

Приложение к программе спецкурса «Методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений»

Лектор Асташова И.В.

(2015–2016 учебный год)

1. Различные подходы к определению понятия решения обыкновенного дифференциального уравнения.
2. Различные формулировки теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка.
3. Особые решения. Примеры неединственности решений и примеры уравнений, имеющих непродолжаемые решения с различными качественными свойствами.
4. Автономные системы дифференциальных уравнений. Классификация особых точек. Фазовый портрет.
5. Простейшие случаи интегрируемости Рикатти в квадратурах. Построение общего решения по известному частному решению. Построение общего решения в случае, когда известно 2 или 3 частных решения.
6. Ангармоническое соотношение между решениями уравнения Риккати.
7. Специальное уравнение Риккати и случаи его интегрируемости. Примеры.
8. Оценки сверху решений при помощи экспоненты.
9. Теорема Харди об асимптотическом поведении на бесконечности решений уравнения, разрешенного относительно производной, правая часть которого представляет собой отношение многочленов от независимого переменного и неизвестной функции.
10. Линейное уравнение второго порядка. Инвариантность линейного уравнения относительно любого преобразования независимой переменной и относительно дробно-линейного преобразования неизвестной функции.
11. Приведение линейного уравнения к простейшим формам: к уравнению, не содержащему члена с младшей производной и самосопряженному виду.
12. Уравнение Бесселя. Уравнение Лежандра. Факторизация линейного дифференциального оператора на примере оператора второго порядка.

13. Связь между линейным однородным уравнением первого порядка и уравнением Риккати.
14. Применение леммы Гронуолла для оценки решений дифференциальных уравнений
15. Определение колеблющегося решения на отрезке и на полубесконечном интервале.
16. Теорема об изолированности нулей решения. Простейшее достаточное условие неколеблемости решений.
17. Теорема Кондратьева и следствия из нее – теоремы Кнезера, Ельшина и Белмана.
18. Теорема Кнезера: достаточное условие колеблемости решений.
19. Теорема Штурма. Теорема сравнения. Оценки расстояния между нулями решения. Оценки расстояния между нулями решения уравнения Бесселя.
20. Асимптотическое поведение на бесконечности решений линейного уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом.
21. Теорема Шпета и ее обобщение на случай более слабого ограничения на вырождающийся коэффициент уравнения.
22. Теорема о сохранении свойства ограниченности решений уравнения при малых возмущениях коэффициента.
23. Теорема об ограниченности решений уравнения с монотонно возрастающим к бесконечности коэффициентом.
24. Уравнение Эмдена-Фаулера и исследование асимптотического поведения решений при различных значениях параметров.
25. Использование динамических систем в исследовании качественных свойств нелинейных дифференциальных уравнений.
26. Исследование асимптотического поведения на бесконечности знакопостоянных решений.
27. Явление blow-up. Существование решений со степенной асимптотикой.
28. Асимптотическое поведение непродолжаемых решений.
29. Теорема Кондратьева о нулях решений линейных уравнений 3-го, 4-го порядков.
30. Теорема Кондратьева о нулях решений линейных уравнений n -го порядков.

31. Критерий Аткинсона колеблемости всех решений нелинейного уравнения 2-го порядка и обобщения этого критерия.

32. Обобщения теоремы Аткинсона.

Литература.

1. Р.Беллман. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Иностранная литература. 1954, 216 с.
2. В.В.Степанов. Курс дифференциальных уравнений // М.:Физматлит. 1959. 468 с.
3. И.Т.Кигурадзе, Т.А.Чантурия. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений // М.: Наука. 1990. 432 с.
4. G.A.Hardy. Some results concerning the behaviour at infinity of a real and continuous solution of an algebraic differential equation of the first order // Proc.London Math.Soc., 1912, ser. 2, № 10, p. 451-468.
5. И.М.Соболев. Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1948, т. LXI, № 2, с.219-222.
6. М.И.Ельшин. Метод фаз и классический метод сравнения. // ДАН СССР, 1949, т. 68, вып. 5, с. 813—816.
7. Б. М. Чердак. Некоторые достаточные признаки асимптотической устойчивости решений линейного дифференциального уравнения второго порядка // Изв. вузов. Матем., 1962, № 1, 165-171.
8. F.V.Atkinson. On second order nonlinear oscillations // Pacif. J. Math., 1955, v. 5, № 1, p. 643-647.
9. В. А.Кондратьев. Достаточные условия неколеблемости и

$$y'' + p(x)y = 0$$
колеблемости решений уравнения $y'' + p(x)y = 0$. // ДАН СССР, 1957, т. 113, № 4, с. 742-745.
10. В. А.Кондратьев. О колеблемости решений уравнения

$$y^{(n)} + p(x)y = 0$$
// Труды ММО, 1961, № 10, с. 419-436.
11. И.Т.Кигурадзе. Об условиях колеблемости решений уравнения

$$u'' + a(t)|u|^m \operatorname{sign} u = 0$$
// Cas. p. pest. mat., 1962, r. 87, № 4, p. 492--495.
12. И.Т.Кигурадзе. О колеблемости решений уравнения

$$\frac{d^m u}{dt^m} + a(t)|u|^m \operatorname{sign} u = 0$$
// Мат. сборник, 1964, т. 65, № 2, с. 172-187.
13. И.Т.Кигурадзе. К вопросу о колеблемости решений нелинейных дифференциальных уравнений. Дифференц.-уравнения, 1965, т.1, №8, с. 995-1006.
14. J.S.W.Wong. On second-order nonlinear oscillation // Funkcialaj Ekvacioj, 1968, v. 11 p. 207-234.
15. А.Ю.Левин. Неосцилляция решений уравнения

$$x^n + p_1(x)x^{(n-1)} + \dots + p_n x = 0$$
// УМН, 1969, т.24, вып.2 (146), с.43-96.
16. А. Д. Мышкис. Пример непродолжимого на всю ось решения дифференциального уравнения второго порядка колебательного типа // Дифференц. уравнения, 1969, т. 5, №12, с. 2267-2268.

17. В. А. Кондратьев, В. А. Никишкин. О положительных решениях уравнения $y'' = p(x)y^k$ // В сб. «Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений и теории управления движением», Саранск: 1980, с. 134-141.
18. В. А. Кондратьев, В. С. Самовол. О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена – Фаулера // Дифференц. уравнения. 1981, т. 17, № 4, с. 749-750.
19. Асташова И. В. Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений // В сб.: Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ имени И. Н. Векуа. Тбилиси, ТГУ, 1985, т. 1, № 3, с. 9-11.
20. И. В. Асташова. Об асимптотическом поведении знакопеременных решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядка // В сб. Доклады расширенных заседаний семинара института прикладной математики им. И. Н. Векуа. Тбилиси, ТГУ, . 1988, т. 3, № 3, с. 9-12.
21. И. Т. Кигурадзе. Критерий колеблемости для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 1992, т. 28, № 2, с. 207-219.
22. V. A. Kozlov. On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations. // Ark. Mat., 1999, v. 37, № 2, p. 305-322.
23. И. Т. Кигурадзе О взрывных кнезеровских решениях нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков // Дифференц. уравнения, 2001, т. 37, № 6, с. 735--743.
24. И. В. Асташова. Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков // Современная математика и ее приложения. 2003, т. 8, с. 3--33.
(Astashova I. V. Application of Dynamical Systems to the Study of Asymptotic Properties of Solutions to Nonlinear Higher-Order Differential Equations // Journal of Mathematical Sciences. Springer Science+Business Media, 2005. V. 126, № 5, p. 1361--1391.)
25. I. V. Astashova. On Existence of Non-oscillatory Solutions to Quasi-linear Differential Equations // Georgian Math. J., 2007, v. 14, № 2, p. 223-238.
26. И. В. Асташова. О колеблемости решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 2007, т. 43, № 6, с. 852.
27. И. В. Асташова. Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Известия РАН, 2008, т. 72, № 6, с. 103-124.
28. Polya G. On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation. // Trans. Amer. Math. Soc. 24, 1924, p. 312--324.
29. Ch. I. de la Vallée-Poussin Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux 'equations d'ordre n. // Journ. Math. Pur. et Appl., 9 , 8, 1929, p. 125--144.
30. Taylor W. E., Jr. Oscillation criteria for certain nonlinear fourth order equations. // Internat. J. Math., 6, 1983, № 3, p. 551--557.
31. Lovelady D. L. On the oscillatory behavior of bounded solutions of higher order differential equations. // J. Diff. Equations, 19, 1975, №. 1, p. 167--175.