Самостоятельная работа № 3

Задание 1. Метод Фурье для уравнения Лапласа в круге, вне круга, в кольце и в секторе.

- Найти представление решения двумерного уравнения Лапласа $u_{xx}+u_{yy}=0$ в заданной области в виде ряда, выполнив разделение переменных в полярных координатах;
- просуммируйте ряд, представьте решение в интегральной форме;
- вычислите решение при указанных в таблице граничных значениях.

	Область	Краевые условия	Граничные значения
1.	круг $r \le R$	$u\vert_{r=R}=\theta(\phi)$	$\theta(\phi)=\sin^2 2\phi$
2.	круг $r \le R$	$u_r\vert_{r=R}=\theta(\phi)$	$\theta(\phi)=\cos^3\phi$
3.	круг $r \le R$	$(u_r-u)\vert_{r=R}=\theta(\phi)$	$\theta(\phi)=1$
4.	вне круга $r \ge R$	$u\vert_{r=R}=\theta(\phi)$	$\theta(\phi)=\sin\phi$
5.	вне круга $r \ge R$	$u_r\vert_{r=R}=\theta(\phi)$	$\theta(\phi)=\cos^2\phi$
6.	вне круга $r \ge R$	$(u_r-u)\vert_{r=R}=\theta(\phi)$	$\theta(\phi)=\sin 2\phi$
7.	полукруг $r \le R,\ 0 \le \phi \le \pi$	$u\vert_{r=R}=\theta(\phi)$ $u\vert_{\phi=0}=u\vert_{\phi=\pi}=0$	$\theta(\phi)=\sin 3\phi$
8.	полукруг $r \le R,\ 0 \le \phi \le \pi$	$u\vert_{r=R}=\theta(\phi)$ $u_\phi\vert_{\phi=0}=u\vert_{\phi=\pi}=0$	$\theta(\phi)=\cos(2\phi)-1$
9.	полукруг $r \le R,\ 0 \le \phi \le \pi$	$u_r\vert_{r=R}=\theta(\phi)$ $u\vert_{\phi=0}=u_\phi\vert_{\phi=\pi}=0$	$\theta(\phi)=1$
10.	полукруг $r \le R,\ 0 \le \phi \le \pi$	$u_r\vert_{r=R}=\theta(\phi)$ $u_\phi\vert_{\phi=0}=u_\phi\vert_{\phi=\pi}=0$	$\theta(\phi)=\cos(\phi/2)$
11.	полукруг $r \le R$, $-\pi/2 \le \phi \le \pi/2$	$u\vert_{r=R}=\theta(\phi)$ $u\vert_{\phi=-\pi/2}=u\vert_{\phi=\pi/2}=0$	$\theta(\phi)=1-\sin^2\phi$
12.	полукруг $r \le R$, $-\pi/2 \le \phi \le \pi/2$	$u_r\vert_{r=R}=\theta(\phi)$ $u\vert_{\phi=-\pi/2}=u\vert_{\phi=\pi/2}=0$	$\theta(\phi)=\cos\phi$
13.	сектор $r \le R,\ 0 \le \phi \le \pi/2$	$u_r\vert_{r=R}=\theta(\phi)$ $u\vert_{\phi=0}=u\vert_{\phi=\pi/2}=0$	$\theta(\phi)=-\sin 2\phi$
14.	сектор $r \le R,\ 0 \le \phi \le \pi/2$	$u_r\vert_{r=R}=\theta(\phi)$ $u_\phi\vert_{\phi=0}=u\vert_{\phi=\pi/2}=0$	$\theta(\phi)=\cos 3\phi$
15.	сектор $r \le R,\ 0 \le \phi \le \pi/2$	$u\vert_{r=R}=\theta(\phi)$ $u\vert_{\phi=0}=u_\phi\vert_{\phi=\pi/2}=0$	$\theta(\phi)=\sin^2\phi$
16.	сектор $r \le R,\ 0 \le \phi \le \pi/2$	$u\vert_{r=R}=\theta(\phi)$ $u_\phi\vert_{\phi=0}=u_\phi\vert_{\phi=\pi/2}=0$	$\theta(\phi)=1$

17.	сектор $r \le R,\ 0 \le \phi \le \pi/3$	$u\|_{r=R} = \theta(\phi)$ $u\|_{\phi=0} = u\|_{\phi=\pi/3} = 0$	$\theta(\phi) = -2\sin 3\phi$
18.	сектор $r \le R,\ 0 \le \phi \le \pi/3$	$u\|_{r=R} = \theta(\phi)$ $u_\phi\|_{\phi=0} = u\|_{\phi=\pi/3} = 0$	$\theta(\phi) = 1$
19.	сектор $r \le R,\ 0 \le \phi \le \pi/3$	$u_r\|_{r=R} = \theta(\phi)$ $u\|_{\phi=0} = u_\phi\|_{\phi=\pi/3} = 0$	$\theta(\phi) = -\cos\phi$
20.	сектор $r \le R,\ 0 \le \phi \le \pi/3$	$u_r\|_{r=R} = \theta(\phi)$ $u_\phi\|_{\phi=0} = u_\phi\|_{\phi=\pi/3} = 0$	$\theta(\phi) = -1$
21.	кольцо $1 \le r \le R,$	$u\|_{r=1} = \gamma(\phi)$ $u\|_{r=R} = \theta(\phi)$	$\gamma(\phi) = 0$ $\theta(\phi) = \sin 2\phi$
22.	кольцо $1 \le r \le R,$	$u_r\|_{r=1} = \gamma(\phi)$ $u\|_{r=R} = \theta(\phi)$	$\gamma(\phi) = 0$ $\theta(\phi) = \cos^2\phi$
23.	кольцо $1 \le r \le R,$	$u\|_{r=1} = \gamma(\phi)$ $u_r\|_{r=R} = \theta(\phi)$	$\gamma(\phi) = 0$ $\theta(\phi) = -\sin^2\phi$
24.	кольцо $1 \le r \le R,$	$u_r\|_{r=1} = \gamma(\phi)$ $u_r\|_{r=R} = \theta(\phi)$	$\gamma(\phi) = 0$ $\theta(\phi) = 1$
25.	кольцо $1 \le r \le R,$	$u\|_{r=1} = \gamma(\phi)$ $u\|_{r=R} = \theta(\phi)$	$\gamma(\phi) = \cos\phi + 2$ $\theta(\phi) = 0$
26.	кольцо $1 \le r \le R,$	$u_r\|_{r=1} = \gamma(\phi)$ $u\|_{r=R} = \theta(\phi)$	$\gamma(\phi) = -\sin^3\phi$ $\theta(\phi) = 0$
27.	кольцо $1 \le r \le R,$	$u\|_{r=1} = \gamma(\phi)$ $u_r\|_{r=R} = \theta(\phi)$	$\gamma(\phi) = 1 - \cos 3\phi$ $\theta(\phi) = 0$
28.	кольцо $1 \le r \le R,$	$u_r\|_{r=1} = \gamma(\phi)$ $u_r\|_{r=R} = \theta(\phi)$	$\gamma(\phi) = 1$ $\theta(\phi) = 0$
29.	кольцо $\rho \le r \le 1,$	$u\|_{r=\rho} = \gamma(\phi)$ $u\|_{r=1} = \theta(\phi)$	$\gamma(\phi) = 0$ $\theta(\phi) = \sin 2\phi + 1$
30.	кольцо $\rho \le r \le 1,$	$u\|_{r=\rho} = \gamma(\phi)$ $u\|_{r=1} = \theta(\phi)$	$\gamma(\phi) = \cos^2\phi$ $\theta(\phi) = 0$

Задание 2. Метод Фурье для волнового уравнения и для уравнения теплопроводности в круге, вне круга и в секторе. Уравнение Бесселя и функции Бесселя.

- Найти представление решения однородного волнового уравнения в виде ряда, выполнив разделение переменных;
- найти соответствующее соотношение ортогональности между получившимися функциями Бесселя;
- свести неоднородное уравнение к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, проинтегрировать ее и представить решение в виде ряда.

	Уравнение, область	Краевые условия	Начальные условия
1.	$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + t(x^2 + y^2)$ $r^2 = x^2 + y^2 \le 4$	$u\|_{r=2} = 0$	$u\|_{t=0} = 0$ $u_t\|_{t=0} = 0$
2.	$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + 2txy$ $r^2 = x^2 + y^2 \le 9$	$u\|_{r=3} = 0$	$u\|_{t=0} = 0$ $u_t\|_{t=0} = 0$
3.	$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ $r^2 = x^2 + y^2 \le 4$	$u_r\|_{r=2} = 0$	$u\|_{t=0} = x^2 + y^2$ $u_t\|_{t=0} = 1$
4.	$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ $r^2 = x^2 + y^2 \le 9$	$u_r\|_{r=3} = 0$	$u\|_{t=0} = 1$ $u_t\|_{t=0} = 2xy$
5.	$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + t$ $r^2 = x^2 + y^2 \ge 4$	$u\|_{r=2} = 0$	$u\|_{t=0} = 0$ $u_t\|_{t=0} = 1$
6.	$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + 1/(x^2 + y^2)$ $r^2 = x^2 + y^2 \ge 4$	$u\|_{r=2} = 0$	$u\|_{t=0} = 0$ $u_t\|_{t=0} = 0$
7.	$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ $r^2 = x^2 + y^2 \le 4$	$u_r\|_{r=2} = 0$	$u\|_{t=0} = 2xy$ $u_t\|_{t=0} = x^2 - y^2$
8.	$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ $r^2 = x^2 + y^2 \le 4$	$u_r\|_{r=2} = 0$	$u\|_{t=0} = x^2$ $u_t\|_{t=0} = y^2$
9.	$u_{tt} = 4(u_{xx} + u_{yy}) + tx$ $r^2 = x^2 + y^2 \le 1$	$u\|_{r=1} = 0$	$u\|_{t=0} = 1$ $u_t\|_{t=0} = 0$
10.	$u_{tt} = 4(u_{xx} + u_{yy}) - t(x^3 - 3xy^2)$ $r^2 = x^2 + y^2 \le 1$	$u_r\|_{r=1} = 0$	$u\|_{t=0} = 0$ $u_t\|_{t=0} = 0$
11.	$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ $r^2 = x^2 + y^2 \le 1$	$u\|_{r=1} = 0$	$u\|_{t=0} = xy^2$ $u_t\|_{t=0} = x^2y$
12.	$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + 1$ $r^2 = x^2 + y^2 \ge 1$	$u\|_{r=1} = 0$	$u\|_{t=0} = 0$ $u_t\|_{t=0} = 0$
13.	$u_t = 4(u_{xx} + u_{yy}) + tx$ $r^2 = x^2 + y^2 \le 1$	$u\|_{r=1} = 0$	$u\|_{t=0} = 1$
14.	$u_t = 4(u_{xx} + u_{yy}) - t(x^3 - 3xy^2)$ $r^2 = x^2 + y^2 \le 1$	$u_r\|_{r=1} = 0$	$u\|_{t=0} = 0$

15.	$u_t = u_{xx} + u_{yy} + t(x^2 - y^2)$ $r^2 = x^2 + y^2 \leq 4$	$u_r\|_{r=2} = 0$	$u\|_{t=0} = 2xy$
16.	$u_t = u_{xx} + u_{yy} + 2txy$ $r^2 = x^2 + y^2 \leq 9$	$u\|_{r=3} = 0$	$u\|_{t=0} = 0$
17.	$u_t = u_{xx} + u_{yy} + y^2$ $r^2 = x^2 + y^2 \leq 4$	$u_r\|_{r=2} = 0$	$u\|_{t=0} = x^2$
18.	$u_t = u_{xx} + u_{yy} + 1$ $r^2 = x^2 + y^2 \leq 9$	$u_r\|_{r=3} = 0$	$u\|_{t=0} = 2xy$
19.	$u_t = u_{xx} + u_{yy} + t(x^2 + y^2)$ $r^2 = x^2 + y^2 \leq 4$	$u\|_{r=2} = 0$	$u\|_{t=0} = 0$
20.	$u_t = u_{xx} + u_{yy} + 1/(x^2 + y^2)$ $r^2 = x^2 + y^2 \geq 4$	$u\|_{r=2} = 0$	$u\|_{t=0} = 0$
21.	$u_t = u_{xx} + u_{yy}$ $r^2 = x^2 + y^2 \leq 1$	$u\|_{r=1} = 0$	$u\|_{t=0} = xy^2$
22.	$u_t = u_{xx} + u_{yy}$ $r^2 = x^2 + y^2 \leq 4$	$u_r\|_{r=2} = 0$	$u\|_{t=0} = x^2 + y^2$
23.	$u_t = u_{xx} + u_{yy} + t$ $r^2 = x^2 + y^2 \geq 4$	$u\|_{r=2} = 0$ $u\|_{r\to\infty} < \infty$	$u\|_{t=0} = 1$
24.	$u_t = u_{xx} + u_{yy} + 1$ $r^2 = x^2 + y^2 \geq 1$	$u\|_{r=1} = 0$	$u\|_{t=0} = 0$
25.	$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + 2t(x - y)$ $r^2 = x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq \phi \leq \pi$	$u\|_{r=1} = 0$ $u\|_{\phi=0} = u\|_{\phi=\pi} = 0$	$u\|_{t=0} = 0$ $u_t\|_{t=0} = 0$
26.	$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ $r^2 = x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq \phi \leq \pi$	$u\|_{r=1} = 0$ $u\|_{\phi=0} = u_\phi\|_{\phi=\pi} = 0$	$u\|_{t=0} = x^2 + y^2$ $u_t\|_{t=0} = 0$
27.	$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ $r^2 = x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq \phi \leq \pi$	$u\|_{r=1} = 0$ $u_\phi\|_{\phi=0} = u\|_{\phi=\pi} = 0$	$u\|_{t=0} = 0$ $u_t\|_{t=0} = 2xy$
28.	$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + t^2$ $r^2 = x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq \phi \leq \pi$	$u_r\|_{r=1} = 0$ $u\|_{\phi=0} = u\|_{\phi=\pi} = 0$	$u\|_{t=0} = 0$ $u_t\|_{t=0} = 0$
29.	$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ $r^2 = x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq \phi \leq \pi$	$u_r\|_{r=1} = 0$ $u\|_{\phi=0} = u_\phi\|_{\phi=\pi} = 0$	$u\|_{t=0} = xy$ $u_t\|_{t=0} = 0$
30.	$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ $r^2 = x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq \phi \leq \pi$	$u_r\|_{r=0} = 0$ $u_\phi\|_{\phi=0} = u\|_{\phi=\pi} = 0$	$u\|_{t=0} = 0$ $u_t\|_{t=0} = 1 - x - y$

Задание 3. Фундаментальные решения.

Найти фундаментальные решения следующих дифференциальных операторов. Проверить, что они удовлетворяют (вне особенностей) однородному уравнению по основным переменным и сопряженному – по двойственным.

Указание. Попробуйте заменами независимых переменных и умножением функции на множитель избавиться от младших членов и привести уравнение к известному Вам с известным фундаментальным решением.

1. $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - 2\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}$
2. $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - 2\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}$
3. $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
4. $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2I$
5. $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
6. $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
7. $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
8. $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
9. $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
10. $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 3\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 3\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
11. $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
12. $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
13. $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 4\frac{\partial}{\partial y} - 3I$
14. $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
15. $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$
16. $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2I$
17. $\frac{\partial}{\partial t} - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
18. $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial}{\partial z}$
19. $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial}{\partial y} + 3\frac{\partial}{\partial z}$
20. $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
21. $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial t}$
22. $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial y \partial t} + 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial t} - 2\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}$
23. $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
24. $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$
25. $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 9\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 5\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}$
26. $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
27. $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - 2\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}$
28. $-\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Задание 4. Вариационные задачи.

Найти уравнение и краевые условия для функции, которая доставляет минимум функционалу; решить соответствующую задачу:

1. $J = \int\limits_{|x|<1,|y|<1} (u_x^2 + u_y^2 + 2xyu)\,dxdy$ при условиях $u(x,\pm 1) = 0$;
2. $J = \int\limits_{|x|<1,|y|<1} (u_x^2 + u_y^2 - 2\sin\pi x\,\sin\pi y\,u)\,dxdy$ при условиях $u(\pm 1, y) = 0$;
3. $J = \int\limits_{|x|<1,|y|<1} (u_x^2 + u_y^2 - u_x)\,dxdy$ при условиях $u(x,\pm 1) = 0$;
4. $J = \int\limits_{|x|<1,|y|<1} (u_x^2 + u_y^2 - 2u_y)\,dxdy$ при условиях $u(x,\pm 1) = u(\pm 1, y) = 0$;
5. $J = \int\limits_{|x|<1,|y|<1} (u_x^2 + u_y^2)\,dxdy$ при условиях $u(x,1) = u(x,-1)$, $u(1,y) = u(-1,y)$;
6. $J = \int\limits_{x^2+y^2<1} (u_x^2 + u_y^2 + u)\,dxdy$ при условии $u|_{x^2+y^2=1} = 0$;
7. $J = \int\limits_{x^2+y^2<1} (u_x^2 + u_y^2 - (x^2+y^2)u)\,dxdy$;
8. $J = \int\limits_{x^2+y^2<1} (u_x^2 + u_y^2)\,dxdy$ при условии $u|_{x^2+y^2=1} = 1$;
9. $J = \int\limits_{|x|<1,|y|<1} (u_x^2 + u_y^2 + 2xu_x + 2yu_y)\,dxdy$ при условиях $u_y(x,\pm 1) = 0$;
10. $J = \int\limits_{|x|<1,|y|<1} (u_x^2 + u_y^2 + e^{x+y}u)\,dxdy$ при условиях $u_x(\pm 1, y) = 0$;
11. $J = \int\limits_{|x|<1,|y|<1} (u_x^2 + u_y^2 - uu_x)\,dxdy$ при условиях $u(\pm 1, y) = 0$;
12. $J = \int\limits_{|x|<1,|y|<1} (u_x^2 + u_y^2 + 2u_xu_y)\,dxdy$ при условиях $u(x,\pm 1) = u(\pm 1, y) = 0$;
13. $J = \int\limits_{x^2+y^2<1} u_xu_y dxdy$ при условии $u|_{x^2+y^2=1} = 0$;
14. $J = \int\limits_{x^2+y^2<1} (u_x^2 + 2u_xu_y + u_y^2)\,dxdy$ при условии $u|_{x^2+y^2=1} = 0$;
15. $J = \int\limits_{x^2+y^2<1} (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 2u_{xx}u_{yy})\,dxdy$;
16. $J = \int\limits_{|x|<1,|y|<1,|z|<1} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u)\,dxdydz$ при условиях $u(x,y,\pm 1) = u_y(x,\pm 1,z) = 0$;
17. $J = \int\limits_{|x|<1,|y|<1,|z|<1} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - 2u\sin\pi z)\,dxdydz$ при условиях $u(\pm 1, y, z) = 0$;

18. $J = \int\limits_{|x|<1,|y|<1,|z|<1} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_x)\, dxdydz$ при условиях $u(x, \pm 1, z) = 0$;

19. $J = \int\limits_{|x|<1,|y|<1,|z|<1} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - 2u_y)\, dxdydz$ при условиях $u(x, y, \pm 1) = u(x, \pm 1, y) = u(\pm 1, y, z) = 0$;

20. $J = \int\limits_{|x|<1,|y|<1,|z|<1} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, dxdydz$ при условиях $u(x, y, 1) = u(x, y, -1)$, $u(1, y, z) = u(-1, y, z)$;

21. $J = \int\limits_{x^2+y^2+z^2<1} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u)\, dxdydz$ при условии $u|_{x^2+y^2+z^2=1} = 0$;

22. $J = \int\limits_{x^2+y^2+z^2<1} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - (x^2 + y^2 + z^2)u)\, dxdydz$;

23. $J = \int\limits_{x^2+y^2+z^2<1} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, dxdydz$ при условии $u|_{x^2+y^2+z^2=1} = 1$;

24. $J = \int\limits_{|x|<1,|y|<1,|z|<1} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + 2xu_x + 2yu_y + 2zu_z)\, dxdydz$ при условиях $u(\pm 1, y, z) = u_y(x, \pm 1, z) = 0$;

25. $J = \int\limits_{|x|<1,|y|<1,|z|<1} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + e^{x+y}u)\, dxdydz$ при условиях $u_x(\pm 1, y, z) = u(x, y, \pm 1) = 0$;

26. $J = \int\limits_{|x|<1,|y|<1,|z|<1} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - uu_x)\, dxdydz$ при условиях $u(\pm 1, y, z) = u(x, \pm 1, z) = 0$;

27. $J = \int\limits_{|x|<1,|y|<1,|z|<1} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + 2u_xu_y)\, dxdydz$ при условиях $u(x, y, \pm 1) = u(x, \pm 1, y) = u(\pm 1, y, z) = 0$;

28. $J = \int\limits_{x^2+y^2+z^2<1} (u_xu_y + u_xu_z + u_yu_z)\, dxdydz$ при условии $u|_{x^2+y^2+z^2=1} = 0$;

29. $J = \int\limits_{x^2+y^2+z^2<1} (u_x^2 + 2u_xu_y + u_y^2 + u_z^2)\, dxdydz$ при условиях $u|_{x^2+y^2+z^2=1} = 0$;

30. $J = \int\limits_{x^2+y^2+z^2<1} (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2 + 2u_{xx}u_{yy} + 2u_{xx}u_{zz} + 2u_{yy}u_{zz})\, dxdydz$.

Задание 5.

1. Пусть $u(x,t)$ — решение в $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ задачи:

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad u_x\big|_{x=0} = 0,$$
$$u\big|_{t=0} = \begin{cases} \sin^3 x, & \pi < x < 2\pi, \\ 0, & x \notin (\pi, 2\pi), \end{cases} \qquad u_t\big|_{t=0} = 0.$$

а) Нарисовать график $u(x, 2\pi)$.

б) Тот же вопрос для случая, когда уравнение рассматривается для $x \in [0, 2\pi]$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и ставится дополнительное условие $u\big|_{x=2\pi} = 0$.

в) Тот же вопрос для случая, когда последнее условие заменяется условием $u_x\big|_{x=2\pi} = 0$.

2. Указать все значения постоянных α, β и γ, при которых существует решение $u \in C^2(\overline{Q})$ смешанной задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0,$$
$$u\big|_{t=0} = \alpha x^4 + \beta x^3 + \sin x, \qquad u_t\big|_{t=0} = \gamma \cos x$$

в квадрате $\overline{Q} = [0, \pi] \times [0, \pi]$. Найти это решение.

3. Пусть $u(x,t)$ — решение в $[0,1] \times \overline{\mathbb{R}}_+$ смешанной задачи

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \qquad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0,$$
$$u\big|_{t=0} = 4\sin^3 \pi x, \qquad u_t\big|_{t=0} = 30x(1-x).$$

а) Найти $f(\frac{1}{3})$, где $f(t) = \displaystyle\int_0^1 \left[u_t^2(x,t) + 4u_x^2(x,t)\right] dx$.

б) Найти $u(x, 2)$.

4. Пусть $u(x,t)$ — решение в $[0,\pi] \times \overline{\mathbb{R}}_+$ смешанной задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \sin^{100} x, \quad u_t\big|_{t=0} = 0.$$

Верно ли, что $|u_t(x, \frac{\pi}{2})| > 100$ на множестве, мера которого больше 1?

5. Пусть $u(x,t)$ — решение в $[0,1] \times \overline{\mathbb{R}}_+$ смешанной задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = x^2(1-x).$$

Найти $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_0^1 \left[u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)\right] dx$.

6. Пусть $u(x,t)$ — решение в $[0,1] \times \overline{\mathbb{R}}_+$ смешанной задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = x^2(1-x)^2.$$

Найти $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_0^{1/2} \left[u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)\right] dx$.

7. Пусть $u(x,t)$ — решение в $[0,\pi]\times\overline{\mathbb{R}}_+$ смешанной задачи

$$u_{tt}=u_{xx}+\sin x\cos 5x\sin\omega t,$$
$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=\pi}=0,\quad u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=0.$$

Найти все ω, для которых $\sup\limits_{\overline{Q}}|u(x,t)|<+\infty$.

8. Пусть $u(x,t)$ — решение в $[0,1]\times\overline{\mathbb{R}}_+$ смешанной задачи

$$u_{tt}=u_{xx},\quad u\big|_{x=0}=0,\ \ u\big|_{x=1}=\sin\alpha t,\quad u\big|_{t=0}=0,\ \ u_t\big|_{t=0}=\alpha x,$$

Найти все α, для которых $\sup\limits_{\overline{Q}}|u(x,t)|<+\infty$.

9. а) Найти все $k>0$, для которых при некоторой функции $\varphi(x)\in C^\infty\big((0,\pi)\big)$ существует неограниченное решение в $[0,\pi]\times\overline{\mathbb{R}}_+$ задачи

$$u_{tt}=9u_{xx}\,,\qquad u\big|_{x=0}=(u_x-ku)\big|_{x=\pi}=0,$$
$$u\big|_{t=0}=0,\qquad u_t\big|_{t=0}=\varphi(x).$$

б) Для $k=1$ описать все функции $\varphi(x)\in C^\infty\big((0,l)\big)$, для которых решение $u(x,t)$ этой задачи ограничено.

10. Пусть $u(x,t)\in C^2\big((0,\pi)\times(0,+\infty)\big)\cap C^1\big([0,\pi]\times[0,+\infty)\big)$ — решение в $[0,\pi]\times\overline{\mathbb{R}}_+$ краевой задачи:

$$u_{tt}=u_{xx},\quad u\big|_{x=0}=f(t),\quad u\big|_{x=\pi}=0,\quad u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=0,$$

$f(t)$ — гладкая функция и $f(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Может ли решение этой задачи неограниченно возрастать по времени, то есть по переменной t?

11. Показать, что для бесселевых функций

$$J_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k}k!(n+k)!},\qquad n=1,2,\ldots$$

имеют место тождества $J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2}{n}J_n(x)$, $J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J_n'(x)$, $xJ_n'(x)=-xJ_{n+1}(x)+nJ_n(x)$.

12. Проверить справедливость интегрального тождества

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\cos tx}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

для бесселевой функции $J_0(x)$, где

$$J_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k}k!(n+k)!},\qquad n=1,2,\ldots$$

13. Показать, что $J_0'(x) = -J_1(x)$, $J_0''(x) = \frac{1}{2}[J_2(x) - J_0(x)]$ для бесселевых функций

$$J_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k}k!(n+k)!}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

14. Проверить справедливость тождеств (α и β – постоянные, $n \geq 0$)

$$(\alpha^2 - \beta^2)xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x) = \frac{d}{dx}\left[xJ_n(\alpha x)\frac{d}{dx}J_n(\beta x) - xJ_n(\beta x)\frac{d}{dx}J_n(\alpha x)\right],$$

$$2\alpha^2 x J_n^2(\alpha x) = \frac{d}{dx}\left\{(\alpha^2 x^2 - n^2)J_n^2(\alpha x) + \left[x\frac{d}{dx}J_n(\alpha x)\right]^2\right\}$$

для бесселевых функций

$$J_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k}k!(n+k)!}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

15. При $n \geq 0$ показать, что для бесселевых функций

$$J_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k}k!(n+k)!}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

- если $J_n(\alpha) = J_n(\beta) = 0$, то

$$\int_0^1 xJ_n(\alpha_x)J_n(\beta x)\,dx = 0, \text{ если } \alpha \neq \beta,$$

$$\int_0^1 xJ_n^2(\alpha_x)\,dx = \frac{1}{2}J_{n+1}^2(\alpha);$$

- если $J_{n+1}(\alpha) = 0$, то

$$\int_0^1 xJ_n^2(\alpha_x)\,dx = \frac{1}{2}J_n^2(\alpha).$$

16. Определяя бесселеву функцию $J_n(x)$ для любого n (не обязательно целого) как сумму ряда

$$J_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k}k!\Gamma(n+k+1)},$$

вывести формулы

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

17. Функция $u(t,x)$ является решением краевой задачи

$$u_{tt} + u_t = u_{xx}, \qquad u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \qquad u|_{t=0} = \phi(x), \qquad u_t|_{t=0} = \psi(x),$$

при $(t,x) \in [0,+\infty) \times [0,\pi]$. Верно ли, что $u(t,x) \to 0$ при $t \to +\infty$?

18. Пусть функции $u_k(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(Q_k) \cap C(\overline{Q}_k)$, $k = 1, 2$, являются решениями в $Q_k := Q^T_{(-k,k)}$ краевых задач

$$(u_k)_t = (u_k)_{xx}, \qquad u_k\big|_{x=\pm k} = 0, \qquad u_k\big|_{t=0} = \phi(x), \quad |x| \le k.$$

Здесь $\phi \in C^1([-2,2])$; $\phi(x) \ge 0$ при $|x| \le 1$ и $\phi(x) = 0$ при $1 \le |x| \le 2$; $\phi \not\equiv 0$.

Доказать, что $\quad u_1(x,t) < u_2(x,t) \quad \forall (x,t) \in [-1,1] \times (0,T]$.

19. При каких условиях на функцию $\phi \in C_0^\infty\big((0,1)\big)$ любое решение $u(x,t)$ в полуполосе $Q^\infty_{(0,1)}$ задачи

$$\begin{array}{llll} \text{а)} & u_t = u_{xx}, & u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=1} = 0, & u\big|_{t=0} = \phi(x); \\ \text{б)} & u_t = u_{xx}, & u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=1} = 0, & u\big|_{t=0} = \phi(x) \end{array}$$

обладает свойством $u(x,t) \to 0$ при $t \to +\infty$?

20. Пусть $u \in C^{2,1}_{x,t}(Q) \cap C(\overline{Q})$ — решение в $Q := Q^\infty_{(0,1)}$ задачи

$$u_t = u_{xx} + \alpha u, \qquad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = \phi(x).$$

Найти все такие $\alpha \in \mathbb{R}$, что для любой начальной функции $\phi \in C([0,1])$, $\phi(0) = \phi(1) = 0$, выполнено

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0 \quad \forall x \in [0,1].$$

21. Пусть $u(x,t)$ — решение в $Q^\infty_{(0,\pi)}$ краевой задачи

$$u_t = u_{xx}, \qquad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = \phi(x),$$

где $\phi \in C^1([0,\pi])$, $\phi(0) = \phi(\pi) = 0$. Указать класс всех таких функций $\phi(x)$, для которых

$$\lim_{t\to+\infty} e^t u(x,t) = 0 \quad \forall x \in [0,\pi].$$

22. Пусть $u(x,t)$ — решение в полуполосе $Q^\infty_{(0,3\pi)}$ задачи

$$u_t = u_{xx}, \qquad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=3\pi} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = \phi(x),$$

где $\phi \in C^1([0,3\pi])$, $\phi(0) = \phi(3\pi) = 0$. Указать класс всех таких функций $\phi(x)$, для которых

а) существует конечный $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{\sqrt{t}} u(x,t)$;

б) существует конечный $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t} u(x,t)$;

в) существует конечный $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t^2} u(x,t)$.

23. Пусть $u(x,t)$ — решение в $Q^\infty_{(0,\pi/2)}$ краевой задачи

$$u_t = u_{xx}, \quad u\big|_{x=0} = 1; \quad u\big|_{x=\pi/2} = 4, \quad u(x,0) = \cos^4 x + 4\sin^5 x.$$

Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.

24. Пусть $u \in C^{2,1}_{x,t}(Q) \cap C(\overline{Q})$ — решение в $Q := Q^{\infty}_{\Omega}$, где $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, задачи

$$u_t = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2},$$
$$u\big|_{x_1=0} = u\big|_{x_2=0} = 0, \quad u\big|_{x_1=1} = x_2, \quad u\big|_{x_2=1} = x_1.$$

Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x_1, x_2, t)$.

25. Пусть $u(x,t)$ — решение в полуполосе $Q^{\infty}_{(0,l)}$ задачи

$$u_t = u_{xx}, \qquad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = t, \qquad u\big|_{t=0} = \phi(x),$$

где $\phi \in C^1([0,l])$, $\phi(0) = \phi(l) = 0$.

Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\, u(x,t)$.

26. Пусть функции u_1 и u_2 удовлетворяют соотношениям

$$(u_k)_t = (u_k)_{xx}, \qquad 0 \le x \le \pi, \quad 0 \le t < +\infty;$$
$$u_k\big|_{t=0} = \sin^2 x - \alpha \sin^4 x \qquad (k = 1, 2);$$
$$u_1\big|_{x=0} = u_1\big|_{x=\pi} = 0, \quad (u_2)_x\big|_{x=0} = (u_2)_x\big|_{x=\pi} = 0, \quad 0 \le t < +\infty.$$

При каких α справедливо неравенство

$$\lim_{t\to+\infty} u_1(x,t) < \lim_{t\to+\infty} u_2(x,t) \qquad \forall x \in [0,\pi]?$$

27. Пусть функция $u(x,t)$ — решение в $Q^{\infty}_{(0,2)}$ задачи

$$u_t = u_{xx}, \qquad u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=2} = 3, \qquad u\big|_{t=0} = x^3 - 3x^2 + 3x.$$

Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.

28. Пусть $u(x,t) \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ — классическое решение в $Q := Q^{\infty}_{(0,1)}$ краевой задачи

$$u_t = u_{xx} + 3u, \qquad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0,$$

Доказать, что для $u(x,t)$ имеет место неравенство

$$\big|u(x,t)\big| \le Ce^{-6t}, \qquad C = \text{const} > 0.$$

29. Пусть $u(x,t)$ — решение в $Q := Q^{\infty}_{(0,1)}$ задачи

$$u_t = u_{xx}, \qquad u\big|_{x=0} = f(t), \quad u\big|_{x=1} = g(t), \qquad u\big|_{t=0} = \phi(x),$$

f, g, ϕ — гладкие функции, причем

$$f(t) \to a \quad \text{при} \quad t \to \infty, \qquad g(t) \to b \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Какой предел при $t \to \infty$ в пространстве $C[0,1]$ (если таковой вообще есть) имеет решение $u(x,t)$ этой задачи?

30. а) Пусть $K = \{1 < |x| < 2\}$ — "кольцевая"область в $\mathbb{R}^2$. Единственно ли решение $u \in C^2(K) \cap C^1(\overline{K})$ следующей краевой задачи:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad K, \qquad \frac{\partial}{\partial u} n\Big|_{|x|=1} = \phi_1(x_1, x_2), \quad u\Big|_{|x|=2} = \phi_2(x_1, x_2),$$

ϕ_1, ϕ_2 – произвольные непрерывные функции на окружностях $\{|x| = 1\}$ и $\{|x| = 2\}$ соответственно?

б) Найдите решение поставленной в п. (а) задачи, если

$$\phi_1 = \cos\theta, \qquad \phi_2 = \sin\theta$$

(θ — полярный угол на плоскости).

31. а) Докажите, что решение задачи Дирихле в полосе $\Pi = \{(x, y) :\ 0 < x < 1,\ -\infty < y < +\infty\}$

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \Pi, \qquad u\Big|_{x=0} = \phi_1(y), \qquad u\Big|_{x=1} = \phi_2(y),$$

$\phi_1, \phi_2 \in C(\mathbb{R}^1)$, неединственно.

б) Единственно ли решение предыдущей задачи с дополнительным условием

$$u(x, y) \to 0 \quad \text{при} \quad |y| \to \infty?$$

32. Пусть $K = B_1^2(0)$, $u(x, y)$ — решение задачи

$$\Delta u = x^2 y, \qquad u\Big|_{\partial K} = 0.$$

Найдите $u(0, 0)$.

33. При каких $a \in \mathbb{R}^1$ краевая задача

$$\Delta u + 2u = x - a \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

$\Omega = \{(0, \pi) \times (0, \pi)\}$, имеет хотя бы одно решение?