

Программа спецкурса по качественной теории обыкновенных
дифференциальных уравнений.

Лектор Асташова И.В.
(2014–2015 учебный год)

I. Общие понятия теории дифференциальных уравнений [3, 4, 12, 27].

1. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения и его решения. Понятие интегральной кривой. Связь интегральных кривых и решений уравнения. Задача Коши. Теорема Пикара существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Обобщения теоремы Пикара. Теоремы о продолжении решения в областях различных типов. Определитель Вронского. Связь линейной зависимости произвольной системы функций и решений линейного однородного дифференциального уравнения с равенством нулю определителя Вронского. Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Метод вариации произвольных постоянных. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n -ого порядка. Задачи, приводящие к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Автономные системы дифференциальных уравнений. Классификация особых точек. Фазовый портрет.

II. Исследование качественных свойств решений некоторых уравнений первого порядка.

2. Уравнение Риккати [3, 4, 12].

Отсутствие особых решений. Пример уравнения, имеющего непродолжаемые решения. Инвариантность уравнения относительно любого преобразования независимой переменной и относительно дробно-линейного преобразования неизвестной функции. Приведение уравнения Риккати линейным преобразованием неизвестной функции к простейшему виду. Простейшие случаи интегрируемости в квадратурах. Построение общего решения по известному частному решению. Построение общего решения в случае, когда известно 2 или 3 частных решения. Ангармоническое соотношение между решениями уравнения Риккати. Специальное уравнение Риккати и случаи его интегрируемости. Примеры.

3. Асимптотическое поведение решений полиномиального уравнения первого порядка [1, 14].

Оценки сверху решений при помощи экспоненты. Пример, показывающий отсутствие подобной оценки для решений полиномиального уравнения второго порядка. Теорема Харди об асимптотическом поведении на бесконечности решений уравнения, разрешенного относительно производной, правая часть которого представляет собой отношение многочленов от независимого переменного и неизвестной функции.

III. Исследование качественных свойств решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

4. Преобразования уравнения и простейшие свойства решений [3, 4, 5, 11, 25].

Приведение линейного уравнения к простейшим формам: к уравнению, не содержащему члена с младшей производной и самосопряженному виду. Уравнение Бесселя. Уравнение Лежандра. Факторизация линейного дифференциального оператора второго порядка. Формула Лиувилля–Остроградского. Построение общего решения линейного однородного уравнения по известному частному решению. Связь между линейным однородным уравнением первого порядка и уравнением Риккати. Лемма Гронуолла.

5. Осцилляционные свойства решений [5, 9, 18, 19, 26, 28].

Определение колеблющегося решения на отрезке и на полубесконечном интервале. Теорема об изолированности нулей решения. Простейшее достаточное условие неколеблемости решений. Теорема Штурма. Теорема сравнения. Оценки расстояния между нулями решения. Оценки расстояния между нулями решения уравнения Бесселя. Теорема Кнезера: достаточное условие колеблемости решений.

6. Асимптотическое поведение решений [1, 2, 3].

Асимптотическое поведение на бесконечности решений линейного уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом. Теорема Шпета и ее обобщение на случай более слабого ограничения на вырождающийся коэффициент уравнения.

7. Теоремы об ограниченности решений линейного уравнения [1, 3].

Теорема о сохранении свойства ограниченности решений уравнения при малых возмущениях коэффициента. Теорема об ограниченности решений уравнения с монотонно возрастающим к бесконечности коэффициентом.

IV. Исследование качественных свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка на примере уравнения Эмдена–Фаулера и его обобщений.

8. Знакопостоянные решения [1, 2, 5].

Существование решений со степенной асимптотикой. Исследование асимптотического поведения на бесконечности знакопостоянных решений.

9. Знакопеременные решения [4, 13, 16].

Критерий Аткинсона колеблемости всех решений уравнения и обобщения этого критерия.

10. Непродолжаемые решения [2, 5].

Явление blow-up. Асимптотическое поведение непродолжаемых решений.

V. Некоторые методы исследования качественных свойств решений дифференциальных уравнений высокого порядка. Обобщения некоторых результатов, доказанных для уравнения второго порядка, на случай уравнений высокого порядка.

11. Осцилляционные свойства решений линейных уравнений [22, 23, 24].

Теоремы о чередовании нулей решений 3-го, 4-го и n -го порядков.

12. Асимптотическое поведение решений линейных уравнений [15, 17].

13. Осцилляционные свойства решений нелинейных уравнений [2, 5, 10, 17, 19].

Обобщения теоремы Аткинсона.

14. Некоторые асимптотические свойства решений нелинейных уравнений со степенной нелинейностью [6, 7, 8, 18, 20, 21].

Существование решений со степенной асимптотикой. Исследование асимптотического поведения на бесконечности знакопостоянных решений для дифференциального уравнения третьего порядка. Явление blow-up. Асимптотическое поведение непродолжаемых решений.

Литература.

1. Р. Беллман. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений // М.: Иностранная литература, 1954, 216 с.
2. И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений // М.: Наука, 1990, 432 с.
3. В.В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений // М.: Физматлит, 1959, 468 с.
4. А.Ф. Филиппов. Введение в теорию дифференциальных уравнений: Учебник. Изд. 2-е, испр. // М.: КомКнига, 2007, – 240с.
5. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. Под редакцией И.В. Асташовой // М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012, 647 с.
6. И.В. Асташова. Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений // В сб.: Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ имени И.Н. Векуа, Тбилиси, ТГУ, 1985, т. 1, № 3, сс. 9–11.
7. И.В. Асташова. Об асимптотическом поведении знакопеременных решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядка // В сб. Доклады расширенных заседаний семинара института прикладной математики им. И.Н. Векуа, Тбилиси, ТГУ, 1988, т. 3, № 3, сс. 9–12.
8. И.В. Асташова. Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков // Современная математика и ее приложения, 2003, т. 8, сс. 3–33.

9. I.V. Astashova. On Existence of Non-oscillatory Solutions to Quasilinear Differential Equations // Georgian Math. J., 2007, v. 14, № 2, pp. 223–238.
10. И.В. Асташова. О колеблемости решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц.уравнения, 2007, т. 43, № 6, с. 852.
11. И.В. Асташова. Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Известия РАН, 2008, т. 72, № 6, сс. 103–124.
12. И.В. Асташова. Лекции для студентов // <http://new.math.msu.su/diffur/coursesR.htm>
13. F.V. Atkinson. On second order nonlinear oscillations // Pacif. J. Math., 1955, v. 5, № 1, pp. 643–647.
14. G.A. Hardy. Some results concerning the behaviour at infinity of a real and continuous solution of an algebraic differential equation of the first order // Proc.London Math.Soc., 1912, s. 2, № 10, pp. 451–468.
15. И.М. Соболев. Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений // ДАН СССР, 1948, т. LXI, № 2, сс. 219 – 222.
16. И.Т. Кигурадзе. Об условиях колеблемости решений уравнения $u'' + a(t)|u|^m \operatorname{sgn} u = 0$ // Cas. р. pest. mat., 1962, г. 87, № 4, pp. 492–495.
17. И.Т. Кигурадзе. О колеблемости решений уравнения $\frac{d^m u}{dt^m} + a(t)|u|^m \operatorname{sgn} u = 0$ // Мат. сборник, 1964, т. 65, № 2, сс. 172–187.
18. И.Т. Кигурадзе. К вопросу о колеблемости решений нелинейных дифференциальных уравнений. // Дифференц. уравнения, 1965, т. 1, № 8, сс. 995–1006.
19. И.Т. Кигурадзе. Критерий колеблемости для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц.уравнения, 1992, т. 28, № 2, сс. 207–219.
20. И.Т. Кигурадзе. О взрывных кнезеровских решениях нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков // Дифференц.уравнения, 2001, т. 37, № 6, сс. 735–743.

21. V.A. Kozlov. On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations // *Ark. Mat.*, 1999, v. 37, № 2, pp. 305–322.
22. В.А. Кондратьев. Элементарный вывод необходимого и достаточного условия неколеблемости решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. // *Успехи мат. наук*, 1957, т.12, вып. 3 /75/, сс. 159–160.
23. В.А. Кондратьев. О колеблемости решений линейных уравнений третьего и четвертого порядка // *Труды ММО*, 1959, № 8, сс. 259–281.
24. В.А. Кондратьев. О колеблемости решений уравнения $y^{(n)} + p(x)y = 0$ // *Труды ММО*, 1961, № 10, сс. 419–436.
25. А.Ю. Левин. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ // *УМН*, 1969, т. 24, вып. 2 (146), сс. 43–96.
26. А.Д. Мышкис. Пример непродолжимого на всю ось решения дифференциального уравнения второго порядка колебательного типа // *Дифференц.уравнения*, 1969, т. 5, № 12, сс. 2267–2268.
27. А.А. Черепанов. Программа для построения и исследования фазовых портретов на основе программных компонентов с открытым исходным кодом // *Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования: материалы Междунар. науч. конф.*, Архангельск, 2014, сс. 594–598.
28. J.S.W. Wong. On second-order nonlinear oscillation // *Funkcialaj Ekvacioj*, 1968, v. 11, pp. 207–234.