

Программа спецкурса по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Лектор Асташова И.В.

(2009-2010 учебный год).

- I.** Исследование качественных свойств решений некоторых уравнений первого порядка.
 1. Уравнение Риккати.

Отсутствие особых решений. Пример уравнения, имеющего непродолжаемые решения. Инвариантность уравнения относительно любого преобразования независимой переменной и относительно дробно – линейного преобразования неизвестной функции. Приведение уравнения Риккати линейным преобразованием неизвестной функции к простейшему виду. Простейшие случаи интегрируемости в квадратурах. Построение общего решения по известному частному решению. Построение общего решения в случае, когда известно 2 или 3 частных решения. Анггармоническое соотношение между решениями уравнения Риккати. Специальное уравнение Риккати и случаи его интегрируемости. Примеры.
- II.** Исследование качественных свойств решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка.
 3. Преобразования уравнения и простейшие свойства решений.

Приведение линейного уравнения к простейшим формам: к уравнению, не содержащему члена с младшей производной и самосопряженному виду. Уравнение Бесселя. Уравнение Лежандра. Факторизация линейного дифференциального оператора второго порядка. Формула Лиувилля – Остроградского. Построение общего решения линейного однородного уравнения по известному частному решению. Связь между линейным однородным уравнением первого порядка и уравнением Риккати.
 4. Осцилляционные свойства решений.

Определение колеблющегося решения на отрезке и на полубесконечном интервале. Теорема об изолированности нулей решения. Простейшее достаточное условие неколеблемости решений. Теорема Штурма. Теорема сравнения. Оценки расстояния между нулями решения. Оценки расстояния между нулями решения уравнения Бесселя. Теорема Кнезера: достаточное условие колеблемости решений. Критерий В.А.Кондратьева неколеблемости всех решений линейного уравнения второго порядка на интервале и его следствия (критерий М.И.Ельшина, критерий Кнезера).
- III.** Некоторые методы исследования качественных свойств решений дифференциальных уравнений высокого порядка. Обобщения некоторых результатов, доказанных для уравнения второго порядка, на случай уравнений высокого порядка.
 5. Осцилляционные свойства решений линейных уравнений.

Теоремы о чередовании нулей решений 3-го порядка (с доказательством), 4-го порядка (с доказательством в случае отрицательного потенциала, без доказательства в случае положительного потенциала), включая доказательство всех необходимых лемм, и n-го порядка (без доказательства).
- IV.** Исследование качественных свойств знакопеременных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка на примере уравнения Эмдена – Фаулера и его обобщений.
 6. Критерий Аткинсона колеблемости всех решений уравнения и обобщения этого критерия.

Литература.

1. Р.Беллман. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Иностранная литература. 1954, 216 с.
2. В.В.Степанов. Курс дифференциальных уравнений // М.:Физматлит. 1959. 468 с.
3. И.Т.Кигурадзе, Т.А.Чантурия. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений // М.: Наука. 1990. 432 с.
4. G.A.Hardy. Some results concerning the behaviour at infinity of a real and continuous solution of an algebraic differential equation of the first order // Proc.London Math.Soc., 1912, ser. 2, № 10, p. 451-468.
5. И.М.Соболь. Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1948, т. LXI, № 2, с.219-222.
6. F.V.Atkinson. On second order nonlinear oscillations // Pacif. J. Math., 1955, v. 5, № 1, p. 643-647.
7. В. А.Кондратьев. О колеблемости решений уравнения $y^{(n)} + p(x)y = 0$ // Труды ММО, 1961, № 10, с. 419-436.
8. И.Т.Кигурадзе. Об условиях колеблемости решений уравнения $u'' + a(t)|u|^m \operatorname{sign} u = 0$ // Cas. p. pest. mat., 1962, r. 87, № 4, p. 492--495.
9. И.Т.Кигурадзе. О колеблемости решений уравнения $\frac{d^m u}{dt^m} + a(t)|u|^m \operatorname{sign} u = 0$ //Мат. сборник, 1964, т. 65, № 2, с. 172-187.
10. И.Т.Кигурадзе. К вопросу о колеблемости решений нелинейных дифференциальных уравнений. Дифференц. уравнения, 1965, т.1, №8, с. 995-1006.
11. J.S.W.Wong. On second-order nonlinear oscillation // Funkcialaj Ekvacioj, 1968, v. 11 p. 207-234.
12. А.Ю.Левин. Неосцилляция решений уравнения $x^n + p_1(x)x^{(n-1)} + \dots + p_n x = 0$ // УМН, 1969, т.24, вып.2 (146), с.43-96.
13. А. Д. Мышкис. Пример непродолжимого на всю ось решения дифференциального уравнения второго порядка колебательного типа //Дифференц. уравнения, 1969, т. 5, №12, с. 2267-2268.
14. В. А.Кондратьев, В.А. Никишкин. О положительных решениях уравнения $y'' = p(x)y^k$ // В сб. «Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений и теории управления движением», Саранск: 1980, с.134-141.
15. В. А.Кондратьев, В.С.Самовол. О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена – Фаулера // Дифференц. уравнения. 1981, т. 17, № 4, с. 749-750.
16. Асташова И.В. Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений // В сб.: Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ имени И.Н.~Векуа. Тбилиси, ТГУ, 1985, т.1, № 3, с.9-11.
17. И. В. Асташова. Об асимптотическом поведении знакопеременных решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядка // В сб. Доклады расширенных заседаний семинара института прикладной математики им. И. Н. Векуа. Тбилиси, ТГУ, . 1988, т. 3, №3, с. 9-12.
18. И.Т.Кигурадзе. Критерий колеблемости для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 1992, т. 28, № 2, с.207-219.
19. V.A.Kozlov. On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations. //Ark. Mat., 1999, v. 37, № 2, p.305-322.

20. И.Т.Кигурадзе О взрывных кнезеровских решениях нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков // Дифференц.уравнения, 2001, т.37, № 6, с.735--743.
21. И.В.Асташова. Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков // Современная математика и ее приложения. 2003, т.8, с.3--33.
(Astashova I.V. Application of Dynamical Systems to the Study of Asymptotic Properties of Solutions to Nonlinear Higher-Order Differential Equations // Journal of Mathematical Sciences. Springer Science+Business Media, 2005. V. 126, № 5, p.1361--1391.)
22. I.V.Astashova. On Existence of Non-oscillatory Solutions to Quasi-linear Differential Equations // Georgian Math. J., 2007, v. 14, № 2, p. 223-238.
23. И.В.Асташова. О колеблемости решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 2007, т. 43, № 6, с.852.
24. И.В.Асташова. Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Известия РАН, 2008, т. 72, № 6, с. 103-124.