

И. А. Рудаков*

**НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ
УСЛОВИЮ НЕРЕЗОНАНСНОСТИ****ВВЕДЕНИЕ**

В данной работе в сепарабельном гильбертовом пространстве H изучается уравнение вида

$$Au \pm B(u) = f. \quad (A)$$

Здесь $A: H \rightarrow H$ — линейный самосопряженный оператор со всюду плотной в H областью определения $D(A)$. Оператор $B: H \rightarrow H$ является нелинейным. Правая часть A представляет собой заданный элемент $f \in H$. В работе исследуется вопрос, когда уравнение (A) имеет решение при любом $f \in H$, т. е. $R(A + B) = H$. Полученные результаты применяются к задаче о периодических решениях нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями 3-го рода и к эллиптическим уравнениям. При различных граничных условиях могут возникнуть случаи, когда либо A^{-1} существует и является вполне непрерывным из $H \rightarrow H$, либо $N(A) \leq \infty$ (и $N(A) \neq \{0\}$) и оператор $A^{-1}: R(A) \rightarrow R(A)$ не является вполне непрерывным. Если $N(A) = \infty$ и оператор $A^{-1}: R(A) \rightarrow R(A)$ вполне непрерывен, то, как в [1, 2], будем требовать, чтобы оператор $B(u)$ был монотонным. В этом случае мы получили обобщение результата из [1, 2]. Для волнового уравнения с однородными граничными условиями Дирихле соответствующий результат впервые получен в [3]. Если $N(A) < \infty$, то условие монотонности можно опустить.

**§ 1. ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ
ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ (A)**

Пусть H есть действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(,)$ и нормой $\|\cdot\|$. Для любого подмножества $M \subset H$

*© Рудаков И. А., 2006 г.

будем обозначать через $\bar{M}$ и $L(M)$ соответственно замыкание M по норме H и множество конечных линейных комбинаций элементов множества M .

Свойство I. Пусть $A: H \rightarrow H$ есть линейный самосопряженный оператор, такой, что $D(A)$ всюду плотно в H . Пусть существует полная ортонормированная в H система

$$\Lambda = \{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\} \quad (1.1)$$

собственных векторов оператора A и пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность соответствующих собственных значений, такая, что $Ae_n = \lambda_n e_n$, $n \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что оператор A , удовлетворяющий всем этим условиям, обладает свойством I.

Пусть $N(A)$, $R(A)$ есть соответственно ядро и образ оператора A .

Свойство II. Пусть $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3$, где подмножества Λ_1 , Λ_2 , Λ_3 попарно не пересекаются, подмножества Λ_2 , Λ_3 бесконечные и

- 1) $\overline{L(\Lambda_1)} = N(A)$;
- 2) существуют положительные константы a, b , такие, что для любого $e \in \Lambda_2$ соответствующее e собственное значение λ принадлежит $[a, b]$;
- 3) справедливо

$$\sum_{e_i \in \Lambda_3} \frac{1}{\lambda_i^2} < \infty. \quad (1.2)$$

Здесь суммирование производится по всем собственным векторам оператора A из Λ_3 .

Заметим, что если для оператора A выполнено условие (1.2), то все собственные векторы A из Λ_3 имеют конечную кратность.

Свойство III. Пусть A — самосопряженный оператор, удовлетворяющий свойству I, $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_3$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_3 = \emptyset$, $\#\Lambda_3 = \infty$ и выполнены условия 1, 3 свойства II. Будем говорить, что в этом случае оператор A обладает свойством III.

Обозначим $N_1 = N(A)$, $N_2 = \overline{L(\Lambda_2)}$, $N_3 = \overline{L(\Lambda_3)}$. Множества N_1 , N_2 , N_3 являются попарно ортогональными замкнутыми подпространствами H . Пусть P_1, P_2, P_3 есть ортогональные проекторы на N_1, N_2, N_3 соответственно. Для любого элемента $u \in H$ будем обозначать $u_i = P_i u$, $i \in \{1, 2, 3\}$, так, что $u = u_1 + u_2 + u_3$, $u_i \in N_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Заметим, что если выполнены условия II или III, то обратный оператор $A^{-1}: N_3 \rightarrow N_3$ является вполне непрерывным.

Обозначим $\sigma(A) = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Во всех приложениях спектр $\sigma(A)$ является не ограниченным ни снизу, ни сверху множеством.

ЛЕММА 1.1. Для любого числа $\lambda \notin \sigma(A)$ оператор $(A - \lambda)^{-1}: N_3 \rightarrow N_3$ является вполне непрерывным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать сходимость ряда

$$I = \sum_{e_i \in \Lambda_3} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda)^2}.$$

Из (1.2) следует, что множество $\{\lambda_i \mid e_i \in \Lambda_3, |\lambda_i| < 2|\lambda|\}$ конечное, поскольку собственные числа $\lambda_i \in \Lambda_3$ имеют конечную кратность. Поэтому существует константа C_1 , такая, что

$$I = \sum_{e_i \in \Lambda_3} \frac{1}{\lambda_i^2} \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^2\right)^{-1} \leq C_1 \sum_{e_i \in \Lambda_3} \frac{1}{\lambda_i^2} < \infty.$$

Лемма доказана.

Из леммы 1.1 немедленно вытекает следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Если для оператора A выполнено свойство III и $\dim N(A) < \infty$, то для любого $\lambda \notin \sigma(A)$ оператор $(A - \lambda)^{-1}: H \rightarrow H$ является вполне непрерывным.

Пусть $B: H \rightarrow H$ есть (нелинейный) оператор, для которого существуют константы $C, \gamma \in (0, +\infty)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, такие, что

$$(B(u) - \lambda u, u) \geq \frac{1}{\gamma} \|B(u) - \lambda u\|^2 - C \quad \forall u \in H. \quad (1.3)$$

Запишем уравнение (A) в виде

$$Au - B(u) = f. \quad (1.4)$$

ТЕОРЕМА 1.1. Предположим, что для оператора $A: H \rightarrow H$ выполнено свойство III и $\dim N(A) < \infty$. Пусть $B: H \rightarrow H$ является деми-непрерывным оператором (т. е. B непрерывен из сильной топологии H в слабую топологию H), для которого выполнено (1.3), где

$$\lambda \in (\underline{\lambda}, \bar{\lambda}), \quad \gamma \in (0, \bar{\lambda} - \lambda), \quad \bar{\lambda} \in \sigma(A), \quad (\underline{\lambda}, \bar{\lambda}) \cap \sigma(A) = \emptyset. \quad (1.5)$$

Тогда для любого $f \in H$ уравнение (1.4) имеет решение в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем уравнение (1.4) в эквивалентном виде

$$u = T(u), \quad (1.6)$$

где $T(u) = (A - \lambda)^{-1}(B(u) - \lambda u + f)$. Из условий теоремы и следствия 1.1 вытекает, что оператор $T: H \rightarrow H$ является вполне непрерывным. Доказательство существования неподвижной точки оператора T проведем, воспользовавшись принципом Лере—Шаудера. Для этого рассмотрим уравнение $u = \mu T(u)$ с параметром $\mu \in (0, 1]$. Преобразуем это уравнение к виду

$$B_1(u) = -\frac{1}{\mu}(-A + \lambda)(u - \mu\omega), \quad (1.7)$$

где $\omega = (A - \lambda)^{-1}f$, $B_1(u) = B(u) - \lambda u$. Легко видеть, что $\eta = \lambda - \bar{\lambda}$ есть наибольшее отрицательное собственное значение оператора $-A + \lambda$. Умножим (1.7) скалярно в H на $u - \mu\omega$ и воспользуемся стандартным (см. [1]) неравенством с наибольшим отрицательным собственным значением η :

$$\begin{aligned} (B_1(u), u - \mu\omega) &= -\frac{1}{\mu}((-A + \lambda)(u - \mu\omega), u - \mu\omega) \leq \\ &\leq \frac{1}{\mu(\bar{\lambda} - \lambda)} \|(-A + \lambda)(u - \mu\omega)\|^2 = \frac{\mu}{\bar{\lambda} - \lambda} \|B_1(u)\|^2. \end{aligned}$$

Используя (1.3), из этого неравенства выведем

$$\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\bar{\lambda} - \lambda} \right) \|B_1(u)\|^2 - \|B_1(u)\| \|\omega\| - C \leq 0.$$

Отсюда и из (1.5) и (1.7) следуют оценки

$$B_1(u) \leq C_2, \quad \|(-A + \lambda)(u - \mu\omega)\| \leq C_2,$$

где C_2 не зависит от μ . Из последнего неравенства и (1.5) выведем оценку $\|u\| \leq C_3$, где C_3 не зависит от μ . Из принципа Лере—Шаудера вытекает существование решения уравнения (1.6). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 1.2. Предположим, что для оператора $A: H \rightarrow H$ выполнены условия I, III и $\dim N(A) = \infty$. Пусть $B: H \rightarrow H$ является деми-непрерывным монотонным оператором, для которого выполнено (1.3), где

$$\begin{aligned} \lambda \in (\underline{\lambda}, \bar{\lambda}), \quad \gamma \in (0, \bar{\lambda} - \lambda), \quad \underline{\lambda} \geq 0, \\ -\bar{\lambda}, -\underline{\lambda} \in \sigma(A), \quad (-\bar{\lambda}, -\underline{\lambda}) \cap \sigma(A) = \emptyset. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Тогда для любого $f \in H$ уравнение

$$Au + B(u) = f \quad (1.9)$$

имеет решение в H .

Отметим, что в [1] теорема 1.1 (теорема 1.2) получена для случая, когда $\underline{\lambda}$ (а для теоремы 1.2 соответственно $-\underline{\lambda}$) является наибольшим отрицательным собственным значением A . Теоремы 1.1, 1.2 представляют собой обобщение полученных в [1] результатов на случай произвольных соседних собственных значений $\underline{\lambda}$ и $\bar{\lambda}$ (или $-\bar{\lambda}$ и $-\underline{\lambda}$ в теореме 1.2) оператора A . Результат, равносильный теореме 1.2, был получен в [3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Рассмотрим вначале, как в [1], вспомогательное уравнение

$$\varepsilon u_{1\varepsilon} + Au_\varepsilon + B(u_\varepsilon) = f. \quad (1.10)$$

Здесь $\varepsilon > 0$, $u_{1\varepsilon} = P_1 u_\varepsilon$. Спроектировав уравнение (1.10) на N_1 и N_3 и опустив для упрощения записи индекс ε , получим два уравнения:

$$\varepsilon u_1 + B_1(u_1 + u_3) = f_1, \quad (1.11)$$

$$Au_3 + B_3(u_1 + u_3) = f_3, \quad (1.12)$$

где $B_1(u) = P_1 B(u)$, $B_3(u) = P_3 B(u)$, $u = u_1 + u_3$, $f_1 + f_3 = f$.

При фиксированном $u_3 \in N_3$ обозначим $S_{u_3}: N_1 \rightarrow N_1$ оператор, действующий по формуле

$$S_{u_3}(v) = \varepsilon v + B_1(v + u_3) \quad \forall v \in N_1.$$

Из условий теоремы следует, что S_{u_3} — сильно монотонный деминепрерывный оператор. Следовательно, при каждом фиксированном $u_3 \in N_3$ уравнение (1.12) имеет единственное решение $u_1 = u_1(u_3)$. Докажем, что оператор $u_1: N_3 \rightarrow N_1$ ($u_3 \rightarrow u_1(u_3)$) непрерывен в H . Возьмем последовательность $\{u_{3n}\} \subseteq N_3$, такую, что $u_{3n} \rightarrow u_3$ в H . Покажем, что $u_1(u_{3n}) \rightarrow u_1(u_3)$ в H . Обозначим $u_{1n} = u_1(u_{3n})$, $u_1 = u_1(u_3)$. Имеем

$$\varepsilon u_{1n} + B_1(u_{1n} + u_{3n}) = f, \quad \varepsilon u_1 + B_1(u_1 + u_3) = f. \quad (1.13)$$

Вычтем из первого равенства второе, разность умножим скалярно в H на $u_{1n} - u_1$ и воспользуемся монотонностью B :

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon \|u_{1n} - u_1\|^2 + (B(u_{1n} + u_{3n}) - B(u_1 + u_3), u_{1n} + u_{3n} - u_1 - u_3) - \\ &\quad - (B(u_{1n} + u_{3n}) - B(u_1 + u_3), u_{3n} - u_3) \geq \\ &\geq \varepsilon \|u_{1n} - u_1\|^2 - (\|B(u_{1n} + u_{3n})\| + \|B(u_1 + u_3)\|) \|u_{3n} - u_3\|. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Константы, появляющиеся в оценках, будем обозначать $C_1, C_2, C_3, \dots$. Из (1.3) нетрудно вывести оценку

$$\|B(u)\| \leq (\lambda + \gamma)\|u\| + C_1 \quad \forall u \in H. \quad (1.15)$$

Отсюда и из (1.14) вытекает ограниченность последовательности $\{u_{1n}\}$. Тогда из (1.14) следует, что $u_{1n} \rightarrow u$. Подставим в (1.12) $u_1 = u_1(u_3)$: $Au_3 + B_3(u_1(u_3) + u_3) = f_3$. Перепишем это уравнение в виде

$$u_3 = T(u_3), \quad (1.16)$$

где $T(u_3) = (A + \lambda)^{-1}(-B_3(u_1(u_3) + u_3) + \lambda u_3 + f_3)$. Из условия теоремы, леммы 1.1 и непрерывности $u_1(u_3)$ следует непрерывность оператора $T(u_3)$. Покажем, что оператор $u_1(u_3)$ ограничен. Пусть $\|u_3\| \leq M$. Умножим (1.13) скалярно в H на u_1 и воспользуемся монотонностью B и (1.15):

$$\begin{aligned} \varepsilon \|u_1\|^2 &= (f_1, u_1) - (B(u_1 + u_3), u_1) = \\ &= (f_1, u_1) - (B(u_1 + u_3), u_1 + u_3) + (B(u_1 + u_3), u_3) \leq \\ &\leq \|f_1\| \|u_1\| + M((\lambda + \gamma)(\|u_1\| + M) + C_1). \end{aligned}$$

Поэтому множество $\{u_1(u_3) \mid \|u_3\| \leq M\}$ ограниченное. Следовательно, оператор $T: N_3 \rightarrow N_3$ является вполне непрерывным.

Доказательство существования решения уравнения (1.16) проведем, воспользовавшись принципом Лере—Шаудера. Для этого рассмотрим уравнение

$$u_3 = \mu T(u_3) \quad (1.17)$$

с параметром $\mu \in (0, 1]$. Чтобы проверить условие Лере—Шаудера, перепишем уравнение (1.17) в следующей форме:

$$\frac{1}{\mu}(A + \lambda)(u_3 - \mu\omega) + B_3(u) - \lambda u_3 = 0. \quad (1.18)$$

Здесь $u = u_1(u_3) + u_3$, $\omega = (A + \lambda)^{-1}f_3$. Легко видеть, что $\lambda - \bar{\lambda}$ есть наибольшее отрицательное собственное значение оператора $A + \lambda$. Обозначим $\bar{B}(u) = B(u) - \lambda u$, $\bar{B}_1(u) = P_1 \bar{B}(u)$ и умножим (1.18) скалярно в H на $(u_3 - \mu\omega)$:

$$\begin{aligned} 0 &\geq (\bar{B}(u), u_3 - \mu\omega) - \frac{1}{\mu(\bar{\lambda} - \lambda)} \|(A + \lambda)(u_3 - \mu\omega)\|^2 = \\ &= (\bar{B}(u), u) - \frac{\mu}{\bar{\lambda} - \lambda} \|\bar{B}_3(u)\|^2 - \mu(\bar{B}(u), \omega) - (\bar{B}_1(u), u_1) \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\bar{\lambda} - \lambda} \right) \|\bar{B}(u)\|^2 - (\bar{B}_1(u), u_1) - \|\omega\| \|\bar{B}(u)\| - C. \end{aligned}$$

Умножив (1.11) скалярно на u_1 в H , получим

$$(\bar{B}_1(u), u_1) = -(\lambda + \varepsilon)\|u_1\|^2 + (f_1, u_1).$$

Подставив это выражение в последнее неравенство, выводим

$$\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\bar{\lambda} - \lambda}\right) \|\bar{B}(u)\|^2 + (\lambda + \varepsilon)\|u_1\|^2 - \|\omega\| \|\bar{B}(u)\| - \|f_1\| \|u_1\| - C \leq 0. \quad (1.19)$$

Отсюда и из условия (1.8) следуют оценки

$$\|\bar{B}(u)\| \leq C_2, \quad u_1 \leq C_2. \quad (1.20)$$

Из (1.18) и (1.20) выведем

$$\|(A + \lambda)u_3\| \leq C_2 + \|f_3\|, \quad \|u_3\| \leq C_3. \quad (1.21)$$

Константы C_2, C_3 не зависят от μ и ε . Перейдем к пределу в равенстве (1.10) при $\varepsilon \rightarrow 0$, воспользовавшись методом из [1]. Из (1.20), (1.21) следует, что найдется последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$, такая, что $u_{\varepsilon_n} \rightarrow u$ слабо в H , $Au_{\varepsilon_n} \rightarrow \eta$ слабо в H . Из (1.2) вытекает вполне непрерывность оператора $A^{-1}: N_3 \rightarrow N_3$. Поэтому $u_{3\varepsilon_n} \rightarrow A^{-1}\eta$, $A^{-1}\eta = u_3$, $\eta = Au_3 = Au$ и $(Au_{\varepsilon_n}, u_{\varepsilon_n}) = (Au_{\varepsilon_n}, u_{3\varepsilon_n}) \rightarrow (Au, u_3) = (Au, u)$. Воспользовавшись монотонностью B , напишем неравенство

$$(B(u_{\varepsilon_n}) - B(\xi), u_{\varepsilon_n} - \xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in H.$$

Отсюда и из (1.10) получим

$$(f - \varepsilon_n u_{\varepsilon_n} - Au_{\varepsilon_n} - B(\xi), u_{\varepsilon_n} - \xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in H.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$(f - Au - B(\xi), u - \xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in H.$$

Подставим в это неравенство $\xi = u + \tau\psi$, где $\tau > 0$, $\psi \in H$, сократим на τ и устремим τ к нулю:

$$(f - Au - B(u), \psi) \leq 0 \quad \forall \psi \in H.$$

Отсюда следует (1.9). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 1.3. Предположим, что для оператора $A: H \rightarrow H$ выполнены условия I, II. Пусть $B: H \rightarrow H$ является деминепрерывным монотонным оператором, для которого выполнены (1.3) и (1.8). Тогда для любого $f \in H$ уравнение (1.9) имеет решение в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как в теореме 1.2, рассмотрим вначале вспомогательное уравнение (1.10). Спроектировав (1.10) на $N_1 \oplus N_2$ и N_3 и опустив для упрощения записи индекс ε , получим систему

$$\varepsilon u_1 + Au_2 + (P_1 + P_2)B(u_1 + u_2 + u_3) = f_1 + f_2, \quad (1.22)$$

$$Au_3 + B_3(u_1 + u_2 + u_3) = f_3. \quad (1.23)$$

При фиксированном $u_3 \in N_3$ обозначим

$$S_{u_3}: N_1 \oplus N_2 \rightarrow N_1 \oplus N_2$$

оператор, действующий по формуле

$$S_{u_3}(v + w) = \varepsilon v + Aw + (P_1 + P_2)B(v + w + u_3) \quad \forall v \in N_1, w \in N_2.$$

Воспользовавшись монотонностью B и условием 2 свойства II, выведем

$$\begin{aligned} & (S_{u_3}(v_2 + w_2) - S_{u_3}(v_1 + w_1), v_2 + w_2 - v_1 - w_1) \geq \\ & \geq \varepsilon \|v_2 - v_1\|^2 + a \|w_2 - w_1\|^2 \quad \forall v_1, v_2 \in N_1, w_1, w_2 \in N_2. \end{aligned}$$

Поэтому S_{u_3} является сильно монотонным оператором и для каждого фиксированного $u_3 \in N_3$ уравнение (1.22) имеет единственное решение $u_1 = u_1(u_3)$, $u_2 = u_2(u_3)$. Обозначим $v = v(u_3) = u_1(u_3) + u_2(u_3)$. Чтобы доказать непрерывность оператора $v: N_3 \rightarrow N_1 \oplus N_2$, возьмем последовательность $u_{3n} \rightarrow u_3$ в N_3 . Элементы u_{1n} , u_{2n} определим из уравнения

$$\varepsilon u_{1n} + Au_{2n} + (P_1 + P_2)B(u_{1n} + u_{2n} + u_{3n}) = f_1 + f_2.$$

Элементы u_1 , u_2 определим из (1.22). Вычтем (1.22) из последнего соотношения и полученное равенство умножим на $u_{1n} + u_{2n} - u_1 - u_2$. Воспользовавшись (1.15) и монотонностью B точно так же, как в теореме 1.2, получим оценку

$$\varepsilon \|u_{1n} - u_1\|^2 + a \|u_{2n} - u_1\|^2 \leq C_4(\|u_{1n}\| + \|u_{2n}\| + \|u_{3n}\|)\|u_{3n} - u_3\|.$$

Отсюда вытекает ограниченность последовательностей $\{\|u_{1n}\|\}$, $\{\|u_{2n}\|\}$ и непрерывность $u_1(u_3)$, $u_2(u_3)$. Подставим $v(u_3)$ в (1.23) вместо $u_1 + u_2$: $Au_3 + B_3(v(u_3) + u_3) = f_3$. Это соотношение равносильно (1.16) с оператором

$$T(u_3) = (A + \lambda)^{-1}(-B_3(v(u_3) + u_3) + \lambda u_3 + f_3).$$

Точно так же, как в теореме 1.2, доказывается ограниченность оператора $v(u_3)$. Отсюда, из леммы 1.1 и деминепрерывности B следует вполне непрерывность оператора $T: N_3 \rightarrow N_3$. Как в теореме 1.2, рассмотрим вспомогательное уравнение (1.17) с параметром $\mu \in (0, 1]$, которое равносильно равенству (1.18). Умножив (1.18) скалярно в H на $(u_3 - \mu\omega)$, как в теореме 1.2, выведем

$$\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\bar{\lambda} - \lambda}\right) \|\bar{B}(u)\|^2 - (\bar{B}(u), u_1 + u_2) - \|\omega\| \|\bar{B}(u)\| - C \leq 0.$$

Умножив (1.22) скалярно в H на $u_1 + u_2$ и воспользовавшись свойством Π , приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & (\bar{B}(u), u_1 + u_2) = \\ & = -\varepsilon \|u_1\|^2 - (Au_2, u_2) - \lambda \|u_1 + u_2\|^2 + (f_1 + f_2, u_1 + u_2) \leq \\ & \leq -(\lambda + \varepsilon) \|u_1\|^2 - (\lambda + a) \|u_2\|^2 + \|f_1 + f_2\| \|u_1 + u_2\|. \end{aligned}$$

Из полученных неравенств следуют оценки

$$\|u_1\| \leq C_5, \quad \|u_2\| \leq C_5, \quad \|\bar{B}(u)\| \leq C_5,$$

где C_5 не зависит от μ и ε . Отсюда и из (1.23) выведем

$$\|(A + \lambda)u_3\| \leq \|f_3\| + C_5, \quad \|u_3\| \leq C_6,$$

где

$$C_6 = \frac{\|f_3\| + C_5}{\min(\lambda - \underline{\lambda}, \bar{\lambda} - \lambda)}.$$

Из этой оценки и принципа Лере—Шаудера вытекает существование решения уравнения (1.16). Следовательно, уравнение (1.10) имеет решение u_ε , для которого справедлива оценка $\|u_\varepsilon\| \leq 2C_5 + C_6$.

Перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в равенстве (1.10) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так же, как в теореме 1.2, доказывается существование последовательности $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, такой, что $u_{\varepsilon_n} \rightarrow u$ слабо в H и $Au_{3\varepsilon_n} \rightarrow Au_3$ слабо в H . Воспользовавшись монотонностью B и условием 2 свойства Π , запишем неравенства

$$(B(u_{\varepsilon_n}) - B(\xi), u_{\varepsilon_n} - \xi) \geq 0, \quad (Au_{2\varepsilon_n} - A\xi_2, u_{2\varepsilon_n} - \xi_2) \geq 0 \quad \forall \xi \in H.$$

Из этих неравенств и (1.10) выведем

$$(f - \varepsilon u_{1\varepsilon_n} - Au_{3\varepsilon_n} - A\xi_2 - B(\xi), u_{\varepsilon_n} - \xi) \geq 0.$$

Переходя в этом неравенстве, как в теореме 1.2, к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$(f - Au_3 - A\xi_2 - B(\xi), u - \xi) \geq 0.$$

Подставив в данное неравенство $\xi = u + \tau\psi$, где $\tau > 0$, $\psi \in H$, так же, как в теореме 1.2, получим (1.9). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 1.4. Предположим, что для оператора $A: H \rightarrow H$ выполнены условия I, II, и пусть α есть модуль наибольшего отрицательного собственного значения A . Пусть $B: H \rightarrow H$ есть деминепрерывный монотонный оператор, для которого существуют константы $\delta > 0$, $C > 0$ и $\gamma \in (0, \alpha)$, такие, что

$$(Bu, u) \geq \frac{1}{\gamma} \|Bu\|^2 - C, \quad \|Bu\| \geq \delta \|u\| - C \quad \forall u \in H. \quad (1.24)$$

Тогда для любого $f \in H$ уравнение (1.9) имеет решение в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Спроектируем вспомогательное уравнение (1.10) на $N_1 \oplus N_2$ и N_3 . Точно так же, как в доказательстве теоремы 1.3, докажем существование единственного решения $u_1 = u_1(u_3)$, $u_2 = u_2(u_3)$ уравнения (1.22) при каждом фиксированном u_3 , которое непрерывно зависит от u_3 . Обозначим $v = v(u_3) = u_1(u_3) + u_2(u_3)$. Подставим $v(u_3)$ в (1.23) и заменим (1.23) на равносильное уравнение (1.16) с оператором

$$T(u_3) = A^{-1}(-B_3(v(u_3) + u_3) + f_3).$$

Легко видеть, что T является вполне непрерывным оператором на N_3 . Доказательство существования решения уравнения (1.16) проведем с помощью принципа Лере—Шаудера. Для этого рассмотрим уравнение (1.17) с параметром $\mu \in (0, 1]$. Преобразуем это уравнение к равносильному виду

$$\frac{1}{\mu} A(u_3 - \mu w) + B_3(u) = 0, \quad (1.25)$$

где $u = v(u_3) + u_3$, $w = A^{-1}f_3$. Умножим (1.25) скалярно в H на $(u_3 - \mu w)$ и воспользуемся условиями теоремы:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\mu} (A(u_3 - \mu w), u_3 - \mu w) + (B(u), u) - (B(u), u_1 + u_2) \geq \\ &\geq -\frac{\mu}{\alpha} \|B_3(u)\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|B(u)\|^2 - C - (B(u), u_1 + u_2) \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha} \right) \|B(u)\|^2 - (B(u), u_1 + u_2) - C. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Умножив (1.23) на $u_1 + u_2$ в H и воспользовавшись свойством Π , получим

$$\begin{aligned} (B(u), u_1 + u_2) &= -\varepsilon \|u_1\|^2 - (Au_2, u_2) - (f_1 + f_2, u_1 + u_2) \leq \\ &\leq -\varepsilon \|u_1\|^2 - a \|u_2\|^2 + \|f_1 + f_2\| \|u_1 + u_2\|. \end{aligned}$$

Отсюда и из (1.26) выведем

$$\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha}\right) \|B(u)\|^2 + \varepsilon \|u_1\|^2 + a \|u_2\|^2 - \|f_1 + f_2\| \|u_1 + u_2\| \leq 0.$$

Из этого неравенства и (1.24) получим оценки $\|u_1\| \leq C_0$, $\|u_2\| \leq C_0$, $\|u_3\| \leq C_0$, где C_0 не зависит от μ и ε . Отсюда и из принципа Ле-ре—Шаудера следует существование решения уравнения (1.16). Следовательно, уравнение (1.10) имеет решение u_ε , такое, что $\|u_\varepsilon\| \leq 3C_0$. Предельный переход в (1.10) при $\varepsilon \rightarrow 0$ осуществляется точно так же, как в теореме 1.3. Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос о единственности решения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. Пусть дополнительно к условиям теоремы 1.3 для оператора $\bar{B} = B - \lambda$ выполнено неравенство

$$\|\bar{B}(u) - \bar{B}(v)\|^2 \leq \gamma(\bar{B}(u) - \bar{B}(v), u - v) \quad \forall u, v \in H.$$

Тогда задача (1.10) имеет единственное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u_1, u_2 есть решения уравнения (1.10), т. е. $(A + \lambda)u_1 + \bar{B}(u_1) = f$ и $(A + \lambda)u_2 + \bar{B}(u_2) = f$. Вычтем из первого уравнения второе и полученное равенство умножим скалярно в H на $u_1 - u_2$:

$$\begin{aligned} 0 &= ((A + \lambda)(u_1 - u_2) + (\bar{B}(u_1) - \bar{B}(u_2)), u_1 - u_2) \geq \\ &\geq -\frac{1}{\bar{\lambda} - \lambda} \|(A + \lambda)(u_1 - u_2)\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|\bar{B}(u_1) - \bar{B}(u_2)\|^2 = \\ &= \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\bar{\lambda} - \lambda}\right) \|\bar{B}(u_1) - \bar{B}(u_2)\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|\bar{B}(u_1) - \bar{B}(u_2)\| = 0$, $\|(A + \lambda)(u_1 - u_2)\| = 0$, $u_1 = u_2$. Утверждение доказано.

§ 2. НЕЛИНЕЙНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ С ОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрим одномерное волновое уравнение на отрезке $[0, \pi]$ с однородными граничными условиями 3-го рода:

$$u_{tt} - u_{xx} + g(u) = f(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (2.1)$$

$$u(0, t) - h_1 u'_x(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) + h_2 u'_x(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (2.2)$$

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Здесь $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, $T = 2\pi \frac{b}{a}$, где a , b есть взаимно простые натуральные числа, $f(x, t)$ — заданная T -периодическая по t функция.

Задача (2.1), (2.3) с нулевыми граничными условиями Дирихле изучена в [1—11]. В [6—9] нелинейное слагаемое $g(u)$ имеет степенной рост. В [12—14] исследуется волновое уравнение с непостоянными коэффициентами и нулевыми граничными условиями Дирихле. В этом параграфе будут доказаны теоремы о существовании решений задачи (2.1), (2.3) с граничными условиями вида (2.2) на одном или обоих концах интервала $(0, \pi)$.

Обозначим $\Omega = (0, \pi) \times (0, T)$. Решение задачи (2.1)—(2.3) будем искать в виде ряда Фурье. Для построения ортонормированной системы рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля

$$\varphi_{xx} + \lambda^2 \varphi = 0, \quad \varphi(0) - h_1 \varphi'(0) = 0, \quad \varphi(\pi) + h_2 \varphi'(\pi) = 0. \quad (2.4)$$

В [15] доказана положительность собственных значений задачи (2.4), которые для удобства обозначены через λ^2 . Пусть $\varphi_n(x)$ есть полная ортонормированная в $L_2(0, \pi)$ система собственных функций задачи (2.4). Эти функции имеют вид

$$\varphi_n(x) = C_n(\sin \lambda_n x + \lambda_n h_1 \cos \lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Легко видеть, что существует константа C_0 , не зависящая от n , такая, что

$$|\varphi_n(x)| \leq C_0 \quad \forall x \in [0, \pi]. \quad (2.6)$$

Собственные числа λ_n являются корнями трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda \pi = \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2} \frac{\lambda}{\lambda^2 - \lambda_0^2}, \quad (2.7)$$

где $\lambda_0 = (h_1 h_2)^{-1/2}$. Представим λ_n в виде суммы $\lambda_n = (n - 1) + \theta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Простые рассуждения показывают, что если $\lambda_0 + \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, то

$\frac{1}{2} < \theta_n < 1$ при $n < \lambda_0 + \frac{1}{2}$ и $0 < \theta_n < \frac{1}{2}$ при $n > \lambda_0 + \frac{1}{2}$. Если $\lambda_0 + \frac{1}{2} = k \in \mathbb{N}$, то $\frac{1}{2} < \theta_n < 1$ при $n < k$, $\theta_k = \frac{1}{2}$, $\lambda_k = \lambda_0$ и $0 < \theta_n < \frac{1}{2}$ при $n > k$.

Пользуясь представлением λ_n и (2.7) при $n > \lambda_0 + \frac{1}{2}$, запишем

$$\theta_n = \frac{1}{n} \frac{h_1 + h_2}{\pi h_1 h_2} \frac{\theta_n \pi}{\operatorname{tg}(\theta_n \pi)} g(n),$$

где

$$g(n) = \left(1 + \frac{\theta_n}{n-1}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} \times \\ \times \left(1 + 2\theta_n \frac{1}{n-1} + \theta_n^2 \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{\lambda_0^2}{(n-1)^2}\right)^{-1}.$$

На промежутке $(0, \frac{\pi}{2})$ функция $\frac{t}{\operatorname{tg} t}$ убывает и имеет значения из интервала $(0, 1)$. Опираясь на это, нетрудно доказать, что существуют положительные константы b_0 и b_1 , такие, что

$$0 < b_0 \frac{1}{n} \leq \theta_n \leq b_1 \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

Система функций

$$\Lambda = \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \varphi_n(x), \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \cos\left(\frac{a}{b} mt\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \sin\left(\frac{a}{b} mt\right) \right\}_{m,n \in \mathbb{N}}$$

с функциями $\varphi_n(x)$, выраженными в (2.5), является полной ортонормированной в $L_2(\Omega)$ ($\Omega = (0, \pi) \times (0, T)$) системой функций. Определим оператор $A_0: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, для которого

$$D(A_0) = \\ = \left\{ u = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M \varphi_n(x) \left(a_{nm} \cos\left(\frac{a}{b} mt\right) + b_{nm} \sin\left(\frac{a}{b} mt\right) \right) \mid M, N \in \mathbb{N} \right\}$$

и

$$A_0 \varphi = \varphi_{tt} - \varphi_{xx} \quad \forall \varphi \in D(A_0).$$

Обозначим буквой A оператор в $L_2(\Omega)$, являющийся замыканием по графику оператора A_0 . Система функций Λ является системой собственных функций операторов A_0 и A с собственными значениями

$$\mu_{nm} = \lambda_n^2 - \left(\frac{a}{b} m\right)^2 = (n-1 + \theta_n)^2 - \left(\frac{ab}{m}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Стандартно доказываются следующие свойства оператора A :

- а) A самосопряжен в $L_2(\Omega)$, $R(A)$ замкнут в $L_2(\Omega)$;
 б) $A^{-1} \in L(R(A), R(A))$. Более того, $\|A^{-1}\|_{R(A)} = d^{-1}$, где

$$d = \inf \left\{ \left| \lambda_n^2 - \left(\frac{a}{b} m \right)^2 \right| : \lambda_n \neq \frac{a}{b} m \right\} > 0;$$

- в) $\dim N(A) < +\infty$;
 г) $R(A) = N(A)^\perp$, $L_2(\Omega) = N(A) \oplus R(A)$.

Обозначим

$$M = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_+ \mid \mu_{nm} \neq 0, b(n-1) \neq am\},$$

$$\sigma(A) = \{\mu_{nm} \mid (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_+\}.$$

Рассмотрим следующие подмножества системы Λ :

$$\Lambda_2 = \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \cos((n-1)t), \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \sin((n-1)t) \mid \frac{n-1}{a} \in \mathbb{N} \right\};$$

$$\Lambda_3 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \varphi_n(x) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \cos\left(\frac{a}{b} mt\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \sin\left(\frac{a}{b} mt\right) \mid (n, m) \in M, m \neq 0 \right\}.$$

Пусть $N_1 = N(A)$, $N_2 = \overline{L(\Lambda_2)}$, $N_3 = \overline{L(\Lambda_3)}$. На подпространстве N_2 собственные значения A равны $2(n-1)\theta_n + \theta_n^2$. Из (2.8) следует, что $2(n-1)\theta_n + \theta_n^2 \in [\eta_1, \eta_2]$, где $\eta_1 = \min(b_0, \theta_1^2)$, $\eta_2 = 2b_1 + 1$. Стандартно доказывается сходимость ряда

$$\sum_{(n,m) \in M} \frac{1}{\mu_{nm}^2}.$$

Таким образом, для оператора A выполнено свойство II.

Пусть функция $g(u)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$g(u) \text{ непрерывна, не убывает на } \mathbb{R}, \quad (2.10)$$

и существуют константы $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, такие, что

$$\alpha \leq \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} \leq \overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} \leq \beta. \quad (2.11)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функция $u \in L_2(\Omega)$ называется обобщенным решением задачи (2.1)–(2.3), если

$$(u, A_0 \varphi) + (g(u), \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in D(A_0).$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены условия (2.10), (2.11), где

$$\alpha, \beta \in (0, +\infty), \quad [-\beta, -\alpha] \cap \sigma(A) = \emptyset. \quad (2.12)$$

Тогда для любой T -периодической по t функции $f \in L_2(\Omega)$ задача (2.1)–(2.3) имеет обобщенное решение $u \in L_2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $H = L_2(\Omega)$, $B(u) = g(u)$ для $u \in L_2(\Omega)$. Из условий теоремы следует монотонность и деминепрерывность оператора B . Функция $u \in H$ является обобщенным решением задачи (2.1)–(2.3) тогда и только тогда, когда u удовлетворяет (1.9). Проверим выполнение условий теоремы 1.2. Из свойств 1, 2, 4 вытекает выполнение условия III для оператора A . Из (2.11), (2.12) следует существование положительных констант $C_1, C_2, \alpha_1, \beta_1, \lambda, \gamma$, таких, что

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta] &\subseteq (\alpha_1, \beta_1), \quad [-\beta_1, -\alpha_1] \cap \sigma(A) = \emptyset, \\ \lambda &\in (\alpha_1, \beta_1), \quad \gamma \in (0, \beta_1 - \lambda) \end{aligned} \quad (2.13)$$

и

$$g(u) = \lambda u + p(u), \quad (2.14)$$

где

$$p(u)u \geq -C_1, \quad |p(u)| \leq \gamma|u| + C_2 \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (2.15)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (B(u) - \lambda u, u) &= \int_{\Omega} p(u)u \, dx \, dt = \int_{\Omega} |p(u)u + C_1| \, dx \, dt - C_1 \pi T \geq \\ &\geq \frac{1}{\gamma} \|p(u)\|^2 - \frac{1}{\gamma} C_2 \int_{\Omega} |p(u)| \, dx \, dt - 2C_1 \pi T \geq \\ &\geq \frac{1}{\gamma} \|p(u)\|^2 - C_3 \|p(u)\| - 2C_1 \pi T \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{\gamma} - \varepsilon \right) \|p(u)\|^2 - 2C_1 \pi T - \frac{1}{\varepsilon} C_4. \end{aligned}$$

Здесь $C_3, C_4, \varepsilon \in (0, +\infty)$. При достаточно малом ε условия (1.3), (1.8) будут выполнены. Из теоремы 1.2 следует существование обобщенного решения задачи (2.1)–(2.3). Теорема доказана.

Если в граничных условиях (2.2) либо $h_1 = 0$, либо $h_2 = 0$, то условие монотонности можно опустить. В этом случае для удобства перепишем уравнение (2.1) следующим образом:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(u) + f(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Будем рассматривать два типа граничных условий:

$$u(0, t) - hu'_x(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.17)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) + hu'_x(\pi, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

Для построения ортонормированных в $L_2(\Omega)$ систем собственных функций линейной части задач (2.16), (2.17), (2.3) и (2.16), (2.18), (2.3) рассмотрим следующие задачи Штурма—Лиувилля

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0; \quad \varphi(0) - h\varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(\pi) = 0, \quad (2.19)$$

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0; \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi(\pi) + h\varphi'(\pi) = 0. \quad (2.20)$$

Нетрудно убедиться, что эти задачи имеют одинаковые собственные числа λ_n , удовлетворяющие уравнению

$$\operatorname{tg}(\lambda_n \pi) = -h\lambda_n. \quad (2.21)$$

Представим λ_n в виде

$$\lambda_n = n - \frac{1}{2} + \theta_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.22)$$

Простые рассуждения показывают, что $0 < \theta_n < \frac{1}{2}$. Из равенств (2.21), (2.22) имеем

$$\theta_n = \frac{1}{n} \frac{h}{\pi} \frac{\theta_n \pi}{\operatorname{tg}(\theta_n \pi)} \frac{1}{1 - 1/(2n) + \theta_n/n}. \quad (2.23)$$

Отсюда нетрудно вывести для θ_n оценки (2.8), в которых в качестве b_0 , b_1 можно положить

$$b_0 = \frac{h\theta_1}{\operatorname{tg}(\pi\theta_1)(1 + \theta_1)}, \quad b_1 = \frac{2}{\pi}h.$$

Полные ортонормированные в $L_2(0, \pi)$ системы собственных функций задач (2.19) и (2.20) имеют соответственно вид

$$\varphi_n = C_n(\sin \lambda_n x + \lambda_n h \cos \lambda_n x), \quad \varphi_n = C_n \sin \lambda_n x.$$

Рассмотрим полные ортонормированные в $L_2(\Omega)$ системы функций Λ с соответствующими функциями $\varphi_n(x)$. Аналогично задаче (2.1)–(2.3) построим замыкание A по графику оператора $A_0 = \partial_{tt} - \partial_{xx}$, определенного на множестве $D(A_0)$ с соответствующими функциями $\varphi_n(x)$.

Система функций Λ является системой собственных функций операторов A_0 и A с собственными значениями

$$\mu_{nm} = \lambda_n^2 - \left(\frac{b}{a}m\right)^2 = \left(n - \frac{1}{2} + \theta_n\right)^2 - \left(\frac{b}{a}m\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Легко видеть, что для оператора A справедливы свойства «а»–«г», перечисленные выше. Заметим, что если $a = 1$, то $\text{Ker } A = \{0\}$. Действительно, при $a = 1$ равенство $\mu_{nm} = 0$ равносильно соотношению $2\theta_n = 2bm + 2n - 1$, которое не выполняется ни при каких целых m, n , поскольку $2\theta_n \in (0, 1)$.

Обозначим

$$M = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_+ \mid \mu_{nm} \neq 0, \quad 2n - 1 \neq 2bm\},$$

$$\Lambda_2 = \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \cos((n-1)t), \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \sin((n-1)t) \mid a(2n-1) = 2bm \right\}.$$

Пусть Λ_3 задано (2.9) с соответствующими функциями $\varphi_n(x)$, $N_1 = \text{Ker } A$, $N_2 = \overline{L(\Lambda_2)}$, $N_3 = \overline{L(\Lambda_3)}$.

Очевидно, что если a есть нечетное число, то $N_2 = \{0\}$. Если a есть четное число, то $\dim N_2 = \infty$, поскольку N_2 содержит собственные функции оператора A с собственными значениями μ_{nm} , такими, что $n = \frac{1+b(2l+1)}{2}$, $m = \frac{(2l+1)a}{2}$, где $l \in \mathbb{Z}_+$. Из (2.8) следует, что на подпространстве N_2 собственные значения A ограничены: $(2n-1)\theta_n + \theta_n^2 \in [b_0, 2b_1 + b_1^2]$. Стандартно доказывается сходимость ряда

$$\sum_{(n,m) \in M} \frac{1}{\mu_{nm}^2}.$$

Таким образом, при четном a для оператора A выполнено свойство II, при нечетном a выполнено свойство III.

С помощью рядов Фурье стандартно доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 2.1. При нечетном a и $\lambda \notin \sigma(A)$ оператор

$$(A - \lambda)^{-1} : N_3 \rightarrow C(\bar{\Omega})$$

является вполне непрерывным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Функция $u \in L_2(\Omega)$ называется обобщенным решением задач (2.16), (2.17), (2.3) и (2.16), (2.18), (2.3) (либо задач (2.1), (2.17), (2.3) и (2.1), (2.18), (2.3)), если

$$(u, A\varphi) = (g(u) + f, \varphi) \quad \forall \varphi \in D(A_0)$$

(либо

$$(u, A\varphi) + (g(u), \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in D(A_0)$$

соответственно).

(В каждом из четырех случаев в данном определении выбирается $D(A_0)$ с соответствующими функциями $\varphi_n(x)$.)

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть a является нечетным числом, функция $g(u)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет условию (2.11), где $[\alpha, \beta] \cap \sigma(A) = \emptyset$. Тогда для любой T -периодической функции $f \in L_2(\Omega)$ задачи (2.16), (2.17), (2.3) и (2.16), (2.18), (2.3) имеют обобщенные решения $u \in C(\bar{\Omega})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $B(u) = g(u)$. Из (2.11) следует выполнение условий (1.3) и (1.5) (см. доказательство теоремы 2.1). Условия теоремы 1.1 выполнены. Из нее вытекает существование обобщенного решения $u \in L_2(\Omega)$. Из леммы 2.1 следует, что $u \in C(\bar{\Omega})$. Теорема доказана.

При четных значениях a собственные значения оператора A на N_2 положительные. Поэтому множество отрицательных собственных значений оператора A не имеет предельных точек.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть a является четным числом и выполнены условия (2.10)–(2.12). Тогда для любой T -периодической функции $f \in L_2(\Omega)$ задачи (2.1), (2.17), (2.3) и (2.1), (2.18), (2.3) имеют обобщенное решение $u \in L_2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из теоремы 1.3.

§ 3. КВАЗИЛИНЕЙНОЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

1. Одномерное уравнение. Рассмотрим краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения

$$u'' + g(u) = f(x), \quad x \in (0, \pi); \quad (3.1)$$

$$u(0) = u(\pi) = 0. \quad (3.2)$$

Функция $g(u)$ удовлетворяет одному из условий

$$-\infty < \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} \leq \overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} < 1, \quad (3.3)$$

$$n^2 < \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} \leq \overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} < (n+1)^2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Собственные функции $\varphi_n(x) = \sin nx$ линейной задачи

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(\pi) = 0$$

имеют собственные значения $\lambda_n = n^2$. Как в § 2, определим оператор A с

$$D(A) = \left\{ u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin nx \in L_2(0, \pi) \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^4 u_n^2 < \infty \right\} \subseteq H_1^0(0, \pi).$$

При этом

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n \sin nx.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Обобщенным решением задачи (3.1), (3.2) называется функция $u \in L_2(0, \pi)$, такая, что

$$(u, A\varphi) = (g(u), \varphi) - (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in D(A).$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть функция $g(u)$ непрерывна и выполнено (3.3) или (3.4). Тогда для любой функции $f(x) \in L_2(0, \pi)$ задача (3.1), (3.2) имеет обобщенное решение $u \in C^1(0, \pi) \cap H_1^0(0, \pi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\sigma(A) = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B(u) = g(u)$. Из (3.3), (3.4) следует существование действительного числа $\lambda \notin \sigma(A)$, такого, что для функции $p(u) = g(u) - \lambda u$ выполнены неравенства (2.15) с положительной константой $\gamma \in (0, k^2 - \lambda)$, где $k \in \mathbb{N}$ и $(\lambda, k^2) \cap \sigma(A) = \emptyset$.

Как в теореме 2.1, доказывается выполнение условий (1.3), (1.5). Условия I, III для оператора A , очевидно, выполнены. Из теоремы 1.1 следует существование обобщенного решения $u \in L_2(0, \pi)$ задачи (3.1), (3.2). Обозначим $v = f - g(u)$. Из (3.3), (3.4) следует, что $v \in L_2(\Omega)$. Из (3.4) следует $u = A^{-1}v$. Отсюда и из определения $D(A)$ вытекает включение $u \in C^1(0, \pi) \cap H_1^0(0, \pi)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В [16] аналогичный результат получен для случая, когда $g(u) = \lambda u + p(u)$, где $\lambda \notin \sigma(A)$ и

$$|p(u)| \leq C_1 |u|^\sigma + C_2 \quad \forall u, \quad \sigma \in (0, 1).$$

2. Многомерный случай. Пусть Ω есть ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей. Рассмотрим задачу

$$Lu = g(u) + f(x), \quad x \in \Omega; \tag{3.5}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.6}$$

Здесь

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right),$$

$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, существует $m > 0$, такое, что неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq m \sum_{i=1}^n \xi_i^2$$

справедливо для всех $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \Omega$. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ и λ_n есть соответственно собственные функции и собственные значения задачи

$$Lu = \lambda u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

в Ω , такие, что последовательность $\{\lambda_n\}$ не убывает. Как в § 2, определим оператор A , являющийся самосопряженным расширением оператора L с

$$D(A) = \left\{ u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \varphi_n(x) \mid \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 u_n^2 < \infty \right\}.$$

При этом

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n \varphi_n(x) \quad \forall u \in D(A).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Обобщенным решением задачи (3.5), (3.6) называется функция $u \in L_2(\Omega)$, такая, что

$$(u, A\varphi) + (g(u), \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in D(A).$$

Пусть функция $g(u)$ удовлетворяет одному из условий:

$$-\infty < \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} \leq \overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} < \lambda_1; \quad (3.7)$$

$$\lambda_n < \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} \leq \overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} < \lambda_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть функция $g(u)$ непрерывна и выполнено (3.7) или (3.8). Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \quad (3.9)$$

сходится, то для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ задача (3.5), (3.6) имеет обобщенное решение $u \in L_2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.7) и (3.8) следует существование

$$\lambda \notin \sigma(A) = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

такого, что для функции $p(u) = g(u) - \lambda u$ выполнены неравенства (2.15) с положительной константой $\gamma \in (0, \lambda_k - \lambda)$, где $k \in \mathbb{N}$ и $(\lambda, \lambda_k) \cap \sigma(A) = \emptyset$. Как в теореме 2.1, доказывается выполнение условий (1.3), (1.5) для оператора $B(u) = g(u)$. Условия теоремы 1.1 выполнены. Из нее вытекает утверждение теоремы 3.2. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. При выполнении условия (3.8) задача (3.5), (3.6) является некоэрцитивной и нерезонансной. Коэрцитивный и резонансные случаи для задачи (3.5), (3.6) изучены в [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Ряд (3.9) сходится, например, если

$$\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi) \subseteq R^2$$

или

$$\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, \pi) \subseteq R^3.$$

Действительно, в первом случае

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \frac{1}{4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^2,$$

а во втором

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \frac{1}{9} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} \right)^3.$$

Из этих оценок следует также, что обобщенное решение $u \in C(\bar{\Omega})$ удовлетворяет граничному условию (3.6) в классическом смысле. Если граница $\partial\Omega$ гладкая, то имеет место оценка $\lambda_k \geq Ck^{2/n}$, где $C > 0$ не зависит от k (см. [17, неравенство (1.55)]). Поэтому в данном случае для размерностей $n \in \{2, 3\}$ ряд (3.9) будет также сходиться.

Рассмотрим уравнение

$$Lu = g(x, u) + f(x), \quad x \in \Omega. \quad (3.10)$$

Функция $g(x, u)$ измерима по x при всех $u \in \mathbb{R}$ и непрерывна по u при почти всех $x \in \Omega$. Предположим также, что существует $\lambda \notin \sigma(A)$, такое, что $\lambda < \lambda_n$ и $(\lambda, \lambda_n) \cap \sigma(A) = \emptyset$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и

$$(g(x, u) - \lambda u)u \geq f_1(x), \quad |g(x, u) - \lambda u| \leq \gamma|u| + f_2(x, t) \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad (3.11)$$

где $f_1, f_2 \in L_2(\Omega)$ и

$$\gamma \in (0, \lambda_n - \lambda). \quad (3.12)$$

ТЕОРЕМА 3.3. При выполнении условий (3.11), (3.12) задача (3.10), (3.6) имеет обобщенное решение $u \in L_2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.11), (3.12) так же, как при доказательстве теоремы 2.1, выводится, что для оператора

$$B(u) = g(x, u): L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$$

выполнены условия (1.3), (1.5). Таким образом, утверждение теоремы 3.3 следует из теоремы 1.1. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brezis H., Nirenberg L. Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1978. V. 5, N 2. P. 225—325.
2. Brezis H., Nirenberg L. Forced vibration for a nonlinear wave equations // Comm. Pure Appl. Math. 1978. V. 31, N 1. P. 1—30.
3. Рудаков И. А. Нелинейные колебания струны // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. 1984. № 2. С. 9—13.
4. Brezis H. Periodic solutions of nonlinear vibrating string and duality principles // Bull. Amer. Math. Soc. 1983. V. 8, N 3. P. 409—426.
5. Coron J. M. Periodic solutions of a nonlinear wave equations without assumption of monotonicity // Math. Ann. 1983. V. 262, N 2. P. 273—285.
6. Rabinowitz P. Free vibration for a semilinear wave equation // Comm. Pure Appl. Math. 1980. V. 33, N 3. P. 667—689.
7. Tanaka K. Infinitely many periodic solutions for the equations: $u_{tt} - u_{xx} \pm |u|^{s-1} = f(x, t)$ // Comm. Part. Different. Equations. 1995. V. 10, N 11.
8. Плотников П. И. Существование счетного множества периодических решений задачи о вынужденных колебаниях для слабо нелинейного волнового уравнения // Мат. сб. 1988. Т. 136 (178), № 4 (8). С. 546—560.
9. Feireisl E. On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term // Czechoslovak Math. J. 1988. V. 38, N 1. P. 78—87.
10. Lovicarova H. Periodic solutions of a weakly nonlinear wave equations in one dimension // Ibid. 1969. V. 19 (94). P. 324—342.

11. Рудаков И. А. Задача о свободных периодических колебаниях струны с немонотонной нелинейностью // УМН. 1985. Т. 40, вып. 1 (241). С. 215—216.
12. Barby V., Pavel N. H. Periodic solutions to nonlinear one dimensional wave equation with x -dependent coefficients // Trans. Amer. Math. Soc. 1997. V. 349, N 5. P. 2035—2048.
13. Рудаков И. А. Периодическое по времени решение нелинейного волнового уравнения с непостоянными коэффициентами // Фундамент. и прикл. мат. 2002. Т. 8, вып. 3. С. 877—886.
14. Рудаков И. А. Периодические решения нелинейного волнового уравнения с непостоянными коэффициентами // Мат. заметки. 2004. Т. 76, вып. 3. С. 427—438.
15. Бабич В. М., Григорьева Р. С. Ортогональные разложения и метод Фурье. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983.
16. Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988.
17. Rabinowitz P. Multiple critical points of perturbed symmetric functionals // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V. 272, N 2.