Экзаменационные вопросы по уравнениям математической физики

лектор А. А. Коньков

1. Классификация линейных уравнений второго порядка по И.Г. Петровскому.

2. Пространства $\mathcal{D}(\Omega)$ и $\mathcal{D}'(\Omega)$ основных и обобщенных функций. Операции сложения обобщенных функций и умножения обобщенной функции на бесконечно гладкую. Определение производной от обобщенной функции.

3. Слабый предел обобщенных функций. Замкнутость пространства обобщенных функций относительно слабого предела (без доказательства).

4. Первообразная от обобщенной функции. Докажите, что у всякой обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ существует первообразная, определенная с точностью до константы.

5. Замена переменной у обобщенной функции.

6. Носитель обобщенной функции. Свойства носителя обобщенных функций:
$$\operatorname{supp}(f+g) \subset \operatorname{supp} f \cup \sup g,$$
$$\operatorname{supp}(f\psi) \subset \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \psi,$$
$$\operatorname{supp} \frac{\partial f}{\partial x_i} \subset \operatorname{supp} f,$$
где $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\psi \in C^\infty(\Omega)$, Ω — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$.

7. Обобщенные функции с компактным носителем. Докажите, что всякая обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ с компактным носителем $\operatorname{supp} f \Subset \Omega$, где Ω — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, является непрерывным функционалом на пространстве $C^m(\Omega)$ для некоторого целого числа $m \geq 0$.

8. Прямое произведение обобщенных функций. Докажите эквивалентность двух определений прямого произведения:
$$(f(x), (g(y), \varphi(x,y))) = (g(y), (f(x), \varphi(x,y)))$$
для всех $f \in \mathcal{D}'(X)$, $g \in \mathcal{D}'(Y)$ и $\varphi \in \mathcal{D}(X \times Y)$, где $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^m$ — открытые множества.

9. Свертка обобщенных функций. Коммутативность свертки. Существование свертки в случае, когда одна из двух обобщенных функций имеет компактный носитель.

10. Дифференцирование свертки обощенных функций.

11. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.

12. Теоремы существования и единственности решений уравнения

$$\mathcal{L}u = f(x)$$

в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, где $\mathcal{L} = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \partial^\alpha$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.

13. Фундаментальное решение линейного обыкновенного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.

14. Обобщенная задача Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Существование и единственность решения.

15. Формулы Грина: многомерный аналог формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_\Omega \frac{\partial h}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} h \cos(\nu, x_i) dS$$

и формула интегрирования по частям

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g\, dx = \int_{\partial\Omega} fg \cos(\nu, x_i) dS - \int_\Omega \frac{\partial g}{\partial x_i} f\, dx,$$

где $h, f, g \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, Ω — ограниченное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой границей, а ν — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

16. Фундаментальное решение оператора Лапласа

$$\mathcal{E}_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & n = 2, \\ -\frac{1}{(n-2)|S_1|} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3. \end{cases}$$

17. Фундаментальное решение волнового оператора $\Box_a = \partial_t^2 - a^2\partial_x^2$, $a > 0$, случай одномерного основного пространства:

$$\mathcal{E}_1(x,t) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

18. Фундаментальное решение волнового оператора $\Box_a = \partial_t^2 - a^2\triangle$, $a > 0$, случай трехмерного основного пространства:

$$\mathcal{E}_3(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^4,$$

где

$$(\delta_{S_r}, \varphi) = \int_{S_r} \varphi\, dS, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3).$$

19. Фундаментальное решение волнового оператора $\Box_a = \partial_t^2 - a^2\triangle$, $a > 0$, случай двумерного основного пространства:

$$\mathcal{E}_2(x,t) = \frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3.$$

Теорема о продолжении обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ на функции вида $\varphi(x)1(x_n)$, где $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

20. Фундаментальное решение оператора теплопроводности $\partial_t - a^2\triangle$, $a > 0$,

$$\mathcal{E}_n(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

21. Обобщенная задача Коши для волнового уравнения. Теорема существования и единственности решения (случай размерности основного пространства $n = 1, 2, 3$).

Подсказка. Считать известным, что в случае размерности основного пространства $n = 1, 2, 3$ фундаментальными решениями волнового оператора $\partial_t^2 - a^2\triangle$, $a > 0$, являются следующие функции:

$$\mathcal{E}_1(x,t) = \frac{1}{2a}\theta(at-|x|), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\mathcal{E}_2(x,t) = \frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3,$$

и

$$\mathcal{E}_3(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^4,$$

где

$$(\delta_{S_r}, \varphi) = \int_{S_r} \varphi \, dS, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3).$$

22. Классическая задача Коши для одномерного волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \\ u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases}$$

где $a > 0$, $f \in C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$. Существование и единственность решения. Формула Даламбера

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2}(u_0(x+at) + u_0(x-at)).$$

Подсказка. Считать известным, что фундаментальным решением одномерного волнового оператора $\partial_t^2 - a^2\partial_x^2$, $a > 0$, является следующая функция:

$$\mathcal{E}_1(x,t) = \frac{1}{2a}\theta(at-|x|), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

23. Классическая задача Коши для трехмерного волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \triangle u + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \\ u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases}$$

где $a > 0$, $f \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Существование и единственность решения. Формула Кирхгофа

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{B^x_{at}} \frac{f\left(\xi, t - \frac{|x-\xi|}{a}\right)}{|x-\xi|}\, d\xi + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S^x_{at}} u_1(\xi)\, dS \\ + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_{S^x_{at}} u_0(\xi)\, dS \right).$$

Подсказка. Считать известным, что фундаментальным решением трехмерного волнового оператора $\partial_t^2 - a^2 \triangle$, $a > 0$, является следующая обобщенная функция:

$$\mathcal{E}_3(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^4,$$

где

$$(\delta_{S_r}, \varphi) = \int_{S_r} \varphi\, dS, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3).$$

24. Классическая задача Коши для двумерного волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \triangle u + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \\ u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases}$$

где $a > 0$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty))$, $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Существование и единственность решения. Формула Пуассона

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{B^x_{a(t-\tau)}} \frac{f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}} + \frac{1}{2\pi a} \int_{B^x_{at}} \frac{u_1(\xi)\, d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}} \\ + \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{B^x_{at}} \frac{u_0(\xi)\, d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-\xi|^2}} \right).$$

Подсказка. Считать известным, что фундаментальным решением двумерного волнового оператора $\partial_t^2 - a^2 \triangle$, $a > 0$, является следующая функция:

$$\mathcal{E}_2(x,t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3.$$

25. Теорема существования и единственности решения обобщенной задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = a^2 \triangle u + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

где $f \in \mathcal{M}$, $u_0 \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Формула Пуассона

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi,\tau)}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\xi d\tau + \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}}\, d\xi.$$

Подсказка. Считать известным, что фундаментальным решением оператора теплопроводности $\partial_t - a^2\triangle$, $a > 0$, является следующая функция:

$$\mathcal{E}_n(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

26. Существование и единственности решения классической задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = a^2 \triangle u + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Докажите, что если все производные по пространственным переменным, начиная с нулевого и до второго порядка включительно, от функции f принадлежат классу $\mathcal{M} \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, а от функции u_0 — классу $L_\infty(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$, то формула Пуассона

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi,\tau)}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\xi d\tau + \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}}\, d\xi$$

гарантирует, что $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, $u_t \in C(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, и при этом $u_{x_i x_j} \in C(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ для всех $i,j = 1,\ldots,n$.

27. Пространства С.Л. Соболева $W_p^m(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$. Полнота и сепарабельность пространств С.Л. Соболева.

28. Неравенство Фридрихса.

29. Обобщенное в смысле С.Л. Соболева решение первой краевой задачи

$$\begin{cases} \triangle u = f_0(x) + \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) \quad \text{в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = u_0, \end{cases}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $u_0 \in W_2^1(\Omega)$ и $f_i \in L_2(\Omega)$, $i = 0,1,\ldots,n$.

Существование и единственность обобщенного в смысле С.Л. Соболева решения первой краевой задачи.

30. Гармонические функции. Докажите, что всякая гармоническая функция из пространства $\mathcal{D}'(\Omega)$ принадлежит классу $C^\infty(\Omega)$.

    Подсказка. Воспользуйтесь сверткой с фундаментальным решением оператора Лапласа

$$\mathcal{E}_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & n = 2, \\ -\frac{1}{(n-2)|S_1|} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3. \end{cases}$$

31. Теоремы о среднем для гармонических функций.

32. Принцип максимума для гармонических функций.

33. Неравенство Харнака для гармонических функций.

34. Теорема Лиувилля для гармонических функций.

35. Принцип максимума для уравнения теплопроводности.