке (t, μ', μ'') на компакте $K \equiv I \times \mathrm{M}^2$, а значит, обладает следующими свойствами:

а) равномерно ограничена на K и, стало быть, на $\mathbb{R}^+ \times \mathrm{M}^2$;

б) равномерно непрерывна на K, а потому непрерывна по $(\mu', \mu'') \in \mathrm{M}^2$ равномерно по $t \in I$ и, стало быть, равномерно по $t \in \mathbb{R}^+$.

Наконец, равномерность перечисленных свойств семейства $a_{\tau_0,\mu',\mu''}$ еще и по $\tau_0 \in \mathbb{R}^+$ вытекает из того, что уравнения, соответствующие разным значениям τ_0 при одинаковых парах (μ', μ''), переводятся друг в друга надлежащими временны́ми сдвигами.

Лемма 14 доказана.

§ 6. МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО

Лемма 15. *Для некоторого числа $T_0 > 0$, множества $\mathrm{M} \equiv [1/2; 2]$ и любой последовательности $k_1, k_2, \ldots \in \mathbb{N}$ существует семейство уравнений $a_{\bar\mu} \in \mathcal{E}^3$, зависящее от последовательности параметров $\mu_1, \mu_2, \ldots \in \mathrm{M}$, обозначаемой через $\bar\mu$, и обладающее следующими свойствами*:

1) *для каждой последовательности $\bar\mu \in \mathrm{M}^\infty$ уравнение $a_{\bar\mu}$ имеет набор решений y_1, y_2, y_3, удовлетворяющий при каждом $m \in \mathbb{N}$ требованиям*

$$(y_1,y_2,y_3)(t) = \\ = \begin{cases} (\sin(t-r_m),\mu_m,\cos(t-r_m)), & t_{m-1}+T_0 \leqslant t \leqslant r_m, \\ (\mu_m,\cos(t-s_m),\sin(t-s_m)), & r_m+T_0 \leqslant t \leqslant s_m, \\ (\cos(t-t_m),\sin(t-t_m),\mu_m), & s_m+T_0 \leqslant t \leqslant t_m, \end{cases}$$

где $t_0 \equiv 0$ и при каждом $m=1,2,\ldots$ последовательно обозначено

$$r_m \equiv t_{m-1}+T_0+2\pi k_m,\quad s_m \equiv r_m+T_0+2\pi k_m,\quad t_m \equiv s_m+T_0+2\pi k_m;$$

2) *для некоторой константы d выполнена оценка*

$$\|a_{\bar\mu}\| \leqslant d, \quad \bar\mu \in \mathrm{M}^\infty;$$

3) *функции $a_{\bar\mu}(t)$ бесконечно дифференцируемы по t и непрерывны по каждому из параметров $\mu_m \in \mathrm{M}$ равномерно по $(t,m) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}$;*
4) *для каждого $m \in \mathbb{N}$ при всех $t \leqslant t_{m-1}$ или $t \geqslant t_m + T_0$ строка коэффициентов любого уравнения $a_{\bar\mu}$ не зависит от значения μ_m.*

Доказательство. Выберем число $T_0 > 0$ в соответствии с леммой 14.

1. Для начала возьмем уравнение $a \in \mathcal{E}^3$ с коэффициентами (21) (но только не на части, а на всей полупрямой $\mathbb{R}^+$) и для каждой фиксированной последовательности $\bar\mu \in \mathrm{M}^\infty$ внесем в него следующее изменение: при каждом $m \in \mathbb{N}$ заменим строку $a(t)$ для всех значений $t \in (\tau_0;\tau_0+T_0)$ при $\tau_0 = r_m$ и при $\tau_0 = s_m$ строкой $a_{\tau_0,\mu_m,\mu_m}(t)$ коэффициентов уравнения из семейства, построенного в соответствии с леммой 14, а при $\tau_0 = t_m$ — строкой $a_{\tau_0,\mu_m,\mu_{m+1}}(t)$ из того же семейства.

2. Пусть решения $y_1,y_2,y_3 \in \mathcal{S}_*(a_{\bar\mu})$ определяются при некотором значении $m \in \mathbb{N}$ первой строкой требований настоящей леммы. Тогда:

а) они в указанном порядке совпадают на отрезке $[t_{m-1}+T_0;r_m]$ соответственно с решениями ξ, η, ζ, удовлетворяющими при $\tau_0 = r_m$ и $\mu' = \mu_m$ условиям (19), а значит, по той же лемме 14, удовлетворяют и условиям (20) $\tau_0 = r_m$ и $\mu'' = \mu_m$, т. е. второй строке требований настоящей леммы;

б) они же, но в порядке y_3, y_1, y_2, совпадают на отрезке $[r_m+T_0;s_m]$ с решениями ξ, η, ζ, удовлетворяющими при $\tau_0 = s_m$ и $\mu' = \mu'' = \mu_m$ условиям (19) и (20), т. е. третьей строке требований настоящей леммы;

в) они же, но в порядке y_2,y_3,y_1, совпадают на отрезке $[s_m+T_0;t_m]$ с решениями ξ, η, ζ, удовлетворяющими при $\tau_0 = t_m$, $\mu' = \mu_m$ и

$\mu'' = \mu_{m+1}$ условиям (19) и (20), т. е. снова первой строке требований настоящей леммы, но уже при следующем значении m.

Таким образом, решения $y_1, y_2, y_3 \in \mathcal{S}_*(a_{\bar{\mu}})$, определяемые одной лишь первой строкой требований настоящей леммы при $m = 1$, удовлетворяют всем остальным требованиям при всех значениях $m \in \mathbb{N}$ (по индукции), а значит, первое свойство построенного семейства $a_{\bar{\mu}}$ установлено.

3. Коэффициенты уравнения $a_{\bar{\mu}} \in \mathcal{E}^3$, в силу второго и третьего условий леммы 14, удовлетворяют второму и третьему условиям настоящей леммы, а четвертое ее условие выполняется по построению.

Лемма 15 доказана.

Лемма 16. *Пусть задано семейство уравнений $a_{\bar{\mu}} \in \mathcal{E}^3$, существование которого утверждается в лемме 15, и для фиксированной последовательности параметров $\bar{\mu} \in \mathrm{M}^\infty$ задано отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{S}(a_{\bar{\mu}})$, переводящее каждую точку $c \equiv (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3_*$ в решение*

$$\varphi(c) = y \equiv c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \in \mathcal{S}_*(a_{\bar{\mu}}), \tag{23}$$

для которого при фиксированном $m \in \mathbb{N}$ обозначено (см. равенства (5))

$$\varkappa(c) \equiv \frac{\nu(y, t_{m-1} + T_0, r_m) + \nu(y, r_m + T_0, s_m) + \nu(y, s_m + T_0, t_m)}{6k_m},$$

$$\varkappa^0(c) \equiv \frac{\nu^0(y, t_{m-1} + T_0, r_m) + \nu^0(y, r_m + T_0, s_m) + \nu^0(y, s_m + T_0, t_m)}{6k_m}.$$

Далее, для любой двумерной плоскости $C \in G^2_*$ (см. лемму 3) *положим*

$$\overline{\varkappa}(C) \equiv \sup_{c \in C} \varkappa(c), \qquad \overline{\varkappa}^0(C) \equiv \sup_{c \in C} \varkappa^0(c),$$
$$\underline{\varkappa}(C) \equiv \inf_{c \in C} \varkappa(c), \qquad \underline{\varkappa}^0(C) \equiv \inf_{c \in C} \varkappa^0(c),$$

а для любых векторов $g, h \in \mathbb{R}^3_*$ через $C(g, h)$ обозначим любую содержащую их двумерную плоскость. Тогда если обозначить $\mu \equiv \mu_m$ и

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1),$$
$$d_1 = e_2 + e_3, \quad d_2 = e_1 + e_3, \quad d_3 = e_1 + e_2,$$
$$f_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad f_2 = \mu^* e_2 + e_3, \quad \mu^* = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}},$$
$$C_1 = C(d_1, d_2), \quad C_2 = C(e_1, e_2), \quad C_3 = C(e_1, f_2),$$

то для любых $c \in \mathbb{R}^3_*$ и $C \in G^2_*$ будут справедливы следующие утверждения для значений величин $\varkappa$ и $\varkappa^0$:

а) *при* $\sqrt{2}/2 \leqslant \mu < 1$

$$\varkappa(c) \geqslant \frac{2}{3} = \varkappa^0(e_1), \quad \varkappa^0(c) \leqslant 1 = \varkappa(f_1);$$

б) *при* $\mu = 1$

$$\varkappa(c) \geqslant \frac{1}{3} = \varkappa(d_1), \quad \varkappa^0(c) \geqslant \frac{2}{3} = \varkappa^0(d_1), \quad \varkappa^0(c) \leqslant 1 = \varkappa(f_1);$$

в) *при* $1 < \mu < \sqrt{2}$

$$\varkappa(c) \geqslant \frac{1}{3} = \varkappa^0(d_1), \quad \varkappa^0(c) \leqslant 1 = \varkappa(f_1);$$

г) *при* $\mu = \sqrt{2}$

$$\varkappa(c) \geqslant 0 = \varkappa(f_1), \quad \varkappa^0(c) \geqslant \frac{1}{3} = \varkappa^0(d_1), \quad \varkappa^0(c) \leqslant \frac{2}{3} = \varkappa(e_1),$$

а также утверждения для значений величин $\overline{\varkappa}$ *и* $\overline{\varkappa}^0$:

д) *в плоскости* C *существует такой вектор* c_0, *что при всех* $\sqrt{2}/2 \leqslant \mu < 1$

$$\varkappa(c_0) = 1 = \overline{\varkappa}^0(C);$$

е) *в плоскости* C *существует такой вектор* c_0, *что при всех* $1 \leqslant \mu \leqslant \sqrt{2}$

$$\varkappa(c_0) \geqslant \frac{2}{3} = \overline{\varkappa}^0(C_2),$$

и, наконец, утверждения для значений величин $\underline{\varkappa}$ *и* $\underline{\varkappa}^0$:

ж) *в плоскости* C *существует такой вектор* c_0, *что при* $\mu = \sqrt{2}/2$

$$\varkappa^0(c_0) \leqslant \frac{5}{6} = \underline{\varkappa}^0(C_1), \quad \varkappa(c_0) \leqslant \frac{2}{3} = \underline{\varkappa}(C_1);$$

з) *в плоскости* C *существует такой вектор* c_0, *что при всех* $\sqrt{2}/2 < \mu < \mu^*$

$$\varkappa^0(c_0) \leqslant \frac{2}{3} = \underline{\varkappa}(C_3);$$

и) *в плоскости* C *существует такой вектор* c_0, *что при* $\mu = \mu^*$

$$\varkappa^0(c_0) \leqslant \frac{1}{2} = \underline{\varkappa}^0(C_3), \quad \varkappa(c_0) \leqslant \frac{1}{3} = \underline{\varkappa}(C_3);$$

к) *в плоскости* C *существует такой вектор* c_0, *что при всех* $\mu^* \leqslant \mu \leqslant \sqrt{2}$

$$\varkappa^0(c_0) \leqslant \frac{1}{3} = \underline{\varkappa}(C_3).$$

Доказательство. 1. Пусть для вектора $c \in \mathbb{R}^3_*$ (ниже в доказательстве леммы нулевой вектор всюду игнорируется) и номера $i \in \{1,2,3\}$ выполнено условие

$$c_i^2\mu^2 > c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2 \tag{24}$$

(здесь и всюду ниже индекс 0 отождествлен с индексом 3, а индекс 4 — с индексом 1). Тогда на том из трех промежутков $(t_{m-1}+T_0, r_m)$, (r_m+T_0, s_m) и (s_m+T_0, t_m), на котором $y_i(t) = \mu$ (см. первое свойство семейства $a_{\bar\mu} \in \mathcal{E}^3$ в лемме 15), решение $y = \varphi(c)$ (23), как и его главная на этом промежутке часть $c_i\mu$, не имеет нулей, поскольку остальная его часть

$$\bar y(t) \equiv y(t) - c_iy_i(t) = c_{i-1}\sin t + c_{i+1}\cos t = \sqrt{c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2}\cdot\sin(t+\psi) \tag{25}$$

(где $\psi \in \mathbb{R}$ — вспомогательный угол) по модулю меньше главной

$$|\bar y(t)| = \sqrt{c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2} < |c_i\mu| = |c_iy_i(t)|.$$

Аналогично при условии

$$\mu^2c_i^2 < c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2$$

на упомянутом промежутке решение $\varphi(c)$ имеет столько же нулей и столько же точек смен знака, сколько и его часть $\bar y$ (25), а при условии

$$\mu^2c_i^2 = c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2 \,—$$

ровно вдвое меньше нулей и ни одной смены знака.

2. Обозначим через V_i подмножество пространства $\mathbb{R}^3_*$, состоящее из точек, удовлетворяющих неравенству (24), и представляющее собой в пространстве $\mathbb{R}^3_*$ круглый конус (точнее, его внутренность, каковую и будем подразумевать в дальнейшем под словом *конус*), ось которого совпадает с i-й осью координат (натянутой на вектор e_i), а раствор тем больше, чем больше значение μ.

3. Через $U_{i,j} \subset \mathbb{R}^3_*$ обозначим множество точек, принадлежащих ровно i из трех конусов V_1, V_2, V_3 и при этом лежащих на границе ровно j из оставшихся. Тогда для величин $\varkappa$ и $\varkappa^0$ справедливы формулы

$$\varkappa(c) = 1 - \frac{i+j}{3}, \quad \varkappa^0(c) = 1 - \frac{i}{3} + \frac{j}{6}, \quad c \in U_{i,j},$$

которые дают равенства

$$\varkappa(c) = \begin{cases} 0, & c \in U_{3,0} \cup U_{2,1} \cup U_{1,2} \cup U_{0,3}, \\ \frac{1}{3}, & c \in U_{2,0} \cup U_{1,1} \cup U_{0,2}, \\ \frac{2}{3}, & c \in U_{1,0} \cup U_{0,1}, \\ 1, & c \in U_{0,0}, \end{cases}$$

$$\varkappa^0(c) = \begin{cases} 0, & c \in U_{3,0}, \\ \frac{1}{6}, & c \in U_{2,1}, \\ \frac{1}{3}, & c \in U_{2,0} \cup U_{1,2}, \\ \frac{1}{2}, & c \in U_{1,1} \cup U_{0,3}, \\ \frac{2}{3}, & c \in U_{1,0} \cup U_{0,2}, \\ \frac{5}{6}, & c \in U_{0,1}, \\ 1, & c \in U_{0,0}, \end{cases}$$

причем здесь перечислены все возможные значения этих величин.

4. Проследим за изменением множеств значений величин $\varkappa$ и $\varkappa^0$ при возрастании параметра $\mu \in [\sqrt{2}/2; \sqrt{2}]$.

Эти множества полностью определяются списком непустых множеств вида $U_{i,j}$. Заметим сразу, что справедливы соотношения

$$e_1 \in U_{1,0}, \quad d_1 \in \begin{cases} U_{0,0}, & \mu < \sqrt{2}, \\ U_{0,2}, & \mu = \sqrt{2}, \\ U_{2,0}, & \mu > \sqrt{2}, \end{cases} \quad f_1 \in \begin{cases} U_{0,0}, & \mu < \sqrt{2}, \\ U_{0,3}, & \mu = \sqrt{2}, \\ U_{3,0}, & \mu > \sqrt{2}, \end{cases}$$

которые проверяются простой подстановкой в неравенство (24).

А. При $\mu < 1$ никакие два из конусов V_1, V_2 и V_3 не имеют общих точек, даже граничных, так как при этом значении μ система

$$\begin{cases} \mu^2 c_{i-1}^2 \geqslant c_i^2 + c_{i+1}^2, \\ \mu^2 c_{i+1}^2 \geqslant c_i^2 + c_{i-1}^2 \end{cases} \tag{26}$$

не совместна, поскольку из нее вытекает противоречивая цепочка неравенств

$$0 > (\mu^2 - 1)(c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2) \geqslant 2c_i^2 \geqslant 0. \tag{27}$$

Таким образом, непустыми являются только множества $U_{0,0}$, $U_{0,1}$ и $U_{1,0}$, поэтому искомые множества значений оказываются следующими:

$$E(\varkappa) = \left\{\frac{2}{3}, 1\right\}, \quad E(\varkappa^0) = \left\{\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\right\}.$$

Б. При $\mu = 1$ конусы только касаются друг друга, причем только попарно, и все точки касания лежат на шести конкретных прямых. Действительно, при этом значении μ решениями системы (26) служат точки двух прямых, удовлетворяющие равенствам

$$c_i = 0, \quad |c_{i-1}| = |c_{i+1}|, \tag{28}$$

и только они, причем эти точки обращают каждое из неравенств системы в равенство (поскольку все неравенства цепочки (27) в данном случае становятся равенствами).

Таким образом, к предыдущему списку непустых множеств добавляется лишь одно множество $U_{0,2}$, поэтому

$$E(\varkappa) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}, \quad E(\varkappa^0) = \left\{\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\right\}.$$

В. При $1 < \mu < \sqrt{2}$ конусы уже попарно пересекаются (например, для точек, удовлетворяющих равенствам (28), каждое из неравенств системы (26) является строгим), но не имеют общих для них всех точек, даже граничных, так как система

$$\begin{cases} \mu^2 c_1^2 \geqslant c_2^2 + c_3^2, \\ \mu^2 c_2^2 \geqslant c_1^2 + c_3^2, \\ \mu^2 c_3^2 \geqslant c_1^2 + c_2^2 \end{cases} \tag{29}$$

не совместна, в силу того что из нее вытекает не выполнимое при $\mu < \sqrt{2}$ неравенство

$$\mu^2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) \geqslant 2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2). \tag{30}$$

При этом и граница любого конуса пересекается с любым другим конусом, как и с его границей.

Таким образом, к предыдущему списку непустых множеств добавляются еще два множества $U_{2,0}$ и $U_{1,1}$, поэтому

$$E(\varkappa) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}, \quad E(\varkappa^0) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\right\}.$$

Г. При $\mu = \sqrt{2}$ пересечение всех трех конусов пусто, так как при этом значении μ решения системы (29) даже хотя бы с одним строгим неравенством вместо нестрогого, если бы они были, давали бы то же неравенство (30), но только строгое и потому невозможное. Отсюда следует, кстати, что для решений этой системы все неравенства обращаются в равенства, следовательно, имеются общие граничные точки всех трех конусов, лежащие на четырех конкретных прямых и удовлетворяющие равенствам

$$|c_1| = |c_2| = |c_3|, \tag{31}$$

и только они, так как других решений система (29) с равенствами вместо неравенств не имеет.

Аналогично дополнение к объединению всех трех конусов состоит лишь из точек, удовлетворяющих условию (31), так как обратные неравенства системы (29), если хотя бы одно из них строгое, влекут противоположное строгое неравенство (30), а на решениях системы обращаются в равенства.

Любая граничная точка любого конуса, отличная от точек, удовлетворяющих условию (31), обязательно принадлежит другому конусу, но не принадлежит даже замыканию третьего. Действительно, если выполнено равенство

$$\mu^2 c_i^2 = c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2,$$

то хотя бы одно из неравенств системы (26), скажем первое, является строгим, так как иначе в системе (26) оба неравенства имели бы обратный нестрогий знак, а значит, в системе (29) все знаки были бы одноименными, а тогда, как мы видели, выполнялись бы равенства (31). При этом второе неравенство системы (26) обязано быть противоположным, иначе опять в системе (29) все знаки были бы одноименными.

Таким образом, к предыдущему списку непустых множеств добавляется еще множество $U_{0,3}$, зато из списка выпадают множества $U_{0,0}$, $U_{0,1}$ и $U_{0,2}$, поэтому

$$E(\varkappa) = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}, \quad E(\varkappa^0) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}.$$

5. Проследим за наименьшими значениями величин $\bar{\varkappa}$ и $\bar{\varkappa}^0$ при возрастании параметра $\mu \in [\sqrt{2}/2; \sqrt{2}]$.

При любом μ любая плоскость выходит за пределы любого из конусов V_1, V_2 и V_3, даже его замыкания, поскольку она обязательно пересекается, например, с плоскостью C_2, не имеющей общих точек ни с конусом V_3, ни с его границей (доказательство для других конусов аналогично).

Д. Поэтому при $\mu < 1$ любая плоскость C содержит точки c множества $U_{0,0}$, в которых $\varkappa(c) = 1$, следовательно, $\bar{\varkappa}^0(C) = \bar{\varkappa}(C) = 1$ — это и есть наименьшее значение, а в качестве c_0 для всех значений μ можно взять любую точку, лежащую вне всех конусов при $\mu = 1$.

Е. При $\mu = 1$ тот же вывод сохраняется для всех плоскостей, кроме трех конкретных, которые проходят через пары осей координат и на которых реализуется искомый минимум обеих исследуемых величин. Такие плоскости — назовем их *координатными* — состоят из точек двух множеств $U_{1,0}$ и $U_{0,2}$, поэтому для плоскости, например, C_2 справедливы равенства $\bar{\varkappa}^0(C_2) = \bar{\varkappa}(C_2) = 2/3$.

Те же равенства сохраняются и при $1 < \mu \leqslant \sqrt{2}$, когда все точки плоскости C_2 состоят из точек трех множеств $U_{1,0}$, $U_{0,2}$ и $U_{1,1}$. Сохраняются и прежние наименьшие значения обеих величин, так как для любой плоскости C, как и для трех координатных, имеем $\bar{\varkappa}^0(C) \geqslant \bar{\varkappa}(C) \geqslant 2/3$, в силу того что при $\sqrt{2}/2 \leqslant \mu \leqslant \sqrt{2}$ она обязательно проходит через точки множества $U_{1,0}$. Действительно, если она пересекает две из трех координатных плоскостей, для определенности в точках $(1, \alpha, 0)$ и $(1, 0, \beta)$, не принадлежащих множеству $U_{1,0}$, то $\mu^2 \cdot 1^2 \geqslant \alpha^2 + 0^2$ и $\mu^2 \cdot 1^2 \geqslant 0^2 + \beta^2$, но тогда точка $(2, \alpha, \beta)$, также принадлежащая плоскости C, удовлетворяет неравенствам

$$\mu^2 \cdot 2^2 > \alpha^2 + \beta^2, \quad \mu^2\alpha^2 \leqslant 2\alpha^2 \leqslant 2\mu^2 < 2^2 + \beta^2,$$
$$\mu^2\beta^2 \leqslant 2\beta^2 \leqslant 2\mu^2 < 2^2 + \alpha^2,$$

а значит, уже принадлежит множеству $U_{1,0}$.

6. Проследим за наибольшими значениями величин $\underline{\varkappa}$ и $\underline{\varkappa}^0$ при возрастании параметра $\mu \in [\sqrt{2}/2; \sqrt{2}]$.

Ж. При $\mu = \sqrt{2}/2$ существуют конкретные четыре плоскости, каждая из которых касается всех трех конусов V_1, V_2 и V_3 по соответствующим прямым, но не пересекается ни с одним из них, следовательно, состоит только из точек множеств $U_{0,0}$ и $U_{0,1}$. Эти плоскости пересекают каждую из трех координатных плоскостей только по прямым, натянутым на векторы вида $\pm e_1 \pm e_2$, $\pm e_2 \pm e_3$, $\pm e_1 \pm e_3$.

Таковой, в частности, является плоскость C_1, которая проходит через векторы d_1, d_2, $d_3 \equiv d_1 - d_2 = (0, 1, -1)$ и касается, например, конуса V_1 (для остальных конусов аналогично) по прямой, проходящей через вектор $(1, \alpha, 1 - \alpha)$ при $\alpha = 1/2$ (так как для этой прямой неравенство

$$\mu^2 \cdot 1^2 = \frac{1}{2} \leqslant 2\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \alpha^2 + (1 - \alpha)^2$$

обращается в равенство, а для других остается строгим), и для которой, таким образом, имеем $\underline{\varkappa}(C_1) = 2/3$ и $\underline{\varkappa}^0(C_1) = 5/6$.

Эти значения являются наибольшими, так как любая плоскость C, отличная от указанным четырех, состоит не только из точек множеств

$U_{0,0}$ и $U_{0,1}$, она также имеет хотя бы с одним конусом общие точки, принадлежащие множеству $U_{1,0}$ (любую из них можно принять за c_0 при $\mu < \mu^*$). Действительно, если она пересекает координатные плоскости, для определенности в точках $(1,\alpha,0)$, $(1,0,\beta)$ и $(0,\gamma,\delta)$, где $\alpha,\beta > 0$, то при $\alpha,\beta < 1$ она проходит через внутренние точки конуса V_1, при $\alpha < 1 < \beta$ — конуса V_2, при $\alpha > 1 > \beta$ — конуса V_3, а при $\alpha,\beta > 1$ — одного из конусов V_2 или V_3 в зависимости от того, какое из чисел больше: $|\gamma|$ или $|\delta|$. Поэтому для плоскости C выполнены равенства $\underline{\varkappa}(C) = \underline{\varkappa}^0(C) = 2/3$.

З. Последние равенства сохранятся и при $\sqrt{2}/2 < \mu < \mu^*$ для конкретной плоскости C_3 (наряду с 11 другими конкретными плоскостями такого же типа), которая проходит через точки e_1, f_2 и состоит из точек трех множеств: $U_{0,0}$, $U_{0,1}$ и $U_{1,0}$. Действительно, ни одна точка $\alpha e_1 + f_2 = (\alpha, \mu^*, 1)$ этой плоскости не принадлежит конусу V_3, так как

$$\mu^2 \cdot 1^2 \leqslant (\mu^*)^2 \leqslant \alpha^2 + (\mu^*)^2, \tag{32}$$

и не может принадлежать замыканию обоих конусов V_1 и V_2 сразу в силу того, что система

$$\begin{cases} \mu^2\alpha^2 \geqslant (\mu^*)^2 + 1^2, \\ \mu^2(\mu^*)^2 \geqslant \alpha^2 + 1^2 \end{cases}$$

влечет за собой неравенство

$$\mu^4(\mu^*)^2 \geqslant \mu^2\alpha^2 + \mu^2 \geqslant (\mu^*)^2 + 1 + \mu^2, \tag{33}$$

обращающееся в равенство при $\mu^2 = (\mu^*)^2 \equiv x_1$, поскольку

$$(\mu^*)^6 = \frac{(1+\sqrt{5})^3}{2^3} = 2 + \sqrt{5} = 2(\mu^*)^2 + 1.$$

Следовательно, неравенство (33) неверно при $\mu^2 < x_1$: ведь второй корень x_2 квадратного трехчлена $(\mu^*)^2 x^2 - x - (1 + (\mu^*)^2)$ относительно переменной $x \equiv \mu^2$ отрицателен, а между корнями он принимает отрицательные значения.

Любая из остальных плоскостей C, как было доказано в п. Е, обязательно проходит и через точки множества $U_{1,0}$, поэтому $\underline{\varkappa}(C) \leqslant \underline{\varkappa}^0(C) \leqslant 2/3$ и значение $2/3$ наибольшее.

И. При $\mu = \mu^*$ плоскость C_3 (как и еще 11 плоскостей такого же типа) будет касаться конуса V_3 и проходить через граничную точку обоих конусов V_1 и V_2 сразу, так как и цепочка (32), и система (вместе с вытекающей из нее цепочкой (33)) из п. 3 выполнимы только тогда, когда все неравенства в них обращаются в равенства, т. е. когда $\alpha = 0$ и $|\alpha| = \mu^*$ соответственно. Эта плоскость состоит из точек множеств $U_{1,0}$, $U_{1,1}$ и $U_{0,2}$, поэтому $\underline{\varkappa}(C_3) = 1/3$ и $\underline{\varkappa}^0(C_3) = 1/2$.

Последние значения максимальны, поскольку любая другая плоскость C удовлетворяет неравенствам $\underline{\varkappa}(C_3) \leqslant \underline{\varkappa}^0(C_3) \leqslant 1/3$, потому что проходит, в частности, через точки множества $U_{2,0}$ (любую из них можно принять за c_0 при любом $\mu \geqslant \mu^*$). Действительно, пусть она пересекает две координатные плоскости, для определенности в точках $(1, \alpha, 0)$ и $(0, \beta, 1)$, где $\beta \geqslant \mu^*$. Тогда если $\alpha \geqslant 0$, то плоскость C проходит через точки пересечения конусов V_1 и V_2, имеющие все три положительные координаты, а если $\alpha < 0$ — то через точки пересечения конусов V_1 и V_2 с отрицательной первой координатой и положительными остальными.

К. Описанным только что свойством при $\mu^* < \mu \leqslant \sqrt{2}$ обладает уже любая плоскость C, поэтому наибольшее значение равно $1/3$ и реализуется оно, например, на плоскости C_3, содержащей точки множества $U_{2,0}$ и не содержащей ни точек множества $U_{2,1}$ (каких просто нет), ни точек множества $U_{3,0}$ (которые имеются только при $\mu = \sqrt{2}$, но удовлетворяют равенствам (31)).

Лемма 16 доказана.

Лемма 17. *Пусть для последовательности* $k_1 = 1, k_2 = 2, \ldots$ *построено семейство уравнений* $a_{\bar{\mu}} \in \mathcal{E}^3$, *существование которого утверждается в лемме* 15, *и для некоторой последовательности параметров* $\bar{\mu} \in \mathrm{M}^\infty$ *в соответствии с леммой* 16 *задано отображение* φ (23), *а для каждого* $m \in \mathbb{N}$ *и каждого вектора* $c \in \mathbb{R}^3_*$ *определены величины* $\varkappa_m(c)$ *и* $\varkappa^0_m(c)$, *каждая из которых образует свою последовательность и потому, в отличие от соответствующих величин в лемме 16, снабжена здесь индексом* m.

Тогда между первой последовательностью $\varkappa_m(c)$ *и величиной* $\nu(\varphi(c))$ *имеется следующая связь: если некоторое число* α *сразу для всех членов первой последовательности осуществляет оценку* $\varkappa_m(c) \geqslant \alpha$, *то* $\nu(\varphi(c)) \geqslant \alpha$, *если оценку* $\varkappa_m(c) \leqslant \alpha$, *то* $\nu(\varphi(c)) \leqslant \alpha$, *а если* $\varkappa_m(c) = \alpha$, *то* $\nu(\varphi(c)) = \alpha$. *Аналогичным образом связана и последовательность* $\varkappa^0_m(c)$ *с величиной* $\nu^0(\varphi(c))$.

Доказательство. 1. Построенная по числам $k_m = m$ в лемме 15 последовательность

$$t_0 = 0, \quad t_m = t_{m-1} + 3T_0 + 6\pi m, \quad m \in \mathbb{N},$$

удовлетворяет условиям (8) и (9), так как по лемме 6 имеем

$$\lim_{m\to\infty}\frac{t_m}{t_{m-1}} = 1 + \lim_{m\to\infty}\frac{3T_0+6\pi}{t_{m-1}} + 6\pi\cdot\lim_{m\to\infty}\frac{m-1}{t_{m-1}} = 1.$$

2. В силу равномерной ограниченности семейства $a_{\bar\mu}\in\mathcal{E}^3$, согласно лемме 15, существует такое число p (см. лемму 5), что любое ненулевое решение любого уравнения $a_{\bar\mu}$ имеет на любом промежутке длины T_0 не более чем p точек смены знака.

Поэтому при использовании формулы для частоты знаков любого ненулевого решения любого из уравнений $a_{\bar\mu}$, согласно лемме 6, можно не брать в расчет как полуинтервал $(0;T_0]$, так и полуинтервалы $(r_m;r_m+T_0]$, $(s_m;s_m+T_0]$ и $(t_m;t_m+T_0]$ при каждом $m\in\mathbb{N}$, на которых оно имеет не более чем по p нулей (т. е. не учитывать их вклад ни в длину промежутка, на котором подсчитывается число точек смены знака решения, ни в само это число).

3. Таким образом, если выполнены оценки $\varkappa_1(c)\geqslant\alpha$, $\varkappa_2(c)\geqslant\alpha,\ldots$, то по лемме 6 имеем

$$\nu(\varphi(c)) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{\pi}{t_m}\nu(\varphi(c),t_m) =$$

$$= \overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}(\nu(\varphi(c),t_{m-1}+T_0,r_m)+\nu(\varphi(c),r_m+T_0,s_m)+\nu(\varphi(c),s_m+T_0,t_m))}{\sum\limits_{i=1}^{m}6\pi k_i} =$$

$$= \overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{6\pi(k_1\cdot\varkappa_1(c)+k_2\cdot\varkappa_2(c)+\ldots+k_m\cdot\varkappa_m(c))}{6\pi(k_1+k_2+\ldots+k_m)} \geqslant \alpha.$$

4. Все остальные утверждения настоящей леммы доказываются аналогично.

Лемма 17 доказана.

§ 7. ДЕМОНСТРАЦИОННЫЕ ПРИМЕРЫ

Лемма 18. *Пусть для последовательности $k_1=1, k_2=2,\ldots$ по лемме 15 построено семейство уравнений $a_{\bar\mu}\in\mathcal{E}^3$, зависящее от последовательности параметров $\bar\mu\in\mathrm{M}^\infty$. Тогда если при всех значениях $m\in\mathbb{N}$ выполнены некоторые условия, то главные частоты уравнения $a_{\bar\mu}$ (ниже этот аргумент у них для краткости опущен) принимают определенные значения, а именно:*

1) *если $\mu_m=\sqrt{2}/2$, то*

$$\omega_1=\omega_1^0=\omega_{\underline{2}}=\frac{2}{3}<\omega_{\underline{2}}^0=\frac{5}{6}<\omega_{\overline{2}}=\omega_{\overline{2}}^0=\omega_3=\omega_3^0=1;$$

2) *если* $\sqrt{2}/2 < \mu_m < 1$, *то*

$$\omega_1 = \omega_1^0 = \omega_{\underline{2}} = \omega_{\underline{2}}^0 = \frac{2}{3} < \omega_{\overline{2}} = \omega_{\overline{2}}^0 = \omega_3 = \omega_3^0 = 1;$$

3) *если* $\mu_m = 1$, *то*

$$\omega_1 = \frac{1}{3} < \omega_1^0 = \omega_{\underline{2}} = \omega_{\underline{2}}^0 = \omega_{\overline{2}} = \omega_{\overline{2}}^0 = \frac{2}{3} < \omega_3 = \omega_3^0 = 1;$$

4) *если* $1 < \mu_m < \mu^*$ (*см. лемму* 16), *то*

$$\omega_1 = \omega_1^0 = \frac{1}{3} < \omega_{\underline{2}} = \omega_{\underline{2}}^0 = \omega_{\overline{2}} = \omega_{\overline{2}}^0 = \frac{2}{3} < \omega_3 = \omega_3^0 = 1;$$

5) *если* $\mu_m = \mu^*$, *то*

$$\omega_1 = \omega_1^0 = \omega_{\underline{2}} = \frac{1}{3} < \omega_{\underline{2}}^0 = \frac{1}{2} < \omega_{\overline{2}} = \omega_{\overline{2}}^0 = \frac{2}{3} < \omega_3 = \omega_3^0 = 1;$$

6) *если* $\mu^* < \mu_m < \sqrt{2}$, *то*

$$\omega_1 = \omega_1^0 = \omega_{\underline{2}} = \omega_{\underline{2}}^0 = \frac{1}{3} < \omega_{\overline{2}} = \omega_{\overline{2}}^0 = \frac{2}{3} < \omega_3 = \omega_3^0 = 1;$$

7) *если* $\mu_m = \sqrt{2}$, *то*

$$\omega_1 = 0 < \omega_1^0 = \omega_{\underline{2}} = \omega_{\underline{2}}^0 = \frac{1}{3} < \omega_{\overline{2}} = \omega_{\overline{2}}^0 = \omega_3 = \omega_3^0 = \frac{2}{3}.$$

Доказательство. 1. При каждой последовательности $\bar{\mu}$ отображение φ (23) есть изоморфизм линейных пространств $\mathbb{R}^3$ и $\mathcal{S}(a_{\bar{\mu}})$, поэтому главные частоты уравнения $a_{\bar{\mu}}$ можно вычислять по формулам леммы 3.

2. В каждом из перечисленных случаев 1—7 для каждой из величин $\varkappa_m(c)$ и $\varkappa_m^0(c)$ имеет место ровно один из пп. а—г леммы 16, причем при всех $m \in \mathbb{N}$ сразу. Поэтому все неравенства или равенства для этих величин переносятся, согласно лемме 17, на соответствующие частоты соответствующих решений $\varphi(c)$, а в результате однозначно вычисляются старшие и младшие частоты уравнения.

Например, в первом случае мы оказываемся в условиях п. а, в котором для всех $c \in \mathbb{R}_*^3$ выполнены соотношения $\varkappa(c) \geqslant \frac{2}{3} = \varkappa^0(e_1)$, откуда

$$\nu^0(\varphi(c)) \geqslant \nu(\varphi(c)) \geqslant \frac{2}{3} = \nu^0(\varphi(e_1)) \geqslant \nu(\varphi(e_1)),$$

а значит, $\omega_1^0 = \omega_1 = 2/3$.

3. В каждом из перечисленных случаев 1—7 для каждой из величин $\bar{\varkappa}_m(C)$ и $\bar{\varkappa}^0_m(C)$ имеет место ровно один из пп. д или е леммы 16, причем при всех $m \in \mathbb{N}$ сразу. Поэтому все оценки снизу для одного вектора (не зависящего от m) и все равенства, дающие оценки сверху (равномерные по m), переносятся, согласно лемме 17, на соответствующие частоты соответствующих решений, а в результате однозначно вычисляются главные частоты уравнения с нижним индексом $\bar{2}$.

Например, в третьем случае мы оказываемся в условиях п. е, в котором для всех $C \in G^2_*$ выполнены соотношения $\varkappa(c_0) \geqslant \frac{2}{3} = \bar{\varkappa}^0(C_2)$, откуда

$$\sup_{c\in C} \nu(\varphi(c)) \geqslant \nu(\varphi(c_0)) \geqslant \frac{2}{3},$$

$$\omega^0_{\underset{\bar{}}{2}} \geqslant \omega_{\underset{\bar{}}{2}} = \inf_{C\in G^2_*} \sup_{c\in C} \nu(\varphi(c)) \geqslant \frac{2}{3} \geqslant \sup_{c\in C_2} \nu^0(\varphi(c)) \geqslant \omega^0_{\underset{\bar{}}{2}} \geqslant \omega_{\bar{2}},$$

а значит, $\omega^0_{\bar{2}} = \omega_{\bar{2}} = 2/3$.

4. Для величин $\underline{\varkappa}_m(c)$ и $\underline{\varkappa}^0_m(c)$ рассуждения аналогичны предыдущим, но опираются на пп. ж—к леммы 16.

Лемма 18 доказана.

Доказательство теоремы VII. Если для каждого из семи сформулированных в лемме 18 случаев взять по одному представителю из построенного в ней семейства уравнений, то они реализуют полный комплект приведенных в теореме VII цепочек соотношений между главными частотами (правда, в теореме номера этих случаев перечислены в следующем порядке: 2, 4, 6, 1, 3, 5, 7).

Доказательство теорем X, XIII и XIV. 1. Примером точки разрыва для функции ω_1 служит уравнение a_1 из построенного в лемме 18 семейства, взятое при постоянной последовательности $\mu_1 = \mu_2 = \ldots \equiv 1$, т. е. относящееся к третьему из перечисленных в лемме случаев, в котором $\omega_1(a_1) = 1/3$.

Действительно, это уравнение обладает тем свойством, что в любой его окрестности (в силу непрерывности семейства уравнений по $\bar{\mu}$, вытекающей из леммы 15) найдется возмущенное уравнение $a_{\bar{\mu}}$ из того же семейства, но подпадающее под второй пункт леммы 18, а значит, удовлетворяющее равенству $\omega_1(a_{\bar{\mu}}) = 2/3$.

Более того, если возмущенное уравнение $a_{\bar{\mu}}$ подчинить дополнительному условию $\mu_m \to 1$ при $m \to \infty$, то для него, помимо указанного равенства, по той же лемме 15 будет выполнено условие $a_{\bar{\mu}} \in \mathcal{B}(a_1)$ (определение 5), из которого следует, что функционал ω_1 не инвариантен в точке a_1 относительно бесконечно малых возмущений, а значит, в силу лемм 8 и 9, он не является полунепрерывной функцией — ни сверху, ни снизу.

2. Аналогично примером точки разрыва и неинвариантности относительно бесконечно малых возмущений для функций ω_1^0, $\omega_{\bar{2}}$ и $\omega_{\bar{2}}^0$ служит уравнение a_1, для функций $\omega_{\underline{2}}$ и $\omega_{\underline{2}}^0$ — уравнение a_{μ^*} (из случая 5 леммы 18), а для функций ω_3 и ω_3^0 — уравнение $a_{\sqrt{2}}$ (из случая 7).

Теоремы X, XIII и XIV доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.
2. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.
3. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
4. *Левин А. Ю.* Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = 0$ // УМН. 1969. Т. 24, № 2. С. 43—96.
5. *Коршикова Н. Л.* О нулях решений одного класса линейных уравнений n-го порядка // Дифференц. уравн. 1985. Т. 15, № 5. С. 757—764.
6. *Асташова И. В.* Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений четного порядка // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 3—17.
7. *Миллионщиков В. М.* Доказательство достижимости центральных показателей // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 1. С. 99—104.
8. *Былов Б. Ф., Изобов Н. А.* Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы // Дифференц. уравн. 1969. Т. 5, № 10. С. 1794—1803.
9. *Изобов Н. А.* О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы // Там же. 1965. Т. 1, № 4. С. 469—477.
10. *Изобов Н. А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 12. М., 1974. С. 71—146.
11. *Диб К. А.* Одновременная достижимость центральных показателей // Дифференц. уравн. 1974. Т. 10, № 12. С. 2125—2136.
12. *Барабанов Е. А.* Строение множества нижних показателей линейных дифференциальных систем // Там же. 1989. Т. 25, № 12. С. 1084—1085.

13. *Сергеев И. Н.* К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111—166.

14. *Сергеев И. Н.* О нижних характеристических показателях Перрона линейных систем // Международная конференция, посвященная 103-летию со дня рождения И. Г. Петровского: Тез. докл. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. С. 199—200.

15. *Сергеев И. Н.* Определение характеристических частот линейного уравнения // Дифференц. уравн. 2004. Т. 40, № 11. С. 1573.

16. *Сергеев И. Н.* Подвижность характеристических частот линейного уравнения при равномерно малых и бесконечно малых возмущениях // Там же. С. 1576.

17. *Сергеев И. Н.* О классах Бэра характеристических частот линейного уравнения // Там же. 2005. Т. 41, № 6. С. 852.