

Программа курса «Дифференциальные уравнения»

II курс, 2 поток, 2016/17 уч. год
Лектор — профессор И.Н. Сергеев

1. Поля направлений на плоскости. Интегральные кривые. Общее решение. Уравнение первообразной. Уравнение в дифференциалах. Автономное уравнение. Критерий единственности. Интеграл уравнения в дифференциалах. Уравнение в полных дифференциалах, его потенциал. Уравнение с разделяющимися переменными. Однородное уравнение.
2. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Задача Коши. Локальная теорема существования и единственности. Теорема единственности в целом. Непродолжаемые решения. Теорема продолжаемости до границы области.
3. Уравнения произвольного порядка. Задача Коши. Каноническая замена. Локальная теоремы существования и единственности. Теоремы единственности в целом и продолжаемости до границы области.
4. Леммы об интегральном (Гронуолла — Беллмана) и дифференциальном неравенствах. Теорема продолжаемости для линейной системы и линейного уравнения.
5. Уравнения, не разрешённые относительно производной. Теорема существования и единственности. Дискриминантная кривая. Метод введения параметра.
6. Линейные однородные системы. Теорема об изоморфизме. Фундаментальная система решений. Фундаментальная матрица. Оператор Коши. Определитель Вронского и линейная зависимость векторных функций. Формула Лиувилля — Остроградского.
7. Линейные однородные уравнения. Общее решение. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского и линейная зависимость скалярных функций. Формула Лиувилля — Остроградского. Восстановление линейного уравнения по его фундаментальной системе решений.
8. Линейные неоднородные системы и уравнения. Общее решение. Метод вариации постоянных. Функция Грина задачи Коши.
9. Линейные периодические системы. Оператор монодромии и мультипликаторы. Теоремы существования и единственности периодического решения.
10. Линейные неоднородные уравнения второго порядка. Краевые задачи. Вырожденные и невырожденные задачи. Теорема об альтернативе. Функция Грина краевой задачи. Теорема существования.
11. Линейные однородные уравнения второго порядка. Нули решений. Перемежаемость нулей. Устранение коэффициента при первой производной. Теорема Штурма. Оценки колеблемости. Теорема Кнезера.
12. Экспонента матрицы. Вычисление экспоненты методом жордановых форм. Фундаментальная система решений линейной системы с постоянными коэффициентами. Метод неопределённых коэффициентов.
13. Логарифм матрицы. Вычисление логарифма методом жордановых форм. Ляпуновское преобразование. Теория Флоке — Ляпунова.
14. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристический многочлен. Общее решение. Уравнение Эйлера.
15. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и квазимногочленом в правой части. Вид частного решения. Резонанс.
16. Семейство задач Коши для нормальной системы. Непрерывная зависимость решения от правых частей. Компактно-открытая топология в пространстве решений. Непрерывная зависимость решения от параметра и от начального значения.

17. Дифференцируемость решения по параметру. Лемма Адамара. Система в вариациях по параметру и по начальному значению. Разложение в ряд до линейного члена. Фазовый объем. Теорема Лиувилля. Теорема о выпрямлении интегральных кривых.
18. Семейство задач Коши для уравнения произвольного порядка. Непрерывность и дифференцируемость решения по параметру. Уравнение в вариациях по параметру. Разложение решения по параметру в ряд до линейного члена. Линеаризация уравнения колебаний маятника.
19. Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость решения нормальной системы или уравнения произвольного порядка. Инвариантность устойчивости относительно начального момента и нормы.
20. Устойчивость решений линейных однородных и неоднородных систем. Критерии устойчивости линейной системы с постоянными и периодическими коэффициентами.
21. Леммы Ляпунова об устойчивости и об асимптотической устойчивости. Теорема Четаева. Теорема Ляпунова об исследовании устойчивости по первому приближению.
22. Автономные системы. Инвариантность фазовых кривых относительно временных сдвигов. Динамическая система. Фазовый поток. Генератор фазового потока. Три типа фазовых траекторий автономной системы.
23. Теорема о выпрямлении фазовых траекторий автономной системы. Первый интеграл. Независимые первые интегралы. Полная система первых интегралов. Существование полной системы независимых первых интегралов. Общее решение автономной системы.
24. Одномерное фазовое пространство. Устойчивость особой точки. Иррациональный поворот окружности. Совпадение временного и фазового среднего для характеристической функции множества.
25. Двумерное фазовое пространство. Фазовые кривые автономной системы и интегральные кривые уравнения в дифференциалах. Фигуры Лиссажу. Иррациональная обмотка тора, ее всюду плотность на торе. Уравнение Ньютона. Интеграл энергии.
26. Классификация Пуанкаре особых точек на плоскости. Седло, узел, центр, фокус. Особые точки уравнения колебаний маятника. Система Лотка — Вольтерра.
27. Цикл на плоскости. Мультипликатор цикла. Вычисление мультипликатора. Отображение Пуанкаре. Предельное множество фазовой траектории. Предельный цикл. Устойчивость цикла. Ее связь с функцией последования и с мультипликатором цикла.
28. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка. Его характеристики. Общее решение. Общий вид интегрирующего множителя уравнения в дифференциалах. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
29. Квазилинейные однородные уравнения в частных производных первого порядка. Его характеристики. Существование интегрирующего множителя уравнения в дифференциалах. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Уравнение Хопфа.

**Сокращённая программа
для коллоквиума по курсу «Дифференциальные уравнения»**

1. Теорема существования и единственности для нормальной системы. Каноническая замена. Теорема существования и единственности для уравнения произвольного порядка.
2. Теоремы единственности в целом и продолжаемости для нормальной системы. Лемма Гронуолла — Беллмана. Теорема продолжаемости для линейной системы.
3. Определитель Вронского и линейная зависимость функций. Формула Лиувилля — Остроградского. Восстановление линейного уравнения по его фундаментальной системе.
4. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами и квазимногочленом в правой части.
5. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от параметров и от начальных значений. Решение семейства задач Коши.
6. Дифференцируемость решения задачи Коши по параметру. Система в вариациях по параметру и по начальным значениям.
7. Леммы Ляпунова об устойчивости и об асимптотической устойчивости. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.
8. Теорема Четаева. Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению.
9. Три типа фазовых траекторий автономной системы. Локальное выпрямление фазовых траекторий. Существование независимых первых интегралов.
10. Отображение Пуанкаре для цикла на плоскости. Устойчивость цикла. Ее связь с функцией последования и с мультипликатором цикла.
11. Характеристики линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
12. Характеристики квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.