

Программа спецкурса по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Лектор Асташова И.В.
(2008-2009 учебный год).**

I. Исследование качественных свойств решений некоторых уравнений первого порядка.

1. Уравнение Риккати.

Отсутствие особых решений. Пример уравнения, имеющего непродолжаемые решения. Инвариантность уравнения относительно любого преобразования независимой переменной и относительно дробно – линейного преобразования неизвестной функции. Приведение уравнения Риккати линейным преобразованием неизвестной функции к простейшему виду. Простейшие случаи интегрируемости в квадратурах. Построение общего решения по известному частному решению. Построение общего решения в случае, когда известно 2 или 3 частных решения. Анггармоническое соотношение между решениями уравнения Риккати. Специальное уравнение Риккати и случаи его интегрируемости. Примеры.

2. Асимптотическое поведение решений полиномиального уравнения первого порядка.

Оценки сверху решений при помощи экспоненты. Пример, показывающий отсутствие подобной оценки для решений полиномиального уравнения второго порядка. Теорема Харди об асимптотическом поведении на бесконечности решений уравнения, разрешенного относительно производной, правая часть которого представляет собой отношение многочленов от независимого переменного и неизвестной функции.

II. Исследование качественных свойств решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

3. Преобразования уравнения и простейшие свойства решений.

Приведение линейного уравнения к простейшим формам: к уравнению, не содержащему члена с младшей производной и самосопряженному виду. Уравнение Бесселя. Уравнение Лежандра. Факторизация линейного дифференциального оператора второго порядка. Формула Лиувилля – Остроградского. Построение общего решения линейного однородного уравнения по известному частному решению. Связь между линейным однородным уравнением первого порядка и уравнением Риккати. Лемма Гронуолла.

4. Осцилляционные свойства решений.

Определение колеблющегося решения на отрезке и на полубесконечном интервале. Теорема об изолированности нулей решения. Простейшее достаточное условие неколеблемости решений. Теорема Штурма. Теорема сравнения. Оценки расстояния между нулями решения. Оценки расстояния между нулями решения уравнения Бесселя. Теорема Кнезера: достаточное условие колеблемости решений.

5. Асимптотическое поведение решений.

Асимптотическое поведение на бесконечности решений линейного уравнения второго порядка с вырождающимся

коэффициентом. Теорема Шпета и ее обобщение на случай более слабого ограничения на вырождающийся коэффициент уравнения.

6. Теоремы об ограниченности решений линейного уравнения. Теорема о сохранении свойства ограниченности решений уравнения при малых возмущениях коэффициента. Теорема об ограниченности решений уравнения с монотонно возрастающим к бесконечности коэффициентом.

III. Исследование качественных свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка на примере уравнения Эмдена – Фаулера и его обобщений.

7. Знакопостоянные решения.

Существование решений со степенной асимптотикой. Исследование асимптотического поведения на бесконечности знакопостоянных решений.

8. Знакопеременные решения. Критерий Аткинсона колеблемости всех решений уравнения и обобщения этого критерия.

9. Непродолжаемые решения.

Явление blow-up. Асимптотическое поведение непродолжаемых решений.

IV. Некоторые методы исследования качественных свойств решений дифференциальных уравнений высокого порядка. Обобщения некоторых результатов, доказанных для уравнения второго порядка, на случай уравнений высокого порядка.

10. Осцилляционные свойства решений линейных уравнений.

Теоремы о чередовании нулей решений 3-го, 4-го и n-го порядков

11. Осцилляционные свойства решений нелинейных уравнений.

Обобщения теоремы Аткинсона.

12. Некоторые асимптотические свойства решений нелинейных уравнений со степенной нелинейностью.

Существование решений со степенной асимптотикой. Исследование асимптотического поведения на бесконечности знакопостоянных решений. Явление blow-up. Асимптотическое поведение непродолжаемых решений.

Литература.

1. Р.Беллман. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Иностранная литература. 1954, 216 с.
2. В.В.Степанов. Курс дифференциальных уравнений // М.:Физматлит. 1959. 468 с.
3. И.Т.Кигурадзе, Т.А.Чантурия. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений // М.: Наука. 1990. 432 с.
4. G.A.Hardy. Some results concerning the behaviour at infinity of a real and continuous solution of an algebraic differential equation of the first order // Proc.London Math.Soc., 1912, ser. 2, № 10, p. 451-468.
5. И.М.Соболь. Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1948, т. LXI, № 2, с.219-222.
6. F.V.Atkinson. On second order nonlinear oscillations // Pacif. J. Math., 1955, v. 5, № 1, p. 643-647.

7. В. А.Кондратьев. О колеблемости решений уравнения $y^{(n)} + p(x)y=0$ // Труды ММО, 1961, № 10, с. 419-436.
8. И.Т.Кигурадзе. Об условиях колеблемости решений уравнения $u'' + a(t)|u|^m \operatorname{sign} u = 0$ // Cas. p. pest. mat., 1962, г. 87, № 4, р. 492--495.
9. И.Т.Кигурадзе. О колеблемости решений уравнения $\frac{d^m u}{dt^m} + a(t)|u|^m \operatorname{sign} u = 0$ //Мат. сборник, 1964, т. 65, № 2, с. 172-187.
- 10.И.Т.Кигурадзе. К вопросу о колеблемости решений нелинейных дифференциальных уравнений. Дифференц.-уравнения, 1965, т.1, №8, с. 995-1006.
- 11.J.S.W.Wong. On second-order nonlinear oscillation // Funkcialaj Ekvacioj, 1968, v. 11 p. 207-234.
- 12.А.Ю.Левин. Неосцилляция решений уравнения $x^n + p_1(x)x^{(n-1)} + \dots + p_n x = 0$ // УМН, 1969, т.24, вып.2 (146), с.43-96.
- 13.А. Д. Мышкис. Пример непродолжимого на всю ось решения дифференциального уравнения второго порядка колебательного типа //Дифференц. уравнения, 1969, т. 5, №12, с. 2267-2268.
- 14.В. А.Кондратьев, В.А. Никишкин. О положительных решениях уравнения $y' = p(x)y^k$ // В сб. «Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений и теории управления движением», Саранск: 1980, с.134-141.
- 15.В. А.Кондратьев, В.С.Самовол. О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена – Фаулера // Дифференц. уравнения. 1981, т. 17, № 4, с. 749-750.
- 16.Асташова И.В. Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений // В сб.: Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ имени И.Н.~Векуа. Тбилиси, ТГУ, 1985, т.1, № 3, с.9-11.
- 17.И. В. Асташова. Об асимптотическом поведении знакопеременных решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядка // В сб. Доклады расширенных заседаний семинара института прикладной математики им. И. Н. Векуа. Тбилиси, ТГУ, . 1988, т. 3, №3, с. 9-12.
- 18.И.Т.Кигурадзе. Критерий колеблемости для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 1992, т. 28, № 2, с.207-219.
- 19.V.A.Kozlov. On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations. //Ark. Mat., 1999, v. 37, № 2, p.305-322.
- 20.И.Т.Кигурадзе О взрывных кнезеровских решениях нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков // Дифференц.уравнения, 2001, т.37, № 6, с.735--743.
- 21.И.В.Асташова. Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков // Современная математика и ее приложения. 2003, т.8, с.3--33.
(Astashova I.V. Application of Dynamical Systems to the Study of Asymptotic Properties of Solutions to Nonlinear Higher-Order Differential Equations // Journal of Mathematical Sciences. Springer Science+Business Media, 2005. V. 126, № 5, p.1361--1391.)

22. I.V. Astashova. On Existence of Non-oscillatory Solutions to Quasi-linear Differential Equations // Georgian Math. J., 2007, v. 14, № 2, p. 223-238.
23. И.В. Асташова. О колеблемости решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 2007, т. 43, № 6, с. 852.
24. И.В. Асташова. Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Известия РАН, 2008, т. 72, № 6, с. 103-124.