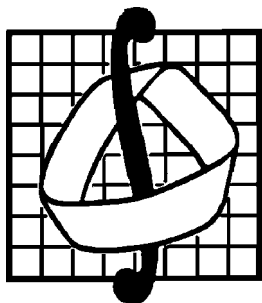


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА



Механико-математический факультет

А.Ю. Горицкий

С.Н. Кружков

Г.А. Чечкин

УРАВНЕНИЯ
С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ПЕРВОГО ПОРЯДКА.
(Учебное пособие)

Москва 1999

Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А.

**Уравнения с частными производными первого порядка.
(Учебное пособие)**

В пособии изучаются уравнения с частными производными первого порядка. Рассмотрены вопросы локального существования гладких решений задачи Коши для линейных, квазилинейных и нелинейных уравнений. Подробно изложена теория разрывных обобщенных решений для квазилинейного уравнения с одной пространственной переменной. Получено условие допустимости разрыва, введены понятия энтропии и энергии. Особое внимание уделяется решению задачи Римана о распаде произвольного разрыва. Пособие содержит большое количество оригинальных задач и упражнений; многие вопросы излагаются на примере их решения.

Предназначено для студентов, изучающих курс уравнений с частными производными. Может быть использовано в качестве задачника по данной теме.

ISBN 5-87597-061-8

© Горицкий А.Ю., Кружков С.Н.,
Чечкин Г.А., 1999 г.

Оглавление

Предисловие	5
Введение	6
1. Вывод уравнений	7
2. Локальная классическая теория	10
2.1. Линейное уравнение	11
2.2. Квазилинейное уравнение	14
2.3. Характеристики нелинейного уравнения	16
2.4. Задача Коши для нелинейного уравнения	18
2.5. Примеры нелинейных уравнений	21
2.6. Теорема существования решения задачи Коши	23
3. Классические (гладкие) решения задачи Коши и формирование особенностей	29
3.1. Квазилинейное уравнение с одной пространственной переменной	29
3.2. Сведение решения задачи Коши к неявному функциональному уравнению	33
3.3. Условие существования гладкого решения в полосе	35
3.4. Формирование особенностей	37
4. Обобщенные решения квазилинейного уравнения	40
4.1. Понятие обобщенного решения	40
4.2. Условие Ранкина-Гюгонио	42
4.3. Пример неединственности обобщенного решения задачи Коши в смысле интегрального тождества	50
4.4. Одномерное нелинейное уравнение.	53
5. Понятие обобщенного энтропийного решения	56
5.1. Условие допустимости разрыва в случае выпуклой функции состояния	57
5.2. Метод “исчезающей вязкости”	60
5.3. Понятие энтропии и необратимость процессов	67
5.4. Энергетические оценки	68
5.5. Определение обобщенного решения по Кружкову	73

6. Задача Римана о распаде разрыва	79
6.1. Уравнение Хопфа	80
6.2. Случай выпуклой функции состояния	82
6.3. Случай невыпуклой функции состояния	85
Заключение	90
Литература	94

Предисловие

Настоящий учебник является существенно расширенным и переработанным изданием книги [14]. Идея написания такого учебного пособия принадлежит Станиславу Николаевичу Кружкову, вклад которого в теорию уравнений с частными производными первого порядка трудно переоценить. Это издание выходит уже после безвременной кончины профессора С.Н.Кружкова, выдающегося математика и талантливого педагога. Хочется отметить огромную роль Станислава Николаевича в реорганизации курса уравнений с частными производными, который читается на механико-математическом факультете МГУ им. М.В.Ломоносова. По его настоятельной рекомендации курс семинаров был увеличен с полугодового до годового. Были введены новые разделы, среди которых — уравнения с частными производными первого порядка, где изучались локальная классическая теория, возникновение и формирование разрывов у решений за конечное время, обобщенные разрывные решения, ударные волны.

Эта книга была задумана как учебное пособие с большим количеством задач, на примере решения которых излагается существенная часть материала. Нам хотелось сделать книгу, которая помогала бы студентам изучать современные проблемы математической физики в легкой и доступной форме. Отмечая большую роль учебного пособия [15], посвященного уравнениям второго порядка, мы пытались сделать такую же хорошо воспринимаемую студентами книгу по уравнениям с частными производными первого порядка.

Следующее ниже введение мы сохранили практически в том виде, в каком оно было написано С.Н.Кружковым для [14], несмотря на то, что настоящее издание включает в себя ряд новых разделов. Прежде всего это касается локальной теории уравнений в частных производных первого порядка, в том числе и нелинейных (разделы 2.1–2.6). Кроме того, рассмотрены обобщенные решения одномерного нелинейного уравнения (раздел 4.4), более подробно изложены вопросы, связанные с понятиями энтропии и энергии (разделы 5.3–5.5).

Приведенный в конце пособия список литературы разделен на две группы. Первая включает в себя научные статьи и фундаментальные работы, которые мы рекомендуем читать в случае более углубленного изучения темы; вторая часть включает учебники и учебные пособия, предназначенные для студентов.

Горицкий А.Ю., Чечкин Г.А., Москва, 19 апреля 1999 г.

Введение

Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка возникли несколько позже появления понятия производной. Четкий физический смысл этого понятия как скорости движения и не менее четкий и наглядный геометрический смысл его как тангенса угла наклона касательной к оси абсцисс на координатной плоскости приводили огромное число задач механики и геометрии к решению соответствующего дифференциального уравнения с частными производными первого порядка при заданных начальных данных. Локальная теория таких уравнений, основанная на понятиях производной по направлению и характеристик, сформировалась в XVIII веке.

Во многих такого рода задачах одной из независимых переменных является время, а физические процессы, моделируемые ими, протекают достаточно долго. С течением времени могут возникнуть особенности у классических решений рассматриваемых уравнений. Основные особенности бывают двух типов: слабые разрывы, когда само решение еще непрерывно, но разрывной становится производная, и сильные разрывы, когда за конечное время решение приобретает разрыв первого рода. Бывают еще более сильные сингулярности взрывного типа (“blow up”), когда у решения появляется разрыв второго рода. Последнюю ситуацию в настоящем пособии мы рассматривать не будем.

Понятно, что после появления сильных особенностей необходимо было вводить в рассмотрение понятие производной разрывных функций, да и разрывные начальные условия в принципе были возможны сами по себе. Долгое время были неясны какие-либо подходы к этой ситуации. Выход намечился только к середине нашего века после появления “идеологии обобщенных функций” (как физической, так и математической). Первой математической реализацией этой идеологии явилась теперь уже классическая работа Е.Хопфа [1] 1950 года, в которой построена нелокальная теория задачи Коши для уравнения

$$u_t + (u^2/2)_x = 0 \quad (0.1)$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (0.2)$$

где $u_0(x)$ — произвольная ограниченная измеримая функция. Есте-

ственным обобщением уравнения (0.1) является уравнение

$$u_t + (f(u))_x = 0. \quad (0.3)$$

Существенный вклад в нелокальную теорию задачи Коши для этого уравнения внесли (в хронологическом порядке основных работ) О.А.Олейник [2], [6], А.Н.Тихонов, А.А.Самарский [3], П.Лакс [4], О.А.Ладыженская [5], И.М.Гельфанд [7]; наиболее общая законченная теория задачи Коши (0.3), (0.2) в пространстве ограниченных измеримых функций построена С.Н.Кружковым в [8], [9] (см. также [16]). Уравнения вида (0.3) являются простейшими математическими моделями многих природных явлений, отражающими суть этих явлений.

Основная цель данного пособия: после напоминания материала локальной теории, объяснить, как решается задача о продолжении разрывных состояний при помощи понятия обобщенных решений. Особое внимание будет уделено так называемой задаче Римана о распаде произвольного разрыва, решение которой выражается как разрывными функциями (ударные волны), так и непрерывными функциями (так называемые центрированные волны разрежения).

Мы надеемся, что данное пособие будет полезным при изучении современной теории уравнений с частными производными и уравнений математической физики.

1. Вывод уравнений

Уравнение Хопфа. Рассмотрим одномерную среду, состоящую из частиц, движущихся по инерции (т.е. без взаимодействия и в отсутствии внешних сил). Обозначим $u(t, x)$ — скорость частицы, находящейся в момент времени t в точке x . Если $x = \varphi(t)$ — траектория движения некоторой фиксированной частицы, то ее скорость — $\dot{\varphi}(t) = u(t, \varphi(t))$, ускорение же $\ddot{\varphi}(t)$ равно нулю. Значит,

$$0 = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt} u(t, \varphi(t)) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \dot{\varphi} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u.$$

Полученное уравнение

$$u_t + uu_x = 0, \quad (1.1)$$

описывающее эволюцию поля скоростей u невзаимодействующих частиц, и называется уравнением Хопфа.

Уравнение неразрывности. Это уравнение, которое выводится в курсе механики сплошной среды, описывает движение жидкости (или газа) в \mathbb{R}^n при отсутствии источников и стоков. Обозначим $v(x, t) = (v_1, \dots, v_n)$ — вектор скорости движения жидкости, $\rho(x, t)$ — ее плотность. Зафиксируем произвольную область $V \subset \mathbb{R}^n$. В момент времени t масса жидкости, содержащейся в этой области равна

$$M_V(t) = \int_V \rho(x, t) dx,$$

скорость изменения этой массы есть dM_V/dt . С другой стороны, при отсутствии источников и стоков внутри V , изменение массы M_V происходит только от втекания и вытекания жидкости через границу ∂V рассматриваемой области, то есть скорость изменения массы $M_V(t)$ равна потоку жидкости через ∂V :

$$\frac{dM_V}{dt} = - \int_{\partial V} (v(x, t), \nu) \cdot \rho(x, t) dS_x.$$

Здесь (v, ν) — скалярное произведение вектора скорости v и вектора единичной внешней нормали ν к границе в точке $x \in \partial V$, dS_x — элемент площади на ∂V .

Таким образом, имеем:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(x, t) dx = - \int_{\partial V} (v(x, t), \nu) \cdot \rho(x, t) dS_x.$$

В предположении, что ρ и u достаточно гладки, преобразуем правую часть последнего равенства по формуле Гаусса-Остроградского (интеграл от дивергенции по некоторой области равен потоку через ее границу):

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = - \int_V \operatorname{div}(\rho v) dx, \quad (1.2)$$

где div — оператор дивергенции по пространственным переменным. Напомним, дивергенцией векторного поля $a(x) = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ называется скалярная величина

$$\operatorname{div} a = (a_1)_{x_1} + \dots + (a_n)_{x_n}.$$

В силу произвольности области $V \subset \mathbb{R}^n$, из равенства (1.2) приходим к хорошо известному в гидродинамике уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \quad (1.3)$$

Уравнение просачивания воды через песок. Для упрощения введем несколько естественных ограничений. Предположим, что вода движется под действием только силы тяжести, т.е. движение вертикальное и от горизонтальных координат зависимости нет. Источники и стоки отсутствуют, а скорость просачивания v есть функция плотности $\rho \equiv u(t, x)$, т.е. $v = v(u)$.

Экспериментально установлено, что зависимость $v(u)$ выглядит так, как изображено на рис. 1. На отрезке $[0, u_0]$ с хорошей точностью можно считать, что эта зависимость почти параболическая, т.е. $v(u) = Cu^2$.

В рассматриваемом одномерном случае уравнение (1.3) переписывается в виде

$$u_t(t, x) + [u(t, x) \cdot v(u(t, x))]_x = 0, \quad (1.4)$$

или

$$u_t + p(u)u_x = 0,$$

где

$$p(u) = v(u) + v'(u)u.$$

Вспоминая об экспериментально найденной зависимости скорости просачивания от плотности, считаем $v(u) = u^2/3$, и окончательно имеем:

$$u_t + u^2 u_x = 0.$$

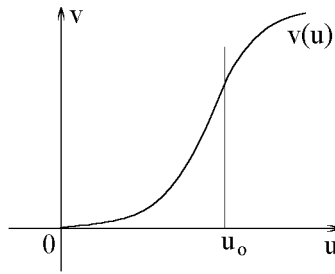


Рис. 1

Уравнение дорожного движения. Это уравнение, как и уравнение фильтрации, получается из одномерного по x уравнения неразрывности (1.3). В задачах дорожного движения используют экспериментально найденную зависимость скорости движения автомобилей $v(u)$ от плотности $u(t, x)$ машин на автостраде в данной точке. Типичная модель дорожного движения задается формулой

$$v(u) = Au(1 - u), \quad A = \text{Const} > 0.$$

В этом случае уравнение (1.4) принимает вид

$$u_t + A(2u - 3u^2)u_x = 0.$$

2. Локальная классическая теория

Локально уравнения с частными производными первого порядка решаются методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи сведения их к так называемой *характеристической системе*. С физической точки зрения этот факт можно рассматривать как двойственность описания явлений при помощи волн и при помощи частиц (корпускулярно–волновой дуализм). Поле удовлетворяет некоторому уравнению с частными производными первого порядка, поведение же частиц описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Сведение уравнений с частными производными первого порядка к системе обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет свести изучение эволюции волн к изучению распространения частиц.

Отметим, что большая часть вопросов, рассмотренных в настоящем параграфе, подробно освещена в учебниках по обыкновенным дифференциальным уравнениям (например, [12, Глава 2]). Задачи на нахождение общих решений для линейных и квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка, а также на решение соответствующей задачи Коши можно найти в [17, §20]. Ниже мы кратко напомним основные факты, касающиеся локальной теории линейных и квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка, остановившись более подробно на теории нелинейного уравнения, которая описана далеко не во всех учебниках.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка n -мерного евклидова пространства. Рассмотрим уравнение вида

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right) = 0, \quad (2.1)$$

где $u(x) \equiv u(x_1, \dots, x_n)$ — неизвестная функция. При этом будем рассматривать случай, когда функция

$$F(x, u, p) \equiv F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$$

дифференцируема по переменным p_1, \dots, p_n .

Определение 2.1. *Дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка называется уравнение вида (2.1), если*

$$|\nabla_p F|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)^2 \neq 0$$

на некотором открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ пространства переменных $x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n$.

Под классическим решением уравнения (2.1) понимается непрерывно дифференцируемая функция $u(x)$, которая при подстановке в него дает верное равенство.

Пусть теперь в пространстве x -ов фиксирована гладкая гиперповерхность $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, $\dim \gamma = n - 1$, и на ней задана функция $u_0(x)$.

Определение 2.2. Задачей Коши для уравнения (2.1) называется задача о нахождении решения $u(x)$ этого уравнения, удовлетворяющего начальному условию

$$u|_{\gamma} = u_0(x). \quad (2.2)$$

2.1. Линейное уравнение

Пусть $v = v(x)$ — гладкое векторное поле в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 2.3. Линейным однородным уравнением с частными производными первого порядка называется уравнение

$$L_v[u] \equiv v_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + v_n(x) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \quad (2.3)$$

Напомним, что в теории обыкновенных дифференциальных уравнений оператор $L_v \equiv v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ называется оператором дифференцирования по направлению векторного поля $v(x)$. Геометрически уравнение (2.3) означает, что градиент $\nabla u \equiv (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$ искомой функции u ортогонален векторному полю $v(x)$ в каждой точке области Ω .

Для того чтобы гладкая функция $u = u(x)$ была решением уравнения (2.3), необходимо и достаточно, чтобы u была постоянна вдоль фазовых кривых поля $v(x)$, т.е. являлась первым интегралом системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 = v_2(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ \dot{x}_n = v_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (2.4)$$

Система (2.4), которую можно записать также в векторной форме $\dot{x} = v(x)$, называется *характеристической системой линейного*

уравнения (2.3). Решения характеристической системы называются *характеристиками*, само векторное поле $v(x)$ в n -мерном пространстве x -ов называется *характеристическим векторным полем линейного уравнения*.

Определение 2.4. *Линейным неоднородным уравнением с частными производными первого порядка называется уравнение*

$$L_v[u] = f(x), \quad (2.5)$$

где $f(x)$ — заданная непрерывная функция.

В уравнении (2.5) фактически написано, что если мы двигаемся по характеристикам $x(t)$ (т.е. вдоль решений $x(t)$ системы (2.4)), то $u(x(t))$ меняется с известной скоростью $f(x(t))$. Таким образом, в случае неоднородного линейного уравнения характеристическую систему (2.4) следует дополнить уравнением на u :

$$\dot{u} = f(x_1, \dots, x_n). \quad (2.6)$$

Для решения задачи Коши (2.3), (2.2) для линейного однородного уравнения достаточно продолжить функцию $u(x)$ с поверхности γ константой вдоль характеристик $x(t)$. В случае задачи (2.5), (2.2) для неоднородного уравнения начальные условия надо продолжать в соответствии с законом (2.6).

Отметим две важные особенности корректной постановки задачи Коши.

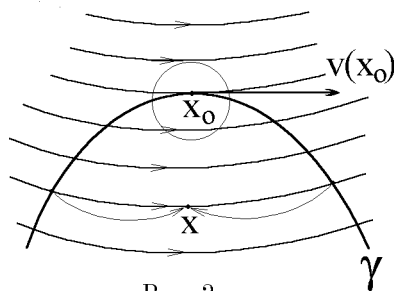


Рис. 2.

Замечание 2.1. *Задача Коши ставится локально (т.е. в окрестности некоторой точки x_0 на γ). В противном случае, как это видно,*

например, из рис. 2, характеристика может принести в некоторую точку x разные значения от разных точек на поверхности γ . Таким образом, решение задачи (2.3), (2.2) будет существовать не при любых начальных условиях $u_0(x)$.

Также вполне возможно, что все характеристики, имеющие общие точки с начальной поверхностью γ , не заполняют целиком область, в которой ищется решение задачи Коши. В этом случае не будет единственности решения.

Замечание 2.2. Если в точке $x_0 \in \gamma$ вектор $v(x_0)$ касается поверхности γ (такие точки x_0 называются *характеристическими*, см. рис. 2), то, выбирая даже малую окрестность этой точки, мы не избавляемся от проблем, отмеченных в Замечании 2.1. Следовательно, существование и единственность решения задачи Коши можно гарантировать в окрестности лишь нехарактеристической точки на γ .

Линейное уравнение с частными производными первого порядка может оказаться неразрешимым в окрестности характеристической точки и в том случае, когда каждая характеристика пересекает начальную поверхность γ ровно один раз.

Пример 2.1. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u|_{y=x^3} = x^2. \quad (2.7)$$

Характеристическим векторным полем здесь является постоянное единичное поле $(1, 0)$, характеристиками — прямые $y = C$, каждая из которых пересекает кубическую параболу $\gamma = \{(x, y) \mid y = x^3\}$ ровно в одной точке. Продолжая начальную функцию x^2 (равную $y^{2/3}$ на γ) постоянной вдоль характеристик, т.е. независимой от x , получаем “решение” $u(x, y) = y^{2/3}$ — функцию, не являющуюся непрерывно дифференцируемой на прямой $y = 0$.

Возражение, что тем не менее найденная функция имеет частную производную по x и, следовательно, удовлетворяет уравнению, легко снять, сделав в задаче (2.7) замену переменных $x = x' + y'$, $y = x' - y'$. После этого поворота (и растяжения осей) получим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} = 0, \quad u|_{\gamma} = (x' + y')^2.$$

Полученное же “решение” $u(x', y') = (x' - y')^{2/3}$ не будет иметь частных производных ни по x' , ни по y' на прямой $x' - y' = 0$.

2.2. Квазилинейное уравнение

Определение 2.5. Квазилинейным уравнением с частными производными первого порядка называется уравнение (2.1) в случае, когда функция $F(x, u, p)$ линейна относительно переменных p_1, \dots, p_n .

Итак, квазилинейное уравнение — это уравнение вида

$$L_{v(x,u)} \equiv v_1(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + v_n(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x, u). \quad (2.8)$$

Если в уравнении (2.8) все коэффициенты v_i не зависят от u , т.е. $v_i = v_i(x)$, то уравнение называется *полулинейным*.

По аналогии с линейным случаем напомним систему (2.4), (2.6):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1(x_1, \dots, x_n, u), \\ \dots \\ \dot{x}_n = v_n(x_1, \dots, x_n, u), \\ \dot{u} = f(x_1, \dots, x_n, u). \end{cases} \quad (2.9)$$

Эта система называется *характеристической системой для квазилинейного уравнения* (2.8); решения $(x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ системы (2.9) — *характеристики* этого уравнения; *характеристическое поле квазилинейного уравнения* (2.8) есть гладкое векторное поле с компонентами $(v_1(x, u), \dots, v_n(x, u), f(x, u))$ в $(n+1)$ -мерном пространстве с координатами (x_1, \dots, x_n, u) .

Замечание 2.3. В случае линейного уравнения, рассматриваемого как квазилинейное, а также в случае полулинейного уравнения, проекция (v_1, \dots, v_n) на пространство x -ов характеристического вектора (v_1, \dots, v_n, f) в точке (x_0, u_0) , не зависит от значения u_0 , так как коэффициенты v_i не зависят от u . Следовательно, в этих случаях проекции на пространство x -ов характеристик, лежащих “на разных высотах”, совпадают (мы считаем ось u вертикальной).

Если гладкая поверхность $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является графиком функции $u = u(x)$, то вектор нормали к ней в координатах (x, u) имеет вид $(\nabla_x u, -1) = (\partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_n, -1)$, и, таким образом, уравнение (2.8) геометрически означает ортогональность характеристического вектора $(v(x, u), f(x, u))$ и нормали к M , т.е. касание поверхности M и характеристического поля.

Теорема 2.1. *Гладкая функция $u = u(x)$ является решением уравнения (2.8) тогда и только тогда, когда ее график $M = \{(x, u(x))\}$, $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, касается в каждой своей точке характеристического векторного поля (v_1, \dots, v_n, f) .*

Следствие 2.1. *Так как характеристики $(x(t), u(t))$ по определению касаются характеристического векторного поля (см. (2.9)), то характеристика, имеющая общую точку с графиком решения, вся лежит на этом графике. Таким образом, график решения $u(x)$ уравнения (2.8) полностью составлен из характеристик.*

(Мы всегда предполагаем, что характеристическая система удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений.)

Геометрически решение задачи Коши (2.8), (2.2) для квазилинейного уравнения заключается в следующем. Пусть

$$\Gamma = \{(x, u_0(x)) \mid x \in \gamma\} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad \dim \Gamma = n - 1,$$

— график начальной функции $u_0(x)$. Выпуская из каждой точки на Γ характеристику, получим некоторую поверхность M коразмерности 1. Ниже показывается, что M и будет (по крайней мере локально в окрестности точки $(x_0, u_0(x_0)) \in \Gamma$) графиком искомого решения $u(x)$, если только точка $(x_0, u_0(x_0))$ — нехарактеристическая.

Определение 2.6. *Точка $(x_0, u_0) \in \Gamma$ называется характеристической, если вектор $v(x_0, u_0)$ касается в этой точке γ .*

Замечание 2.4. Для квазилинейного уравнения стоит вопрос не о характеристичности некоторой точки $x_0 \in \gamma \subset \mathbb{R}^n$, а о характеристичности точки $(x_0, u_0(x_0)) \in \Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$, так как характеристическое векторное поле в этом случае зависит и от u .

Если $(x_0, u_0(x_0)) \in \Gamma$ — нехарактеристическая точка, то плоскость T , касательная в этой точке к M , изоморфно проецируется на пространство x -ов. Действительно, плоскость T задается касательными к Γ направлениями, которые при проецировании образуют плоскость, касательную к γ , и характеристическим вектором $(v(x_0, u_0(x_0)), f(x_0, u_0(x_0)))$, который при проецировании переходит в трансверсальный к γ вектор $v(x_0, u_0(x_0))$. Следовательно, локально в окрестности точки $(x_0, u_0(x_0)) \in \Gamma$ построенная поверхность M является графиком гладкой функции $u = u(x)$.

2.3. Характеристики нелинейного уравнения

Уравнение характеристик для нелинейного уравнения

$$F(x, u, p) = 0 \quad (2.10)$$

мы получим методом квазилинеаризации, заключающегося в том, что если $u(x)$ — решение нелинейного уравнения (2.10), то функции $p_i = u_{x_i}$ удовлетворяют некоторому квазилинейному уравнению.

Мы предположим, что функция F дважды непрерывно дифференцируема, и решение $u(x)$ уравнения (2.10) — также класса C^2 ; $p(x) \equiv u_x(x)$. Продифференцируем тождество $F(x, u(x), p(x)) = 0$ по x_i . Имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u} p_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial p_j}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \left(= \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right),$$

мы действительно получаем квазилинейное уравнение на p_i :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial u} p_i. \quad (2.11)$$

В соответствии с (2.9) характеристическая система для этого уравнения имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial F}{\partial p_1}, \\ \dots \\ \dot{x}_n = \frac{\partial F}{\partial p_n}, \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial u} p_i. \end{cases}$$

Объединяя уравнения характеристик, полученные для каждого p_i , будем иметь

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{p} = -F_x - F_u p.$$

Для замыкания системы остается получить уравнение на u . Найдем производную функции $u(x)$ в силу системы $\dot{x} = F_p$:

$$\frac{du}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n p_j F_{p_j} = p \cdot F_p. \quad (2.12)$$

(Здесь через $p \cdot F_p$ мы обозначали скалярное произведение векторов $p = (p_1, \dots, p_n)$ и $F_p = (F_{p_1}, \dots, F_{p_n})$.)

Итак, получена система $2n + 1$ уравнения

$$\begin{cases} \dot{x} = F_p, \\ \dot{u} = p \cdot F_p, \\ \dot{p} = -F_x - F_u p, \end{cases} \quad (2.13)$$

которая и называется *характеристической системой для нелинейного уравнения (2.10)*.

Как мы видели, график решения *квазилинейного* уравнения состоит из характеристик этого уравнения. Оказывается, в случае *нелинейного* уравнения (2.10) тем же свойством обладает 1-график решения $u(x)$.

Определение 2.7. 1-графиком *гладкой функции $u(x)$* называется график отображения $x \rightarrow (u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n})$, то есть множество точек $(x, u(x), u_x(x))$ в $(2n + 1)$ -мерном пространстве (x, u, p) .

Теорема 2.2. *Вместе с любой точкой на 1-графике решения $u(x)$ уравнения (2.10) лежит и характеристика, проходящая через эту точку.*

Доказательство. Возьмем на 1-графике функции $u(x)$ произвольную точку $(x_0, u(x_0), u_x(x_0))$ и рассмотрим в пространстве x -ов кривую $x(t)$, являющуюся решением дифференциального уравнения

$$\dot{x} = F_p(x, u(x), u_x(x)) \quad (2.14)$$

с начальным условием $x(0) = x_0$. Восстановим ее на 1-графике функции $u(x)$. Получим кривую

$$(x(t), u(t), p(t)) \equiv (x(t), u(x(t)), p(x(t))) \in \mathbb{R}^{2n+1},$$

где $p(x(t)) \equiv u_x(x(t))$.

Когда $x(t)$ меняется по закону (2.14), координаты $u(t)$ и $p(t)$ на построенной кривой меняются в соответствии с законом

$$\begin{aligned} \dot{u} &= p(x(t)) \cdot F_p(x(t), u(x(t)), p(x(t))), \\ \dot{p} &= -F_x(x(t), u(x(t)), p(x(t))) - F_u(x(t), u(x(t)), p(x(t)))p(x(t)). \end{aligned}$$

Действительно, квазилинейное уравнение (2.11) означает, что когда переменная x меняется в соответствии с (2.14), координата p_i изменяется по следующему правилу:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial u} p_i,$$

изменение же $u(x(t))$ в силу (2.14) было посчитано в (2.12). Таким образом, кривая $(x(t), u(t), p(t))$ есть решение системы (2.13) с начальными условиями $(x_0, u_0, p_0) = (x_0, u(x_0), u_x(x_0))$. Осталось только заметить, что если $F \in C^2$, то характеристическая система (2.13) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений. \square

2.4. Задача Коши для нелинейного уравнения

Как было установлено выше, в случае нелинейного уравнения для решения задачи Коши (2.10), (2.2) необходимо по начальному условию (то есть по γ и $u_0(x)$) восстановить 1-график $\Gamma \subset \mathbb{R}_{x,u,p}^{2n+1}$ функции $u(x)$ над $\gamma \subset \mathbb{R}_x^n$ и выпустить из каждой точки $(n-1)$ -мерной поверхности Γ характеристику. Получившаяся n -мерная поверхность M и будет локально 1-графиком искомой функции (конечно, если решение задачи (2.10), (2.2) существует).

Замечание 2.5. Для того, чтобы поверхность M задавала хотя бы локально график отображения $x \rightarrow (u(x), p(x))$, необходимо, чтобы касательная к ней плоскость T изоморфно проецировалась на пространство x -ов. Плоскость T задается касательными к Γ направлениями, которые при проецировании образуют касательное пространство к γ , и направлением характеристического векторного поля. Таким образом, x -компонента F_p этого векторного поля не должна касаться начальной поверхности γ . Это и есть условие *нехарактеристичности* в случае нелинейного уравнения, с которым мы встретимся и ниже.

Принципиальное отличие от квазилинейного случая заключается в том, что 0-график (то есть обычный график) функции $u(x)$ над $(n-1)$ -мерной поверхностью γ легко восстанавливается по $u_0(x)$, а 1-график — нет. Действительно, мы можем восстановить производные функции $u(x)$ только в направлениях, касательных к γ ; размерность этого касательного пространства равна $n-1$. Для нахождения

недостающей, трансверсальной γ , компоненты вектора $p(x)$ необходимо воспользоваться самим уравнением (2.10) в предположении, что оно разрешимо относительно интересующей нас координаты.

Поясним это подробнее. Пусть начальная поверхность γ задается как образ невырожденного отображения $x = \eta(y)$ некоторой окрестности точки $y_0 \in \mathbb{R}_y^{n-1}$ в пространство \mathbb{R}_x^n . Невырожденность означает, что матрица Якоби $\frac{\partial \eta}{\partial y}(y_0)$ отображения η в точке y_0 (и, следовательно, в некоторой ее окрестности) имеет максимальный ранг (равный $n-1$). Начальное условие (2.2) в этом случае переписывается в виде

$$u(\eta_1(y_1, \dots, y_{n-1}), \dots, \eta_n(y_1, \dots, y_{n-1})) \equiv u_0(y_1, \dots, y_{n-1}), \quad (2.15)$$

где $u_0(y)$ — заданная функция $(n-1)$ -ой переменной. Продифференцируем тождество (2.15) по каждой из переменных y_i , $i = 1, \dots, n-1$, не забывая, что $\partial u / \partial x_j = p_j$. Имеем:

$$\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \eta_j}{\partial y_i} = q_i(y_1, \dots, y_{n-1}),$$

где $q_i = \partial u_0 / \partial y_i$ — известные функции ($i = 1, \dots, n-1$). Дополнив полученные равенства уравнением (2.10), получим систему из n уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta_j}{\partial y_1} p_j = q_1, \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta_j}{\partial y_n} p_j = q_n, \\ F(\eta(y), u(\eta(y)), p) = 0. \end{cases}$$

Эта система записывается в виде

$$\Phi(y, p) = 0. \quad (2.16)$$

В предположении, что имеется точка (y_0, p_0) такая, что $\Phi(y_0, p_0) = 0$, по теореме о неявной функции равенство (2.16) разрешимо в окрестности этой точки относительно p (то есть (2.16) можно переписать в виде $p = p(y)$, причем $p(y_0) = p_0$), если только дифференциал $\Phi_p(y_0, p_0)$ невырожден.

Таким образом, мы сможем восстановить над γ в окрестности точки $x_0 = \eta(y_0)$ 1-график функции $u(x)$, если

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \eta_n}{\partial y_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial y_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial \eta_n}{\partial y_{n-1}} \\ \frac{\partial F}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial p_n} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (2.17)$$

Последнее в точности означает, что векторы

$$\frac{\partial \eta}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \eta}{\partial y_{n-1}}, F_p$$

являются линейно независимыми. Ввиду невырожденности отображения $x = \eta(y)$ первые $(n - 1)$ вектор этой системы линейно независимы и задают $(n - 1)$ -мерную плоскость, касательную к γ в точке x_0 . Таким образом, условие (2.17) есть условие трансверсальности (не касания) поверхности γ и вектора $F_p(x_0, u_0(x_0), p_0)$ в точке $x_0 = \eta(y_0) \in \gamma$. Точки $(x_0, u_0(x_0), p_0)$, в которых выполнено условие трансверсальности, называются, как и в случае линейного или квазилинейного уравнений, *нехарактеристическими*.

Замечание 2.6. В случае, если квазилинейное уравнение (2.8) рассматривается как частный случай нелинейного уравнения (2.10), то функция F имеет вид

$$F(x, u, p) = v(x, u) \cdot p - f(x, u),$$

где $v \cdot p$ — скалярное произведение векторов $v(x, u)$ и p . Тогда

- 1) первые два уравнения системы характеристик (2.13) переписываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p = v(x, u), \\ \dot{u} &= p \cdot F_p = p \cdot v(x, u) = F(x, u, p) + f(x, u) = f(x, u) \end{aligned}$$

(ввиду $F(x, u, p) = 0$), что полностью соответствует характеристической системе (2.8) квазилинейного уравнения. При этом правые части полученных уравнений не зависят от p , что дает возможность решать их, не дополняя систему уравнением на координату p ;

- 2) характеристики $(x(t), u(t), p(t))$ квазилинейного уравнения, рассматриваемого как нелинейное, при проецировании из $\mathbb{R}_{x,u,p}^{2n+1}$ на $\mathbb{R}_{x,u}^{n+1}$ (то есть при “забывании” координаты p) переходят в характеристики $(x(t), u(t))$ этого квазилинейного уравнения;
- 3) условие нехарактеристичности для нелинейного уравнения примет вид: вектор $F_p = v(x_0, u(x_0))$ не касается в точке x_0 поверхности γ , что в точности совпадает с условием нехарактеристичности для квазилинейного уравнения.

2.5. Примеры нелинейных уравнений

Уравнение Гамильтона-Якоби. Уравнением Гамильтона-Якоби называется нелинейное уравнение (2.10) в случае, когда функция F не зависит от u . Эта функция называется гамильтонианом и обычно обозначается $H(x, p)$. Итак, уравнение Гамильтона-Якоби — это уравнение вида

$$H(x, u_x) = 0. \quad (2.18)$$

Характеристическая система уравнения (2.18):

$$\begin{cases} \dot{x} = H_p(x, p), \\ \dot{p} = -H_x(x, p), \\ \dot{u} = p \cdot H_p(x, p). \end{cases} \quad (2.19)$$

Поскольку первые два уравнения системы (2.19) не зависят от u , то их обычно рассматривают отдельно от третьего. Система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = H_p(x, p), \\ \dot{p} = -H_x(x, p), \end{cases} \quad (2.20)$$

носит название *гамильтоновой системы*. В механике: x — координата, p — импульс.

Простейшим примером гамильтоновой системы является уравнение Ньютона движения частицы единичной массы в потенциальном силовом поле:

$$\ddot{x} = f(x), \quad f(x) = -\nabla U(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначая через $\dot{x} = p$ скорость частицы (которая совпадает в этом случае с импульсом), получаем систему (2.20) с гамильтонианом

$$H(x, p) = p^2/2 + U(x).$$

Здесь $p^2/2$ — кинетическая энергия движения частицы; $U(x)$ — потенциальная; $H(x, p)$ — полная энергия.

Уравнение эйконала. Пусть $H = (p^2 - 1)/2$. Соответствующее уравнение Гамильтона-Якоби примет вид

$$(u_x)^2 = 1. \quad (2.21)$$

Уравнение (2.21) называется *уравнением эйконала геометрической оптики*. Это уравнение описывает распространение световых волн. Если гиперповерхность γ задает положение светового фронта в начальный момент времени $t = 0$, то положение этого фронта в момент времени t совпадает с поверхностью уровня $\{x \mid u(x) = ct\}$ (c — скорость света) решения $u(x)$ уравнения (2.21) с нулевым начальным условием

$$u|_{\gamma} = 0. \quad (2.22)$$

Характеристическая система для уравнения эйконала

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = 0, \quad \dot{u} = p^2 = 1$$

описывает движение частицы по прямой с постоянной скоростью $p \equiv p(0)$, равной по модулю единице (так как уравнение (2.21) имеет вид $p^2 = 1$), значение функции $u(x)$ при движении по этим прямым меняется с единичной скоростью.

При заданном начальном условии (2.22) направление единичного вектора $p(0)$ в каждой точке $x_0 \in \gamma$ ортогонально γ . Действительно, проекция этого вектора на γ равна нулю (как производная постоянной на γ функции $u(x)$, в касательных к γ направлениях). Отсюда каждая точка γ — нехарактеристическая, так как $F_p = p$ не касается γ . Таким образом, если характеристики уравнения (2.21), соответствующие начальному условию (2.22) спроецировать на пространство x -ов, получим семейство нормалей к поверхности γ .

Замечание 2.7. На примере задачи (2.21)–(2.22) легко увидеть возможную неединственность решения задачи Коши для нелинейного уравнения с частными производными первого порядка. Действительно, наряду с некоторым решением $u(x)$, у задачи (2.21)–(2.22) всегда есть и решение $-u(x)$. Поясним, откуда возникает эта неединственность.

Как уже указывалось, вектор $p(0)$ в каждой точке $x_0 \in \gamma$ по модулю равен 1 и ортогонален γ , то есть определен с точностью до умножения на -1 . Изменение направления этого вектора на противоположное (в точке x_0 , и, следовательно в некоторой окрестности этой точки на γ) и ведет к изменению знака у получаемого решения $u(x)$. Физически это означает распространение световых волн в одну или в другую сторону от начальной гиперповерхности γ — начального положения светового фронта.

Замечание 2.8. Решение задачи Коши для нелинейного уравнения существует не всегда. Так, если $u(x)$ — решение уравнения эйконала, то производная этой функции по любому направлению не превосходит 1. Следовательно, не существует (даже локально) решения уравнения (2.21) с начальным условием, например, $u|_{x_1=0} = 2x_2$.

Упражнение 2.1. Найти решения $u = u(x_1, \dots, x_n)$ уравнения эйконала (2.21) с начальными условиями

- 1) $u|_{x_1=0} = 0$;
- 2) $u|_{x_1=0} = x_2/2$;
- 3) $u|_{|x|=1} = 0$.

Упражнение 2.2. Найти решение $u(t, x)$ следующей задачи Коши:

$$u_t + (u_x)^2/2 - 1 = 0, \quad u|_{t=0} = x^2/2.$$

2.6. Теорема существования решения задачи Коши

Ниже мы будем рассматривать следующее уравнение на функцию $u(t, x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ (t обычно имеет физический смысл времени, а x — пространственной координаты):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \tag{2.23}$$

с начальным условием в момент времени $t = 0$:

$$u|_{t=0} = u(0, x) = u_0(x). \tag{2.24}$$

Мы считаем, что $f(t, x, u, p)$ и $u_0(x)$ — функции класса C^2 .

Замечание 2.9. К задаче такого вида сводится и общая задача Коши (2.10),(2.2) после выпрямления (локально) начальной поверхности γ , и разрешения исходного уравнения (2.10) относительно производной по трансверсальному к γ направлению (при выполнении условия нехарактеристичности, см. разд. 2.4). Если по этому вектору направить ось t , а через x обозначить координаты на поверхности γ , то получается уравнение с частными производными первого порядка, разрешенное относительно $\partial u / \partial t$. Поверхность γ в новых координатах является гиперплоскостью $t = 0$. Таким образом мы получили задачу вида (2.23),(2.24).

Обозначим вектор $p = u_x$, скаляр $q = u_t$. Уравнение (2.23) переписывается в виде

$$F(t, x, u, p, q) \equiv q + f(t, x, u, p) = 0. \quad (2.25)$$

Система характеристик для этого уравнения выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{t} = F_q = 1, \\ \dot{x} = F_p = f_p, \\ \dot{u} = qF_q + p \cdot F_p = q + p \cdot f_p = p \cdot f_p - f, \\ \dot{q} = -qF_u - F_t = -qf_u - f_t, \\ \dot{p} = -pF_u - F_x = -pf_u - f_x. \end{cases} \quad (2.26)$$

Замечание 2.10. Для задачи (2.23),(2.24) условие характеристичности всегда выполнено (что и неудивительно, см. Замечание 2.9). Действительно, характеристический вектор в любой точке имеет t -координату, равную 1, и проекция этого вектора на пространство (t, x) всегда трансверсальна плоскости $\{t = 0\} = \gamma$.

Первое уравнение в системе (2.26) совместно с начальным условием $t(0) = 0$ (ввиду (2.24)) в точности означает, что независимая переменная, по которой идет дифференцирование в системе (2.26), обозначаемое точкой ($\dot{}$), совпадает с фазовой переменной t , то есть с тем самым t , которое присутствует в уравнении (2.23). Кроме того, уравнения на x , u и p не зависят от q , что позволяет исключить q из фазовых переменных, тем более что, зная t , x , u и p , значение q легко находится из самого уравнения (2.25): $q = -f(t, x, u, p)$.

Таким образом, для задачи Коши (2.23),(2.24) характеристической системой естественно назвать “урезанную” систему (2.26):

$$\begin{cases} \dot{x} = f_p, \\ \dot{u} = p \cdot f_p - f, \\ \dot{p} = -pf_u - f_x. \end{cases} \quad (2.27)$$

Рассмотрим решение характеристической системы (2.27), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = y, \quad u(0) = u_0(y), \quad p(0) = \partial u_0(y)/\partial y.$$

Обозначим это решение

$$(x, u, p) = (\mathbf{x}(t, y), \mathbf{u}(t, y), \mathbf{p}(t, y)).$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = f_{p_i}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}), & i = 1, \dots, n, \\ \dot{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i f_{p_i}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) - f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}), \\ \dot{\mathbf{p}}_i = -\mathbf{p}_i f_u(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) - f_{x_i}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}), & i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{x}(0, y) = y, \quad \mathbf{u}(0, y) = u_0(y), \quad \mathbf{p}(0, y) = \partial u_0(y)/\partial y. \quad (2.29)$$

Обозначим $y = y(t, x)$ — решение уравнения $\mathbf{x}(t, y) = x$. Такое решение существует и единственно в окрестности точки $(0, x_0)$ по теореме о неявной функции, так как

$$\det \left(\frac{\partial \mathbf{x}(t, y)}{\partial y} \right) \Big|_{t=0} = \det \left(\frac{\partial y}{\partial y} \right) = 1 \neq 0.$$

Заметим, что $y(0, x) \equiv x$ ввиду $\mathbf{x}(0, y) \equiv y$.

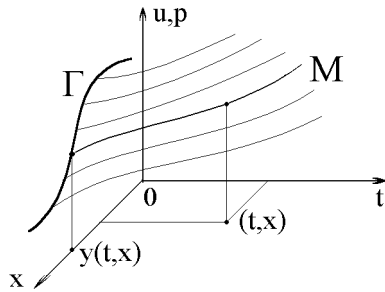


Рис. 3.

Замечание 2.11. Как отмечалось выше, в разделе 2.4, решить задачу Коши для нелинейного уравнения геометрически означает из всех точек начальной поверхности

$$\Gamma = \{(t, x, u, p) \mid t = 0, x = y, u = u_0(y), p = \nabla u_0(y)\}$$

выпустить характеристики, которые и составят 1-график искомого решения $u(t, x)$. Введенная функция $y(t, x)$ фактически задает ту точку $(y, u_0(y), \partial u_0(y)/\partial y) \in \Gamma$, для которой выпущенная из нее характеристика пройдет над заданной точкой (t, x) (см. рис. 3).

Положим

$$u(t, x) = \mathbf{u}(t, y(t, x)), \quad p(t, x) = \mathbf{p}(t, y(t, x)). \quad (2.30)$$

Наша задача показать, что $u(t, x)$ и есть искомое решение задачи Коши (2.23), (2.24), а $p(t, x) = u_x$. Начальное условие (2.24) очевидно выполнено:

$$u(0, x) = \mathbf{u}(0, y(0, x)) = \mathbf{u}(0, x) = u_0(x).$$

Докажем, что $u_x(t, x) = p(t, x)$, то есть характеристики локально составляют 1-график, а затем проверим (2.23).

Предложение 2.1. В введенных обозначениях

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t, y)}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i(t, y) \frac{\partial \mathbf{x}_i(t, y)}{\partial y_k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.31)$$

Доказательство. Пусть

$$L_k(t, y) = \frac{\partial \mathbf{u}(t, y)}{\partial y_k} - \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i(t, y) \frac{\partial \mathbf{x}_i(t, y)}{\partial y_k}.$$

Тогда

$$\frac{\partial L_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y_k} \dot{\mathbf{u}} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial y_k} \dot{\mathbf{p}}_i - \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \frac{\partial}{\partial y_k} \dot{\mathbf{x}}_i.$$

Учитывая (2.28), имеем

$$\frac{\partial L_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i f_{p_i} - f \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial y_k} (-\mathbf{p}_i f_u - f_{x_i}) - \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \frac{\partial}{\partial y_k} f_{p_i}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial y_k} f_{p_i} - \frac{\partial f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial y_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial y_k} (\mathbf{p}_i f_u + f_{x_i}) \\
&= \sum_{i=1}^n f_{p_i} \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial y_k} - \left(\sum_{i=1}^n f_{x_i} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial y_k} + f_u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_k} + \sum_{i=1}^n f_{p_i} \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial y_k} \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n f_u \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial y_k} \mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^n f_{x_i} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial y_k} \\
&= -f_u \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_k} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial y_k} \mathbf{p}_i \right) = -f_u(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) \cdot L_k.
\end{aligned}$$

Решим полученное дифференциальное уравнение:

$$L_k(t, y) = L_k(0, y) \exp \left(- \int_0^t f_u(\tau, \mathbf{x}(\tau, y), \mathbf{u}(\tau, y), \mathbf{p}(\tau, y)) d\tau \right). \quad (2.32)$$

Из тождества $\mathbf{x}_i(0, y) \equiv y_i$ следует $\partial \mathbf{x}_i(0, y) / \partial y_k = \delta_{ik}$. Ввиду начальных условий (2.29) имеем

$$\begin{aligned}
L_k(0, y) &= \frac{\partial \mathbf{u}(0, y)}{\partial y_k} - \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i(0, y) \frac{\partial \mathbf{x}_i(0, y)}{\partial y_k} \\
&= \frac{\partial u_0(y)}{\partial y_k} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_0(y)}{\partial y_i} \delta_{ik} = 0.
\end{aligned} \quad (2.33)$$

Из (2.32) и (2.33) следует $L_k(t, y) \equiv 0$, и (2.31) доказано. \square

Предложение 2.2. *Имеет место соотношение $u_x = p$ для функций $u(t, x)$ и $p(t, x)$, введенных в (2.30).*

Доказательство. Из (2.31) следует

$$\begin{aligned}
u_{x_j}(t, x) &= \frac{\partial \mathbf{u}(t, y(t, x))}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{u}(t, y)}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i(t, y) \frac{\partial \mathbf{x}_i(t, y)}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

Дифференцируя тождество

$$\mathbf{x}_i(t, y(t, x)) \equiv x_i \quad (2.34)$$

по x_j , получаем

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_i(t, y)}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} = \delta_{ij},$$

и, следовательно,

$$u_{x_j}(t, x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i(t, y) \delta_{ij} = \mathbf{p}_j(t, y(t, x)) = p_j(t, x). \quad \square$$

Предложение 2.3. *Функция $u(t, x)$, определенная в (2.30) удовлетворяет уравнению (2.23).*

Доказательство. Из (2.31) имеем

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{\partial \mathbf{u}(t, y(t, x))}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{u}(t, y)}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial t} \\ &= \dot{\mathbf{u}} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i(t, y) \frac{\partial \mathbf{x}_i(t, y)}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial t}. \end{aligned}$$

Дифференцируя (2.34) по t , получим

$$\dot{\mathbf{x}}_i + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_i(t, y)}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial t} = 0.$$

Принимая во внимание (2.28):

$$u_t = \dot{\mathbf{u}} - \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i f_{p_i} - f - \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i f_{p_i} = -f(t, x, u, p),$$

что и требовалось доказать. \square

Замечание 2.12. Построение решения $u(t, x)$ задачи (2.23)–(2.24) было проведено в предположении, что f и u_0 — дважды непрерывно дифференцируемые функции. В этом случае по теореме о дифференцируемой зависимости от параметра решений обыкновенных дифференциальных уравнений функции $\mathbf{x}(t, y)$, $\mathbf{u}(t, y)$ и $\mathbf{p}(t, y)$ — класса C^1 (так как начальное условие (2.29) непрерывно дифференцируемо зависит от параметра y). Тогда теорема о неявной функции гарантирует, что $y(t, x) \in C^1$. Значит, $u_x(t, x) = p(t, x) = \mathbf{p}(t, y(t, x))$ и $u_t(t, x) = -f(t, x, \mathbf{u}(t, y(t, x)), \mathbf{p}(t, y(t, x)))$ — также непрерывно дифференцируемые функции, то есть $u(t, x) \in C^2$.

3. Классические (гладкие) решения задачи Коши и формирование особенностей

3.1. Квазилинейное уравнение с одной пространственной переменной

В настоящем разделе мы изучим задачу Коши вида (2.23)–(2.24) для одномерного по пространственной переменной (т. е. $x \in \mathbb{R}^1$) квазилинейного уравнения на функцию $u(t, x)$:

$$u_t + (f(u))_x \equiv u_t + f'(u)u_x = 0, \quad (3.1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (3.2)$$

а именно, рассмотрим возможность построения решений этой задачи в классе функций, гладких в полосе

$$P_T \equiv \{(t, x) \mid -\infty < x < +\infty, 0 < t < T\}.$$

Сначала применим к этому конкретному случаю результаты изложенной выше общей теории. Характеристическая система (2.27) с начальными условиями, соответствующими (3.2), в этом случае примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = f'(u), & x(0) = y, \\ \dot{u} = 0, & u(0) = u_0(y), \\ \dot{p} = -f''(u)p^2, & p(0) = u'_0(y). \end{cases} \quad (3.3)$$

Решение этой системы:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t, y) = y + f'(u_0(y))t, \\ \mathbf{u}(t, y) = u_0(y), \\ \mathbf{p}(t, y) = (1/u'_0(y) + f''(u_0(y))t)^{-1}. \end{cases} \quad (3.4)$$

(В случае $u'_0(y) = 0$ будет $\mathbf{p}(t, y) \equiv 0$.)

Замечание 3.1. Если выполнено $u'_0(y)f''(u_0(y)) < 0$, то решение системы (3.3) не существует на всей полуоси $t > 0$, а лишь на интервале $(0, T(y))$, где

$$1/T(y) = -u'_0(y)f''(u_0(y)) > 0;$$

$\mathbf{p}(t, y) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T(y) - 0$.

Как всегда в квазилинейном случае, первые два уравнения системы (3.3) не зависят от третьего, и характеристики квазилинейного уравнения (3.1) — прямые

$$\mathbf{x}(t, y) = y + f'(u_0(y))t, \quad \mathbf{u}(t, y) = u_0(y)$$

в трехмерном пространстве (t, x, u) . Кривая (3.4) в четырехмерном пространстве (t, x, u, p) — характеристика того же уравнения (3.1), но рассматриваемого как нелинейное.

Как было показано в предыдущем разделе, решение $u(t, x)$ задачи Коши (3.1)–(3.2) задается соотношением:

$$u(t, x) = \mathbf{u}(t, y(t, x)) \equiv u_0(y(t, x)),$$

где $y(t, x)$ — решение относительно y уравнения

$$x = \mathbf{x}(t, y) \equiv y + f'(u_0(y))t.$$

График этого решения $u = u(t, x)$, как указывалось выше, состоит из характеристик, выпущенных из каждой точки начальной кривой $\Gamma = \{(t, x, u) \mid t = 0, x = y, u = u_0(y)\}$, то есть из прямых

$$u \equiv u_0(y), \quad x = y + f'(u_0(y))t.$$

Поэтому для того, чтобы построить вид решения задачи (3.1)–(3.2) в различные моменты времени $t > 0$ (т.е. сечения плоскостями $t = \text{Const}$ графика решения $u(t, x)$ этой задачи) можно с графиком начальной функции $u = u_0(x)$ проделать следующее преобразование. Точки (x, u) этого графика начинают двигаться горизонтально (т.е. в направлении оси x -ов) со скоростью $f'(u)$. При этом, заметим, точки, в которых $f'(u) = 0$ остаются всегда неподвижными. Если $f'(u) > 0$, то точка движется направо, причем чем больше $f'(u)$, тем быстрее, в случае же $f'(u) < 0$ точка (x, u) движется налево (см. рис. 4).

Замечание 3.2. Пусть график начальной функции $u = u_0(x)$ ограничивает конечную площадь (например, u_0 — финитна). Тогда при указанном выше преобразовании площадь под графиком остается неизменной. Действительно, точки, расположенные на графике функции $u_0(x)$ на одной высоте, движутся с одинаковой скоростью, и, следовательно, длины горизонтальных отрезков, соединяющих точки на этом графике, не меняются.

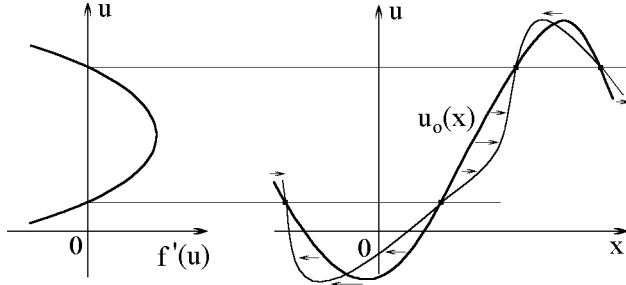


Рис. 4.

Факт сохранения площадей можно получить и непосредственным вычислением. Обозначим через $S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx$ указанную площадь, ограниченную графиком решения $u(t, x)$ задачи (3.1)–(3.2) (при фиксированном $t \geq 0$). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(t, x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} (f(u(t, x)))_x dx \\ &= -f(u(t, x)) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = f(0) - f(0) = 0, \end{aligned}$$

то есть $S(t) \equiv \text{Const}$.

При описанной выше эволюции может наступить момент времени $T > 0$, когда полученная кривая перестает быть графиком гладкой функции $u(T, x)$ одной переменной x .

Рассмотрим, например, уравнение Хопфа, т.е. уравнение (3.1) с $f(u) = u^2/2$. Это уравнение описывает поле скоростей среды из не взаимодействующих частиц (см. §1). Каждая частица, двигаясь по инерции, сохраняет свою начальную скорость. Рассмотрим две частицы, которые в начальный момент времени $t = 0$ были в точках x_1 и x_2 , $x_1 < x_2$. Если начальное распределение скоростей $u_0(x)$ было монотонно возрастающей функцией, то скорость $u_0(x_1)$ первой частицы в начальный момент времени (а, значит, и всегда в дальнейшем) меньше $u_0(x_2)$ — скорости второй частицы: $u_0(x_1) < u_0(x_2)$. Так как и начальные координаты частицы связаны соотношением $x_1 < x_2$, то в любой момент времени $t > 0$ две рассматриваемые частицы не окажутся в точке с одной координатой, т.е. не будет столкновений частиц.

Если же начальное распределение скоростей $u_0(x)$ не является монотонно возрастающей функцией, то более быстрые частицы будут догонять более медленные (или, возможно, частицы будут двигаться навстречу друг другу), и в какой-то момент времени $T > 0$ должны произойти столкновения. Начиная с этого момента времени T наша модель перестает отражать реальную физическую картину, так как “проходящие сквозь друг друга” частицы обязаны как-то взаимодействовать (сталкиваться). Математически такое взаимодействие обычно описывается добавлением в правую часть уравнения (3.7) слагаемого вида εu_{xx} , где $\varepsilon > 0$ — коэффициент вязкости. С этой моделью мы еще встретимся ниже, в разделе 5.2.

Упражнение 3.1. Построить примерный вид распределения скоростей $u(t, x)$ в различные моменты времени $t > 0$ для уравнения Хопфа, если начальное распределение скоростей задается функцией

- 1) $u_0(x) = \operatorname{arctg} x$,
- 2) $u_0(x) = -\operatorname{arctg} x$,
- 3) $u_0(x) = \sin x$,
- 4) $u_0(x) = -\sin x$,
- 5) $u_0(x) = x^3$,
- 6) $u_0(x) = -x^3$.

При заданных начальных условиях выяснить, для какого максимального $T > 0$ существует гладкое решение задачи Коши

$$u_t + uu_x = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x),$$

в полосе $\Pi_T = \{(t, x) \mid 0 < t < T, x \in \mathbb{R}\}$.

Упражнение 3.2. Построить сечения графика решения $u(t, x)$ задачи Коши

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x),$$

в различные моменты времени $t > 0$, если

- 1) $f(u) = \cos u, \quad u_0(x) = x$,
- 2) $f(u) = \cos u, \quad u_0(x) = \sin x$,
- 3) $f(u) = u^3/3, \quad u_0(x) = \sin x$.

3.2. Сведение решения задачи Коши к неявному функциональному уравнению

Решать задачу Коши для квазилинейного уравнения (3.1) можно и непосредственно, без ссылок на изложенную выше локальную теорию уравнений с частными производными первого порядка (в том числе и нелинейных). Этому и посвящен настоящий раздел.

Предположим, что мы имеем гладкое решение $u(t, x)$ поставленной задачи (3.1)–(3.2).

Предложение 3.1. *Функция $u(t, x)$ постоянна вдоль интегральных кривых дифференциального уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = f'(u(t, x)). \quad (3.5)$$

Доказательство. Продифференцируем функцию $u(t, x)$ вдоль интегральных кривых $(t, x(t))$ уравнения (3.5):

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = u_t + u_x \cdot f'(u) = u_t + (f(u))_x = 0. \quad \square$$

Так как u остается постоянной на этих интегральных кривых, то решения уравнения (3.5) — линейные функции $x = f'(u)t + C_1$. (Прямые $x - f'(u)t = C_1$, лежащие в плоскостях $u = C_2$, и есть характеристики квазилинейного уравнения (3.1).)

Таким образом, значение $u = u(t_0, x_0)$ решения $u(t, x)$ в точке (t_0, x_0) сохраняется и на всей прямой

$$x - f'(u(t_0, x_0)) \cdot t = C = x_0 - f'(u(t_0, x_0)) \cdot t_0. \quad (3.6)$$

Проведя эту прямую до пересечения с осью x -ов в точке $(0, y_0)$, найдем значение $u_0(y_0)$ в этой точке. Так как точка $(0, y_0)$ лежит на прямой (3.6), то $y_0 = x_0 - f'(u(t_0, x_0)) \cdot t_0$. Следовательно,

$$u(t_0, x_0) = u_0(y_0) = u_0(x_0 - f'(u(t_0, x_0)) \cdot t_0).$$

В силу произвольности точки (t_0, x_0) , получено следующее уравнение для решения $u(t, x)$ задачи Коши (3.1)–(3.2):

$$u = u_0(x - f'(u)t). \quad (3.7)$$

Вопрос о том, в какую область можно продолжить решение $u(t, x)$ задачи (3.1)–(3.2), фактически сводится к тому, где уравнение (3.7) однозначно разрешимо относительно u .

Замечание 3.3. Формулу (3.7) можно получить и при практическом решении задачи Коши для квазилинейного уравнения в соответствии с [17, §20]. У системы характеристик

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{f'(u)} = \frac{du}{0},$$

соответствующей уравнению (3.1), есть два первых интеграла:

$$I_1(t, x, u) \equiv u, \quad I_2(t, x, u) \equiv x - f'(u)t. \quad (3.8)$$

На начальной кривой $\Gamma = \{(0, y, u_0(y))\} \in \mathbb{R}_{t,x,u}^3$ значения этих первых интегралов следующие:

$$I_1|_{\Gamma} = u_0(y), \quad I_2|_{\Gamma} = y.$$

Таким образом, I_1 и I_2 связаны на Γ соотношением

$$I_1 = u_0(I_2). \quad (3.9)$$

Так как первые интегралы остаются постоянными на характеристиках, то соотношение (3.9) будет выполнено на всех характеристиках, выпущенных с кривой Γ . Осталось только заметить, что при подстановке (3.8) в (3.9) мы получаем в точности уравнение (3.7).

С другой стороны, задачу Коши (3.1)–(3.2) можно решать, продолжая решение $u(t, x)$ из начальной точки $(0, y)$ константой (равной значению $u_0(y)$ решения в этой начальной точке) вдоль прямой

$$x - f'(u_0(y)) \cdot t = C = y - f'(u_0(y)) \cdot 0 = y, \quad (3.10)$$

то есть $u(t, x) = u_0(y)$ при всех x и t , удовлетворяющих (3.10). Выражая в уравнении (3.10) переменную y через x и t , получаем функцию $y = y(t, x)$, и, следовательно,

$$u(t, x) = u_0(y(t, x)). \quad (3.11)$$

В этом случае вопрос о продолжаемости решения сводится к тому, где уравнение (3.10) однозначно разрешимо относительно y .

3.3. Условие существования гладкого решения в полосе

Найдем максимальное значение момента времени $T > 0$, при котором уравнение (3.7) задает гладкое решение $u = u(t, x)$ в полосе Π_T . Фактически надо определить, чему равно максимально возможное значение T , такое что уравнение

$$\Phi(t, x, u) \equiv u - u_0(x - f'(u)t) = 0, \quad (3.12)$$

однозначно разрешимо относительно u при каждом фиксированном t из полуинтервала $[0, T)$. Так как при $t = 0$ функция $\Phi(0, x, u)$ монотонно возрастает по u , то искомый момент времени по теореме о неявной функции определяется соотношением:

$$\Phi_u(u, x, t) = 1 + u'_0(x - f'(u)t) \cdot f''(u) \cdot t > 0 \quad (3.13)$$

при $t \in [0, T)$ для любой точки (t, x, u) , для которой $\Phi(t, x, u) = 0$.

Если $|f''(u)| \leq L$ на множестве всех значений функции $u = u_0(x)$, а также $|u'_0| \leq K$, то (3.13) будет выполнено, если $1 - KL \cdot t > 0$. Значит, гладкое решение задачи (3.1)–(3.2) существует в полосе

$$0 < t < \frac{1}{KL}.$$

Задача 3.1. *Показать, что если знаки функций u'_0 и f'' сохраняются (т.е. функция u_0 монотонна, а f выпукла) и совпадают, то гладкое решение $u(t, x)$ существует во всей полуплоскости $t > 0$.*

Из неравенства (3.13) можно получить и точное значение времени T существования гладкого решения. Для этого достаточно обозначить $y = x - f'(u)t$ и заметить, что $u = u_0(y)$ в силу (3.12). Тогда (3.13) переписется в виде

$$1 + u'_0(y) \cdot f''(u_0(y)) \cdot t > 0.$$

Отсюда

$$T = \frac{1}{-\inf_{y \in \mathbb{R}} [u'_0(y) f''(u_0(y))]} = \frac{1}{-\inf_{y \in \mathbb{R}} \left[\frac{d}{dy} f'(u_0(y)) \right]}, \quad (3.14)$$

если только указанный инфимум отрицательный. В противном случае, если $\inf_{y \in \mathbb{R}} [u'_0(y) f''(u_0(y))] \geq 0$, то $T = +\infty$ (см. Задачу 3.1).

Замечание 3.4. Как следует из Замечания 3.1, $(0, T)$ — максимальный интервал положительной полуоси, на котором существуют все решения характеристической системы (3.3). Начиная именно с этого момента T , некоторые из характеристик нашего уравнения, рассматриваемого как нелинейное, уходят (за конечное время) в бесконечность по оси p , то есть u_x обращается в бесконечность.

Задача 3.2. Проверить, что гладкая в полосе Π_T функция $u(t, x)$, удовлетворяющая (3.7) является решением задачи Коши (3.1)–(3.2).

Задача 3.3. Показать, что функция $u(t, x)$, задаваемая (3.11), где гладкая в полосе Π_T функция $y(t, x)$ удовлетворяет (3.10), является решением задачи Коши (3.1)–(3.2).

Задача 3.4. Доказать, что формулы (3.7) и (3.11) задают одно и то же решение задачи Коши (3.1)–(3.2).

Задача 3.5. Показать, что если $\inf_{y \in \mathbb{R}} [u'_0(y) f''(u_0(y))] = -\infty$, то гладкого решения задачи (3.1)–(3.2) не существует ни в какой полосе $\Pi_T = \{(t, x) \mid 0 < t < T, x \in \mathbb{R}\}$, $T > 0$.

Упражнение 3.3. Для какого максимального $T > 0$ существует гладкое решение задачи Коши

$$u_t + f'(u)u_x = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad (3.15)$$

в полосе $\Pi_T = \{(t, x) \mid 0 < t < T, x \in \mathbb{R}\}$, если

- 1) $f(u) = u^2/2, \quad u_0(x) = \operatorname{arctg} x,$
- 2) $f(u) = u^2/2, \quad u_0(x) = -\operatorname{arctg} x,$
- 3) $f(u) = \cos u, \quad u_0(x) = x,$
- 4) $f(u) = \cos u, \quad u_0(x) = \sin x,$
- 5) $f(u) = u^3/3, \quad u_0(x) = \sin x.$

Упражнение 3.4. Выяснить, какие из поставленных ниже задач Коши вида (3.15) имеют гладкое решение $u(t, x)$ во всей полуплоскости $t > 0$, а какие — не имеют гладкого решения ни в какой полосе Π_T , $T > 0$, если

- 1) $f(u) = u^2/2, \quad u_0(x) = x^3,$

$$2) f(u) = u^2/2, \quad u_0(x) = -x^3,$$

$$3) f(u) = u^4, \quad u_0(x) = x,$$

$$4) f(u) = u^4, \quad u_0(x) = -x.$$

3.4. Формирование особенностей

Рассмотрим для примера следующую задачу Коши для уравнения Хопфа (1.1), т.е. уравнения вида (3.1) с $f(u) = u^2/2$:

$$u_t + uu_x = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad (3.16)$$

где $u_0(x)$ – гладкая функция, задаваемая

$$u_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } x \leq -3 \\ \psi_1(x) & \text{при } -3 < x < -1 \\ -x & \text{при } -1 \leq x \leq 1 \\ \psi_2(x) & \text{при } 1 < x < 3 \\ -2 & \text{при } x \geq 3 \end{cases}$$

(см. рис. 5а). Здесь функции ψ_1 и ψ_2 гладким образом связывают константы при $|x| \geq 3$ и линейную функцию при $|x| \leq 1$. При этом функции ψ_1 и ψ_2 выбираются так, что $-1 < \psi'_i(x) \leq 0$, $i = 1, 2$, при $1 < |x| < 3$.

Так как $|u'_0| \leq 1$ и $f'' = 1$, то из результатов предыдущего раздела следует, что гладкое решение $u(t, x)$ задачи (3.16) существует и единственно в полосе $0 < t < 1$. Как показывалось в разделе 3.2, для построения этого решения, нужно из каждой точки $(t, x) = (0, y)$ прямой $t = 0$ выпустить прямую (см. (3.10)):

$$x - u_0(y) \cdot t = y, \quad (3.17)$$

и во всех точках (t, x) этой прямой положить $u(t, x) = u_0(y)$.

При $y \leq -3$ (или $y \geq 3$) равенство (3.17) задает (см. рис. 5б) семейство параллельных прямых $x = 2t + y$ (или, соответственно, $x = -2t + y$). Таким образом,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= 2 && \text{при } 0 \leq t \leq 1, \quad x \leq 2t - 3, \\ u(t, x) &= -2 && \text{при } 0 \leq t \leq 1, \quad x \leq 3 - 2t. \end{aligned}$$

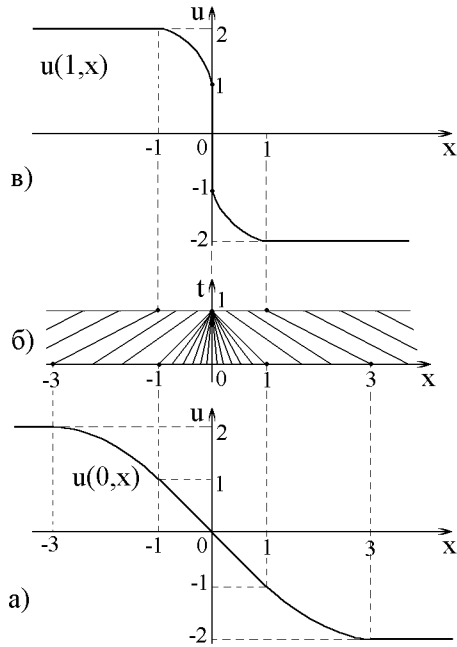


Рис. 5.

Если же $|y| \leq 1$, то имеем прямые $x + yt = y$, т.е. $x = y(1 - t)$, на которых $u = -y = -x/(1 - t)$. Значит,

$$u(t, x) = -x/(1 - t) \quad \text{при} \quad 0 \leq t < 1, \quad |x| \leq 1 - t.$$

Мы не можем написать явное решение $u(t, x)$ на множестве $0 \leq t \leq 1$, $1 - t < |x| < 3 - 2t$, не задавая явно функции $\psi_i(x)$. Единственное, что можно гарантировать, это то, что прямые вида (3.17) при различных значениях y из множества $(-3, -1) \cup (1, 3)$ не пересекаются в полосе $0 \leq t \leq 1$, так как $|\psi'_i| < 1$ на этом множестве.

При $t = 1$ через каждую точку $(t, x) = (1, x)$, где $x \neq 0$, проходит ровно одна прямая из семейства (3.17), $|y| > 1$ (см. рис. 5б), принося в нее значение $u = u_0(y)$, причем если $x \rightarrow -0$, то соответствующее значение $y \rightarrow -1$, а если $x \rightarrow +0$, то $y \rightarrow 1$. Следовательно, в момент времени $t = 1$ мы получаем гладкую (в силу теоремы о неявной функции) при $x < 0$ и при $x > 0$ функцию $u(1, x)$. Как было отмечено,

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} u(1, x) = \lim_{y \rightarrow \pm 1} u_0(y) = \mp 1.$$

В точку же $(1, 0)$ разные характеристики приносят разные значения функции u . Точнее, все прямые вида (3.17) с $|y| \leq 1$ (т.е. $x = y(1-t)$) проходят через эту точку и приносят в нее значения $u = -y$, все возможные значения из отрезка $[-1, 1]$.

График функции $u = u(1, x)$ изображен на рис. 5в. Итак, имея в начальный момент времени $t = 0$ гладкую функцию $u(0, x) = u_0(x)$, при $t = 1$ возникает разрывная в точке $x = 0$ функция $u(1, x)$. Разрыв такого рода когда $u(t_0, x_0 + 0) \neq u(t_0, x_0 - 0)$, называется сильным. Таким образом, у решения задачи (3.16) в момент времени $t_0 = 1$ в точке $x_0 = 0$ образовался *сильный разрыв*.

Сильный разрыв для общей задачи (3.1)–(3.2) возникает в момент времени T , задаваемый (3.14), если сразу на целом отрезке $[y_-, y_+]$ достигается отрицательный $\inf_{y \in \mathbb{R}} [u'_0(y)f''(u_0(y))]$. В этом случае, как и в рассмотренном выше примере, прямые (3.10) при всех $y \in [y_-, y_+]$ пересекутся в одной точке (T, x_0) , принося в эту точку разные значения u .

Задача 3.6. Доказать, что если

$$u'_0(y)f''(u_0(y)) = I \quad \forall y \in [y_-, y_+],$$

где

$$I = \inf_{y \in \mathbb{R}} [u'_0(y)f''(u_0(y))], \quad I < 0,$$

то прямые (3.10) при всех $y \in [y_-, y_+]$ пересекаются в одной точке.

Кроме сильного разрыва, у решения $u(t, x)$ в момент времени T может возникнуть и так называемый *слабый разрыв*. Последнее означает, что функция $u(T, x)$ переменной x непрерывна, но недифференцируема.

Задача 3.7. Пусть отрицательный $I = \inf_{y \in \mathbb{R}} [u'_0(y)f''(u_0(y))]$ достигается лишь в одной точке y_0 . Показать, что в этой ситуации у гладкого при $t < T$ (T задается (3.14)) решения $u(t, x)$ в точке $(T, y_0 + f'(u_0(y_0))T)$ возникает *слабый разрыв*, а прямые вида (3.10) начинают пересекаться при $t > T$.

4. Обобщенные решения квазилинейного уравнения

Как было показано в предыдущем параграфе, у классических решений квазилинейного уравнения с частными производными первого порядка, даже при сколь угодно гладких начальных функциях, с ростом времени могут сформироваться особенности. В приложениях часто встречаются также задачи с разрывными начальными функциями. Природа рассматриваемых нами уравнений такова (а здесь большую роль играют характеристики, вдоль которых “переносится” информация от начальных данных), что не дает нам оснований ожидать, что эти начальные разрывы заведомо исчезнут при $t > 0$. Поэтому возникает насущная необходимость расширить понятие классических решений, рассматривая так называемые обобщенные решения в классах, которые включают разрывные функции.

4.1. Понятие обобщенного решения

Существует общий подход к понятию обобщенного решения, имеющий свои корни в теории обобщенных функций. При таком подходе поточечное дифференциальное уравнение заменяется на интегральное тождество, которое на классических (достаточно гладких) решениях эквивалентно исходному уравнению. Но интегральное тождество имеет смысл для значительно более широкого класса функций. Функции, удовлетворяющие такого типа интегральному тождеству обычно и называют обобщенными решениями.

Тот подход, который мы будем развивать, использует формулу Гаусса-Остроградского.

Теорема 4.1 (Формула Гаусса-Остроградского). Пусть Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n с гладкой границей $\partial\Omega$, $w(x) \in C^1(\bar{\Omega})$. Тогда

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} w \cos(\nu, x_i) dS_x.$$

Здесь $\cos(\nu, x_i)$ — i -тая компонента вектора ν единичной внешней нормали (косинус угла между направлением внешней нормали к $\partial\Omega$ и направлением i -той координатной оси Ox_i), dS_x — элемент площади на $\partial\Omega$.

Следствие 4.1 (Формула интегрирования по частям).

Применим Теорему 4.1 к функции $w = uv$, $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$. Перенеся одно из слагаемых в правую часть, имеем:

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} uv \cos(\nu, x_i) dS_x - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx. \quad (4.1)$$

Первое слагаемое в правой части (4.1) является аналогом внешнего члена известной одномерной формулы.

Пусть функция $u = u(t, x) \in C^1(\Omega)$ является классическим решением уравнения

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (4.2)$$

$f(u) \in C^1(\mathbb{R})$, в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (например, в полосе $\Omega = \Pi_T = \{-\infty < x < +\infty, 0 < t < T\}$), т.е. $u(t, x)$ при подстановке в уравнение (4.2) дает верное равенство при всех $(t, x) \in \Omega$. Умножим это уравнение на финитную бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi(t, x)$. Финитность означает, что $\varphi = 0$ вне некоторой ограниченной области G , причем $\bar{G} \subset \Omega$. (Пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций в Ω обозначается $C_0^\infty(\Omega)$.) Так как функции $u(t, x)$, $f(u(t, x))$, $\varphi(t, x)$ являются гладкими, мы вправе воспользоваться формулой интегрирования по частям (4.1):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} [u_t + (f(u))_x] \varphi dt dx = \int_G u_t \varphi dt dx + \int_G (f(u))_x \varphi dt dx \\ &= \int_{\partial G} (u \cos(\nu, t) + f(u) \cos(\nu, x)) \varphi dS - \int_G (u \varphi_t + f(u) \varphi_x) dt dx \\ &= - \int_{\Omega} (u \varphi_t + f(u) \varphi_x) dt dx. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\varphi(t, x) = 0$ при $(t, x) \in \Omega \setminus G$, в том числе и при $(t, x) \in \partial G$.

Таким образом, получено следующее утверждение: если $u(t, x)$ — гладкое решение уравнения (4.2) в области Ω , то

$$\int_{\Omega} (u \varphi_t + f(u) \varphi_x) dt dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (4.3)$$

Соотношение (4.3) принимают за определение обобщенного решения (или решения в смысле интегрального тождества) уравнения (4.2). В

качестве обобщенного решения рассматриваемого уравнения не обязательно выступают гладкие функции. Любое классическое решение $u(t, x)$ уравнения (4.2) является и его обобщенным решением.

Легко проверяется и обратный факт: если функция $u(t, x)$ является гладким обобщенным решением уравнения (4.2) (т.е. $u(t, x)$ принадлежит $C^1(\Omega)$ и удовлетворяет (4.3)), то она является и классическим решением этого уравнения (т.е. при подстановке в (4.2) дает верное равенство). Действительно, все проведенные выше выкладки проходят и в обратном порядке, а из того что непрерывная функция $[u_t + (f(u))_x]$ удовлетворяет

$$\int_{\Omega} [u_t + (f(u))_x] \varphi \, dt dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

следует $u_t(t, x) + [f(u(t, x))]_x = 0$ при всех $(t, x) \in \Omega$.

Задача 4.1. Провести аккуратное доказательство этого утверждения.

4.2. Условие Ранкина-Гюгонио

Рассмотрим гладкую в области $\Omega \subset \mathbb{R}_{t,x}^2$ функцию $u(t, x)$ и свяжем с ней векторное поле $\vec{v} = (u, f(u))$, заданное в этой области. Тот факт, что $u(t, x)$ является классическим решением уравнения (4.2) в точности означает $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, что в свою очередь равносильно тому, что поток векторного поля \vec{v} через границу любой области $G \subset \Omega$ равен нулю:

$$\int_{\partial G} (\vec{v}, \nu) \, dS = 0 \quad \forall G \subset \Omega. \quad (4.4)$$

Здесь ν — единичный вектор нормали к ∂G , (\vec{v}, ν) — скалярное произведение векторов \vec{v} и ν . Тожество (4.4) называется *законом сохранения*.

Пусть теперь мы имеем кусочно-гладкую функцию $u(t, x)$, удовлетворяющую уравнению (4.2) в окрестности каждой точки гладкости. В этом случае закон сохранения (4.4) выполняться, вообще говоря, уже не будет (поток может быть и ненулевым, если область G содержит линию разрыва $u(t, x)$). Однако, для любого кусочно-гладкого обобщенного решения уравнения (4.2) в смысле интегрального тождества (4.3) этот важный физический закон, суть которого и выражается уравнением (4.2), выполняется. Дело в том, что на любой

линии разрыва обобщенное решение удовлетворяет так называемому условию Ранкина-Гюгонно. Это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы кусочно-гладкая функция $u(t, x)$, удовлетворяющая уравнению (4.2) в окрестности каждой точки гладкости, являлась обобщенным решением в смысле интегрального тождества (4.3). Этот раздел и посвящен выводу вышеназванного условия.

Пусть $u(t, x)$ — кусочно-гладкое решение уравнения (4.2) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ в смысле интегрального тождества (4.3). Точнее, пусть Ω делится линией Γ на две части (см. рис. 6) Ω_- и Ω_+ , в каждой из которых функция $u(t, x)$ является гладкой, $u(t, x) \in C^1(\Omega_-) \cap C^1(\Omega_+)$, и существуют односторонние пределы u_- и u_+ функции $u(t, x)$ при подходе к Γ .

Таким образом, на кривой Γ в каждой точке $(t_0, x_0) \in \Gamma$ определены

$$u_-(t_0, x_0) = \lim_{\substack{(t, x) \rightarrow (t_0, x_0) \\ (t, x) \in \Omega_-}} u(t, x),$$

и

$$u_+(t_0, x_0) = \lim_{\substack{(t, x) \rightarrow (t_0, x_0) \\ (t, x) \in \Omega_+}} u(t, x).$$

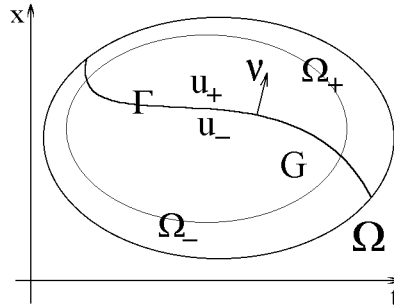


Рис. 6

Такие разрывы мы будем называть разрывами первого рода.

Так как $u(t, x)$ является гладким обобщенным решением как в области Ω_- , так и в Ω_+ (ввиду $C_0^\infty(\Omega_\pm) \subset C_0^\infty(\Omega)$), то в каждой из этих областей по доказанному выше функция $u(t, x)$ является классическим решением. Установим, каким условиям удовлетворяет решение $u(t, x)$ на линии разрыва Γ .

Предложение 4.1. Пусть кривая Γ в области Ω есть график гладкой функции $x = x(t)$. Тогда кусочно-гладкое обобщенное решение $u(t, x)$ уравнения (4.2) удовлетворяет на линии разрыва Γ следующему условию Ранкина-Гюгонно:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{[f(u)]}{[u]} = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}, \quad (4.5)$$

где $[u] = u_+ - u_-$ — скачок функции $u(t, x)$ на линии разрыва Γ , $[f(u)] = f(u_+) - f(u_-)$ — скачок $f(u)$.

Принимая во внимание соотношение $dx/dt = -\cos(\nu, t)/\cos(\nu, x)$, где $\cos(\nu, x)$ и $\cos(\nu, t)$ — координаты единичной нормали ν к кривой Γ (направленной из Ω_- в Ω_+ , $\cos(\nu, x) \neq 0$), равенство (4.5) переписывается в эквивалентном виде:

$$[u]\cos(\nu, t) + [f(u)]\cos(\nu, x) = 0. \quad (4.6)$$

Определение 4.1. Ударными волнами называются разрывные решения уравнения (4.2).

Таким образом, условие Ранкина-Гюгонио (4.5) связывает скорость \dot{x} распространения ударных волн с предельными значениями u_+ и u_- решения $u(t, x)$ через функцию состояния $f(u)$.

Доказательство Предложения 4.1. Будем доказывать формулу (4.6). По определению обобщенного решения для любой пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi(t, x) = 0$ при $(t, x) \notin G$, $\bar{G} \subset \Omega$, имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dt dx \\ &= \int_{\Omega_- \cap G} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dt dx + \int_{\Omega_+ \cap G} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dt dx. \end{aligned}$$

Так как функции $u(t, x)$, $f(u(t, x))$ и $\varphi(t, x)$ являются гладкими в ограниченных областях $\Omega_- \cap G$ и $\Omega_+ \cap G$, то в интегралах по этим множествам можно перебросить производные в соответствии с многомерной формулой интегрирования по частям (4.1). Учитывая, что границы этих областей состоят из ∂G и Γ , а интеграл по ∂G равен нулю, так как $\varphi(t, x) = 0$ при $(t, x) \in \partial G$, имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\Omega_- \cap G} (u_t \varphi + (f(u))_x \varphi) dt dx - \int_{\Omega_+ \cap G} (u_t \varphi + (f(u))_x \varphi) dt dx \\ &\quad + \int_{\Gamma \cap G} (u_- \cos(\nu, t) + f(u_-) \cos(\nu, x)) \varphi dS \\ &\quad + \int_{\Gamma \cap G} (u_+ \cos(-\nu, t) + f(u_+) \cos(-\nu, x)) \varphi dS \\ &= - \int_{\Omega_-} (u_t + (f(u))_x) \varphi dt dx - \int_{\Omega_+} (u_t + (f(u))_x) \varphi dt dx \\ &\quad - \int_{\Gamma} \left((u_+ - u_-) \cos(\nu, t) + (f(u_+) - f(u_-)) \cos(\nu, x) \right) \varphi dS. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что ν — внешняя нормаль к области $\Omega_- \cap G$, а к области $\Omega_+ \cap G$ внешней нормалью является $-\nu$. Учитывая, что, как отмечалось выше, $u(t, x)$ является классическим решением в Ω_- и в Ω_+ , т.е. выполнено (4.2) при $(t, x) \in \Omega_- \cup \Omega_+$, имеем:

$$\int_{\Gamma} ([u] \cos(\nu, t) + [f(u)] \cos(\nu, x)) \varphi \, dS = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (4.7)$$

Отсюда следует, что равенство (4.6) выполнено во всех точках $(t, x) \in \Gamma$, в которых кривая разрыва Γ гладкая (т.е. вектор нормали $\nu = (\cos(\nu, t), \cos(\nu, x))$ непрерывно зависит от точки). \square

Имеет место и утверждение, обратное к только что доказанному, а именно: если функция $u(t, x)$ является классическим решением уравнения (4.2) как в области Ω_- , так и в Ω_+ , имеет на Γ разрыв первого рода, а также на линии разрыва Γ удовлетворяет условию Ранкина-Гюгонио, то она является обобщенным решением уравнения (4.2) в области $\Omega = \Omega_- \cup \Gamma \cup \Omega_+$. Действительно, исходя из (4.7) и того факта, что

$$u_t + (f(u))_x = 0 \quad \text{при} \quad (t, x) \in \Omega_- \cup \Omega_+,$$

все выкладки можно проделать в обратном порядке. Это приводит к определению обобщенного решения (4.3).

Задача 4.2. *Провести строго доказательство этого факта.*

Теорема 4.2. *Пусть у функции $u(t, x)$, определенной в области Ω , есть несколько компонент гладкости $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ и, соответственно, несколько линий разрыва первого рода $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$, причем*

$$\Omega = \left(\bigcup_{i=1}^n \Omega_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^k \Gamma_i \right)$$

(см. рис. 7 в случае полосы $\Omega = \Pi_T$).

Функция $u(t, x)$ является в области Ω обобщенным решением уравнения (4.2) в смысле интегрального тождества (4.3) тогда и только тогда, когда $u(t, x)$ является классическим решением этого уравнения в окрестности каждой точки гладкости (т.е. на каждом из множеств Ω_i , $i = 1, \dots, n$) и удовлетворяет условию Ранкина-Гюгонио (4.6) на каждой линии разрыва Γ_i , $i = 1, \dots, k$ за исключением конечного числа точек пересечений Γ_i .

Для доказательства достаточно рассмотреть функцию $u(t, x)$ на каждой отдельно взятой линии разрыва Γ_i и двух прилегающих к ней компонентах гладкости Ω_{i_1} , Ω_{i_2} и воспользоваться утверждениями, доказанными в Предложении 4.1 и в Задаче 4.2.

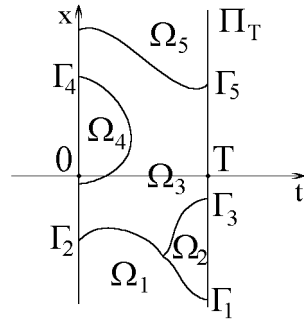


Рис. 7

Предложение 4.2. Пусть $u(t, x)$ — кусочно гладкое обобщенного решение уравнения (4.2) в области Ω в смысле интегрального тождества (4.3). Тогда для векторного поля $\vec{v} = (u, f(u))$ выполнен закон сохранения (4.4).

Доказательство. Пусть Ω_i — компоненты гладкости функции $u(t, x)$; G — произвольная подобласть области Ω . Поток векторного поля $\vec{v} = (u, f(u))$ через $\partial(\Omega_i \cap G)$ равен нулю, так как u — классическое решение уравнения (4.2) в каждой подобласти Ω_i . Рассмотрим равную нулю сумму этих потоков через все границы $\partial(\Omega_i \cap G)$. В силу выполнения условия Ранкина-Гюгонно (4.6) на каждой линии разрыва Γ_j , суммарный поток векторных полей \vec{v} с обеих сторон от Γ_j через кривую $\Gamma_j \cap G$ равен нулю. Значит, сумма потоков через все границы $\partial(\Omega_i \cap G)$ равна потоку векторного поля \vec{v} через ∂G , что и доказывает (4.4). \square

Как отмечалось в Замечании (3.2), площадь, ограниченная графиком классического решения $u(t, x)$ задачи (3.1)–(3.2) при различных фиксированных моментах времени $t \geq 0$ остается постоянной (не зависит от t), если только эта площадь конечна. Оказывается, что для обобщенного решения этот факт также имеет место. Таким образом, формирование ударной волны (опрокидывание графика) происходит таким образом, что “отрезаемая” часть равна по площади “добавляемой” (см. рис. 8), и это есть прямое следствие условия Ранкина-Гюгонно.

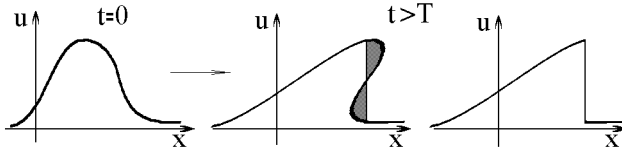


Рис. 8.

Предложение 4.3. Пусть кусочно гладкая, финитная по переменной x функция $u(t, x)$ с линией разрыва $x = x(t)$ является обобщенным решением уравнения (4.2). Обозначим

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx.$$

Тогда функция $S(t)$ не зависит от t , т.е. $S(t) \equiv \text{Const}$.

Доказательство. Действительно, запишем

$$S(t) = \int_{-\infty}^{x(t)} u(t, x) dx + \int_{x(t)}^{+\infty} u(t, x) dx,$$

где $x = x(t)$ — линия разрыва обобщенного решения $u(t, x)$. Как и ранее, обозначаем $u_{\pm} = \lim_{x \rightarrow x(t) \pm 0} u(t, x)$ — пределы справа и слева (по оси x -ов) решения $u(t, x)$ при подходе к линии разрыва. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= u(t, x(t) - 0) \cdot \dot{x}(t) + \int_{-\infty}^{x(t)} u_t(t, x) dx \\ &\quad - u(t, x(t) + 0) \cdot \dot{x}(t) + \int_{x(t)}^{+\infty} u_t(t, x) dx \\ &= (u_- - u_+) \cdot \dot{x}(t) - \int_{-\infty}^{x(t)} [f(u(t, x))]_x dx - \int_{x(t)}^{+\infty} [f(u(t, x))]_x dx \\ &= (u_- - u_+) \cdot \dot{x}(t) + f(u(t, -\infty)) - f(u(t, x(t) - 0)) \\ &\quad - f(u(t, +\infty)) + f(u(t, x(t) + 0)) \\ &= (f(u_+) - f(u_-)) - (u_+ - u_-) \cdot \dot{x}(t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

В этих выкладках, кроме самого уравнения (4.2), мы воспользовались тем, что $f(u(t, -\infty)) = f(u(t, +\infty)) = f(0)$ вследствие финитности функции $u(t, x)$ по x .

Если $u_+ = u_-$, то из (4.8) очевидно имеем

$$\frac{dS}{dt} = 0.$$

В случае же $u_+ \neq u_-$ тот же самый результат дает условие Ранкина-Гюгонио (4.5). \square

Задача 4.3. Докажите аналогичный результат в том случае, когда у кусочно-гладкого обобщенного (в смысле интегрального тождества) решения $u(t, x)$ уравнения (4.2) имеется не одна, а конечное число линий разрыва $x = x_j(t)$, $j = 1, \dots, N$.

Замечание 4.1. Если функция $u(t, x)$ терпит слабый разрыв на линии Γ , т.е. является на ней непрерывной и имеет на Γ лишь разрывы производных u_t, u_x , то условие Ранкина-Гюгонио (4.6), очевидно, выполнено (так как $[u] = 0$, и, следовательно, также $[f(u)] = 0$). Таким образом, кусочно-гладкая непрерывная в области Ω функция $u(t, x)$, которая в окрестности каждой точки гладкости является классическим решением, будет во всей области Ω обобщенным решением (функция $u(t, x)$ классическим решением в Ω , безусловно, не является, так как она недифференцируема при $(t, x) \in \Gamma \subset \Omega$).

Замечание 4.2. Формально переходя к пределу в (4.5) при $u_{\pm} \rightarrow u$ на линии слабого разрыва $\Gamma = \{(t, x) \mid x = x(t)\}$, получим

$$\frac{dx}{dt} = f'(u(t, x)), \quad (4.9)$$

т.е. слабый разрыв распространяется по характеристике.

Дадим строгое доказательство этого факта.

Пусть $\Gamma = \{(t, x) \mid x = x(t)\}$ — линия слабого разрыва между двумя классическими решениями $u(t, x)$ и $v(t, x)$ уравнения (4.2). Тогда

$$u(t, x(t)) \equiv v(t, x(t)). \quad (4.10)$$

Дифференцируя (4.10) по t , получаем

$$u_t(t, x(t)) + u_x(t, x(t)) \cdot \frac{dx}{dt} = v_t(t, x(t)) + v_x(t, x(t)) \cdot \frac{dx}{dt}$$

Здесь и далее под u_x, v_x, u_t, v_t мы подразумеваем соответствующие пределы производных при стремлении точки (t, x) к линии слабого разрыва Γ . (Из определения слабого разрыва следует, что эти

пределы существуют.) Заменяя теперь в силу уравнения (4.2) производные по t , имеем

$$u_x(t, x(t)) \cdot \frac{dx}{dt} - f'(u(t, x(t)))u_x = v_x(t, x(t)) \cdot \frac{dx}{dt} - f'(v(t, x(t)))v_x.$$

Отсюда, принимая во внимание (4.10), получаем

$$\left(u_x(t, x(t)) - v_x(t, x(t)) \right) \left(\frac{dx}{dt} - f'(u(t, x(t))) \right) = 0.$$

Так как кривая $x = x(t)$ является линией слабого разрыва, то на ней выполнено $u_x(t, x) \neq v_x(t, x)$, и (4.10) доказано.

Упражнение 4.1. Является ли функция $u(t, x)$ обобщенным решением (в смысле интегрального тождества (4.3)) уравнения (4.2) в полосе $\Pi_T = \{-\infty < x < +\infty, 0 < t < T\}$, если

$$1) \quad f(u) = u^2/2, \quad u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < t, \\ 1 & \text{при } x > t; \end{cases}$$

$$2) \quad f(u) = u^2/2, \quad u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < t, \\ 2 & \text{при } x > t; \end{cases}$$

$$3) \quad f(u) = u^2/2, \quad u(t, x) = \begin{cases} 2 & \text{при } x < t, \\ 0 & \text{при } x > t; \end{cases}$$

$$4) \quad f(u) = -u^2, \quad u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ -1 & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$5) \quad f(u) = -u^2, \quad u(t, x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$6) \quad f(u) = u^3, \quad u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ -1 & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$7) \quad f(u) = u^3, \quad u(t, x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x < t, \\ 1 & \text{при } x > t; \end{cases}$$

$$8) \quad f(u) = u^3, \quad u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < t, \\ -1 & \text{при } x > t. \end{cases}$$

Упражнение 4.2. Придумать какие-либо обобщенные решения (в смысле интегрального тождества) в полосе Π_T уравнений

$$1) \quad u_t - (u^3)_x = 0,$$

$$2) \quad u_t - u^2 \cdot u_x = 0,$$

$$3) \quad u_t + \sin u \cdot u_x = 0,$$

$$4) \quad u_t - (e^u)_x = 0,$$

$$5) \quad u_t + (e^u)_x = 0,$$

$$6) \quad u_t + u_x/u = 0,$$

которые после любого изменения на множестве меры нуль не становились бы классическими.

4.3. Пример неединственности обобщенного решения задачи Коши в смысле интегрального тождества

Оказывается, расширение понятия решения уравнения (4.2) путем перехода к интегральному тождеству (4.3) (которое, заметим, является обобщенной формой закона сохранения (4.4)) для векторного поля $\vec{v} = (u, f(u))$ приводит к неединственности обобщенного решения задачи Коши. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим уравнение (4.2) с функцией состояния $f(u) = u^2$ и с нулевыми начальными условиями:

$$u_t + 2uu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t < T, \quad (4.11)$$

$$u|_{t=0} = 0. \quad (4.12)$$

Классическим (а, следовательно, и обобщенным) решением этой задачи является функция $u(t, x) \equiv 0$. Тем не менее мы можем построить отличные от тождественного нуля обобщенные решения рассматриваемой задачи. Положим (см. рис. 9)

$$u_\delta(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -\delta t, \\ -\delta & \text{при } -\delta t < x < 0, \\ +\delta & \text{при } 0 < x < +\delta t, \\ 0 & \text{при } x > +\delta t, \end{cases} \quad \text{где } \delta > 0. \quad (4.13)$$

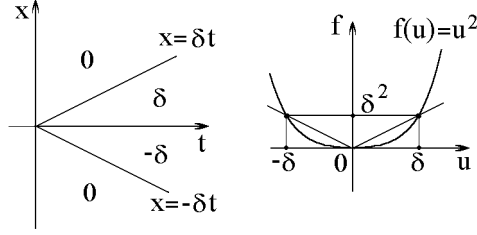


Рис. 9.

Заданная формулой (4.13) функция $u_\delta(t, x)$ на каждой из четырех компонент гладкости является классическим решением уравнения (4.11) (вообще, любая константа удовлетворяет уравнению (4.2) с произвольной функцией состояния $f(u)$). Проверим условие Ранкина-Гюгонио на каждой из трех ($x = 0$ и $x = \pm\delta t$) прямых разрыва:

при $x = 0$ имеем $u_- = -\delta$, $u_+ = \delta$, и

$$\frac{dx}{dt} = 0 = \frac{\delta^2 - (-\delta)^2}{\delta - (-\delta)} = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-};$$

при $x = -\delta t$ имеем $u_- = 0$, $u_+ = -\delta$, и

$$\frac{dx}{dt} = -\delta = \frac{(-\delta)^2 - 0^2}{(-\delta) - 0} = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-};$$

при $x = \delta t$ имеем $u_- = \delta$, $u_+ = 0$, и

$$\frac{dx}{dt} = \delta = \frac{0^2 - \delta^2}{0 - \delta} = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}.$$

Заметим, что в случае кусочно-постоянных решений условие Ранкина-Гюгонио имеет весьма простой геометрический смысл. Построим график функции состояния $f = f(u)$ в осях (u, f) , параллельных координатным осям (t, x) . Отметим на построенном графике точки $(u_-, f(u_-))$ и $(u_+, f(u_+))$ (см. рис. 10). Тогда отрезок, соединяющий эти точки, будет параллелен прямой разрыва $x = x(t) = kt$. Действительно, тангенс угла наклона отрезка равен $\frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}$, а тангенс угла наклона прямой разрыва есть $\frac{dx}{dt} = k$, равенство же этих тангенсов углов наклона и есть в точности условие Ранкина-Гюгонио (4.5).

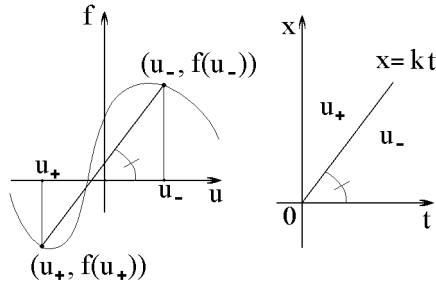


Рис. 10.

С этой геометрической точки зрения можно посмотреть на только что построенные обобщенные решения $u_\delta(t, x)$ уравнения (4.11). Отметив точки $(0, 0)$, $(\pm\delta, \delta^2)$ и соединив их отрезками как это показано на рис. 9, мы и получаем направления искомых линий разрыва.

Упражнение 4.3. Построить кусочно-постоянное обобщенное решение задачи (4.11)–(4.12) с тремя (как у $u_\delta(t, x)$) линиями разрыва, отличное от (4.13). Для построенного решения проверить аналитически выполнение условия Ранкина-Гюгонио на всех линиях разрыва.

Заметим, что кусочно-постоянное обобщенное решение задачи (4.11)–(4.12) с двумя линиями разрыва построить нельзя, так как у такого решения должны быть скачки от 0 к некоторой константе δ и от δ к 0, а эти разрывы могут быть, в соответствии с условием Ранкина-Гюгонио, лишь на прямой $x = \frac{f(\delta) - f(0)}{\delta - 0}t$.

Упражнение 4.4. Построить кусочно-постоянные обобщенные (в смысле интегрального тождества) решения задачи (4.11)–(4.12) более чем с тремя линиями разрыва.

Упражнение 4.5. Можно ли построить такие решения с четным числом линий разрыва, каждая из которых является лучом, выходящим из начала координат?

Для построения не равного тождественно нулю обобщенного решения задачи Коши

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad (4.14)$$

с произвольной заданной функцией состояния $f(u)$, достаточно выбрать два числа α и β , $\alpha < 0 < \beta$, так, чтобы точки $(0, f(0))$, $(\alpha, f(\alpha))$ и $(\beta, f(\beta))$ не лежали на одной прямой, соединить их отрезками, и тем самым получить направление прямых разрыва решения на плоскости (t, x) , как это описывалось выше в случае $f(u) = u^2$ (см. рис. 9). Невозможность же найти такие точки в точности означает, что функция $f(u) = au + b$ — линейная, и тогда линейная (а не квазилинейная) задача $u_t + au_x = 0$, $u|_{t=0} = u_0(x)$, при любом начальном условии $u_0(x)$ имеет единственное решение $u(t, x) = u_0(x - at)$.

Упражнение 4.6. Построить нетривиальные обобщенные (в смысле интегрального тождества) решения задачи (4.14) с $f(u) = u^3$ и $f(u) = \sin u$. Можно ли придумать такие решения с более чем тремя прямыми разрыва?

Понятно, что все построенные выше обобщенные решения задачи (4.11)–(4.12) или (4.14) в каком-то смысле “неправильные”, хотя и удовлетворяют уравнению в смысле интегрального тождества (4.3), а “правильным” решением является, безусловно, тождественный нуль. Таким образом, мы должны математически точно сформулировать еще некоторое необходимое условие на обобщенное решение, выделяющее единственно “правильное” решение. Это условие, носящее название условия возрастания энтропии, будет сформулировано ниже.

4.4. Одномерное нелинейное уравнение.

В настоящем разделе мы будем строить решение задачи Коши для одномерного по пространственной переменной x нелинейного уравнения

$$u_t + f(u_x) = 0, \quad (4.15)$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (4.16)$$

Пусть $u(t, x)$ — достаточно гладкое классическое решение задачи (4.15)–(4.16). Продифференцируем уравнение (4.15) по x и обозначим $p(t, x) \equiv u_x(t, x)$. Функция $p(t, x)$ удовлетворяет следующей задаче Коши для рассмотренного выше квазилинейного уравнения:

$$p_t + (f(p))_x = 0, \quad (4.17)$$

$$p|_{t=0} = p_0(x), \quad (4.18)$$

где $p_0(x) = u'_0(x)$.

Обратно, пусть функция $p(t, x)$ является классическим решением задачи Коши (4.17)–(4.18). Из равенства $p_t = (-f(p))_x$ следует, что выражение (1-форма) $p dx - f(p) dt$ есть полный дифференциал некоторой функции $u(t, x)$:

$$p dx - f(p) dt = du, \quad (4.19)$$

при этом $u_x = p$, $u_t = -f(p) = -f(u_x)$. Таким образом, функция $u(t, x)$, являющаяся потенциалом векторного поля $(-p, f(p))$, есть решение задачи Коши (4.15)–(4.16), при этом $u_0(x)$ есть первообразная функции $p_0(x)$ (так как при $t = 0$ равенство (4.19) принимает вид $p_0(x) dx = du_0(x)$). Начальные функции $u_0(x)$, как и само решение $u(t, x)$, определяются по $p(t, x)$ с точностью до константы.

Рассмотрим теперь в области Ω кусочно-гладкое обобщенное решение $p(t, x)$ квазилинейного уравнения (4.17) с одной линией разрыва $\Gamma = \{(t, x(t))\}$. Это в точности означает, что

$$p(t, x) = \begin{cases} p_-(t, x) & \text{при } x < x(t), \\ p_+(t, x) & \text{при } x > x(t), \end{cases}$$

где p_+ и p_- — классические решения уравнения (4.17) в областях $\Omega_+ = \{(t, x) \mid x > x(t)\}$ и $\Omega_- = \{(t, x) \mid x < x(t)\}$, а на Γ выполнено условие Ранкина-Гюгонио

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(p_+) - f(p_-)}{p_+ - p_-}. \quad (4.20)$$

Определим по p_+ и p_- в соответствии с (4.19) функции $u_+(t, x)$ и $u_-(t, x)$ — классические решения уравнения (4.15) в областях Ω_+ и Ω_- . Так как

$$p_{\pm} dx - f(p_{\pm}) dt = du_{\pm},$$

то на линии разрыва Γ имеем

$$d(u_+ - u_-) = (p_+ - p_-) dx - (f(p_+) - f(p_-)) dt. \quad (4.21)$$

В силу (4.20) правая часть (4.21) равна 0, то есть $d(u_+ - u_-) = 0$. Следовательно, $(u_+ - u_-)|_{\Gamma} \equiv \text{Const}$. Естественно положить эту константу равной нулю и определять обобщенное решение уравнения (4.15) как *непрерывную* кусочно-гладкую функцию, которая в окрестности каждой точки гладкости является классическим решением этого

уравнения. При таком определении мы допускаем возможность лишь слабых разрывов для решений задачи (4.15)–(4.16).

Конечно же, понимаемое в указанном смысле обобщенное решение задачи Коши (4.15)–(4.16) будет неединственно, как и в квазилинейном случае. Действительно, если мы проинтегрируем функцию $p \equiv u_\delta(t, x)$ (u_δ задано в (4.13)) в соответствии с (4.19), то при каждом $\delta > 0$ получим непрерывную в полуплоскости $t \geq 0$ функцию

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\delta t, \\ -\delta(x + \delta t) & \text{при } -\delta t \leq x \leq 0, \\ \delta(x - \delta t) & \text{при } 0 \leq x \leq +\delta t, \\ 0 & \text{при } x \geq +\delta t, \end{cases}$$

являющуюся (как легко проверить и непосредственной подстановкой в уравнение) наряду с $u \equiv 0$ обобщенным решением следующей задачи Коши:

$$u_t + (u_x)^2 = 0, \quad u|_{t=0} = 0.$$

Упражнение 4.7. Построить какие-либо нетривиальные обобщенные решения следующих задач Коши:

- 1) $u_t + (u_x)^3 = 0, \quad u|_{t=0} = 0;$
- 2) $u_t - (u_x)^2 = 0, \quad u|_{t=0} = 1;$
- 3) $u_t + \sin u_x = 0, \quad u|_{t=0} = 2;$
- 4) $u_t - \exp u_x = 0, \quad u|_{t=0} = 0;$
- 5) $u_t + f(u_x) = 0, \quad u|_{t=0} = u_0 \equiv \text{Const}.$

Как строить решения этих задач, имеющие более чем три прямые слабого разрыва?

5. Понятие обобщенного энтропийного решения

Из содержания предыдущих разделов вытекает, что в теории задачи Коши для уравнения

$$u_t + (f(u))_x = 0 \quad (5.1)$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x) \quad (5.2)$$

имеется следующая ситуация:

1) Даже при некоторых ограниченных гладких (бесконечно дифференцируемых) начальных функциях $u_0(x)$ решение $u(t, x)$ является гладкой функцией до момента времени T , а предел

$$u(T, x) = \lim_{t \rightarrow T-0} u(t, x)$$

есть кусочно-гладкая функция с разрывами 1-го рода. Так как уравнение (5.1) относится к числу так называемых “гиперболических” уравнений, гладкие решения которых строятся по “информации”, распространяющейся вдоль характеристик с начального многообразия, и эта “информация” обусловила возникновение разрыва 1-го рода, то естественно ожидать, что решение останется разрывным и на некотором отрезке времени $[T, T + \delta]$. Это означает, что для построения нелокальной теории задачи (5.1)–(5.2) необходимо ввести в рассмотрение разрывные решения.

2) Естественным подходом к введению таких решений является подход “в смысле теории распределений (обобщенных функций)”, о котором мы говорили в разделе 4.1. Даже в классе локально ограниченных измеримых в Π_T функций можно рассматривать обобщенные решения $u(t, x)$ в смысле интегрального тождества

$$\int_{\Pi_T} [u\varphi_t + f(u)\varphi_x] dx dt = 0, \quad (5.3)$$

справедливого для любой “пробной” функции $\varphi(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, а начальное условие (5.2) это решение принимает, скажем, для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

Однако, как было показано выше, при таком понимании обобщенного решения оно оказывается неединственным (даже при $u_0(x) \equiv 0$). Понятно, что эффект неединственности связан с наличием разрывов

у решения в приведенном примере. По-видимому, не любые разрывы допустимы. Но как найти соответствующие необходимые условия на разрывы?

5.1. Условие допустимости разрыва в случае выпуклой функции состояния

Сделаем дополнительное предположение

$$f''(u) \geq 0, \quad f(u) \in C_{loc}^3, \quad u_0(x) \in C^2.$$

Задача 5.1. На основе (3.7) или (3.11) и Задачи 3.2 или 3.3 покажите, что в этом случае $u(t, x) \in C^2(\Pi_T)$.

Теперь воспользуемся следующим “чисто математическим” соображением: попытаемся выявить те свойства гладких при $t < T$ решений, которые не ухудшаются (или сохраняются) при “подходе” к критическому значению времени $t = T$ и которые, следовательно, характеризуют возникающие особенности решения $u(t, x)$. Обозначим $p = u_x(t, x)$ и продифференцируем уравнение (5.1) по x . Имеем

$$0 = p_t + f'(u) \cdot p_x + f''(u) \cdot p_x^2 \geq p_t + f'(u)p_x.$$

Вдоль любой характеристики $x = x(t)$, $\dot{x} = f'(u(t, x(t)))$, (а такие характеристики заполняют всю область Π_T существования гладкого решения) последнее неравенство “сворачивается” так:

$$0 \geq p_t + \frac{dx}{dt} p_x = \frac{dp(t, x(t))}{dt},$$

то есть функция $p(t, x)$ не возрастает вдоль характеристик $x = x(t)$. (Это же дает нам и третье уравнение в характеристической системе (3.3): $\dot{p} = -f''(u)p^2 \leq 0$.) Следовательно, в любой точке $(t, x) \in \Pi_T$ выполнено

$$p(t, x) = u_x(t, x) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} u'_0(x) = K_0. \quad (5.4)$$

Поскольку производная $u_x(t, x)$ при $t = T$ определена не при всех x , то перейдем к эквивалентной форме неравенства (5.4):

$$\frac{u(t, x_2) - u(t, x_1)}{x_2 - x_1} \leq K_0 \quad \forall x_1, x_2. \quad (5.5)$$

Такого вида неравенство в качестве условия допустимости в теории обобщенных решений введено в работах О.А.Олейник (см. [6]). Из (5.5) следует $u(t, x_2) - u(t, x_1) \leq K_0(x_2 - x_1)$ при $x_1 < x_2$, и в пределе при $x_2 \rightarrow x^* + 0$, $x_1 \rightarrow x^* - 0$, где x^* — точка разрыва функции $u(T, x)$, получаем

$$u_+ = u(t, x^* + 0) < u(t, x^* - 0) = u_- . \quad (5.6)$$

Будем требовать выполнение (5.6) в каждой точке разрыва обобщенного решения $u(t, x)$. Это условие естественно рассматривать как *условие допустимости* разрыва в классе кусочно-гладких решений.

Замечание 5.1. В рассмотренном выше (см. раздел 4.3) примере неединственности для задачи Коши (4.11)–(4.12), где $f''(u) = 2 > 0$, для решений $u_\delta(t, x)$, $\delta > 0$, вида (4.13) условие допустимости разрыва (5.6) не выполнено на прямой $x = 0$. Единственным допустимым решением будет $u(t, x) \equiv 0$, являющееся классическим решением рассматриваемой задачи.

Если $f''(u) < 0$, то после замены $u = -v$ в уравнении (5.1) получаем $v_t + (\tilde{f}(v))_x = 0$, где $\tilde{f}(v) \equiv -f(-v)$, причем $\tilde{f}''(v) = -f''(-v) > 0$. Для решения $v(t, x)$ мы имеем $v_+ < v_-$. Следовательно, условием допустимости в случае $f''(u) < 0$ является противоположное к (5.6) неравенство $u_+ = -v_+ > -v_- = u_-$.

Таким образом, выведено следующее условие допустимости разрыва в случае выпуклой функции состояния $f(u)$. Пусть u_- и u_+ — пределы обобщенного решения $u(t, x)$ при подходе к линии разрыва соответственно слева и справа по направлению оси x -ов. Тогда

- если функция состояния $f(u)$ является выпуклой вниз (например, $f(u) = u^2/2, e^u, \dots$), то у решения уравнения (5.1) возможны скачки от u_- к u_+ лишь при $u_- > u_+$;
- если $f(u)$ выпукла вверх ($f(u) = -u^2, \ln u, \dots$), то скачки от u_- к u_+ возможны лишь в случае $u_- < u_+$.

Дадим некоторое “физическое” пояснение полученного условия допустимости разрыва. Из этого условия следует, что в любой точке линии разрыва $x = x(t)$ угловые коэффициенты $f'(u_+)$ и $f'(u_-)$ характеристик $x = f'(u_\pm)t + C$, подходящих в эту точку с разных сторон от линии разрыва, а также тангенс $\omega = \frac{dx}{dt} = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}$ угла

наклона касательной к линии разрыва (заметим, что ω равно значению $f'(\tilde{u})$ в некоторой точке \tilde{u} , лежащей строго между u_+ и u_-) удовлетворяют соотношению

$$f'(u_+) < \omega = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} = f'(\tilde{u}) < f'(u_-). \quad (5.7)$$

Действительно, если $f''(u) > 0$, то $f'(u)$ — монотонно возрастающая функция, а из условия допустимости разрыва в случае выпуклой вниз функции состояния $f(u)$ следует $u_+ < \tilde{u} < u_-$. Если же функция $f(u)$ выпукла вверх ($f''(u) < 0$), то условие допустимости разрыва нам дает $u_+ > \tilde{u} > u_-$, и мы снова имеем (5.7), так как в этом случае $f'(u)$ — монотонно убывающая функция.

Таким образом, мы имеем, что с возрастанием t характеристики подходят с разных сторон к линии разрыва (см. рис. 11а), а не отходят от нее (рис. 11б). Это означает, что разрешены те разрывы, которые обусловлены тем, что характеристики, соответствующие гладким решениям (с каждой стороны от линии разрыва), начинают пересекаться с ростом t . А ситуация, когда мы сами как бы навязываем линию разрыва, и характеристики с ростом времени отходят от нее, недопустима.

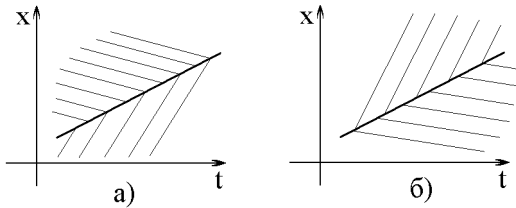


Рис. 11.

Пример 5.1. Проиллюстрируем вышесказанное на примере уравнения Хопфа (1.1), т.е. уравнения (5.1) с $f(u) = u^2/2$. Это уравнение (см. §1) описывает поле свободно движущихся частиц. Пусть частицы, находящиеся в начальный момент в окрестности $+\infty$ (т.е. с координатами больше некоторого значения), имеют скорость u_+ , а в окрестности $-\infty$ — скорость u_- , причем $u_+ < u_-$. Последнее означает, что частицам не избежать столкновений, и будет образовываться ударная волна. Скорость движения ударной волны, образованной

столкновением этих частиц, будет равна

$$\omega = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} = \frac{u_+^2/2 - u_-^2/2}{u_+ - u_-} = \frac{u_+ + u_-}{2}.$$

Мы получаем обобщенное решение уравнения Хопфа в следующем виде:

$$u(t, x) = \begin{cases} u_- & \text{при } x < \omega t + C, \\ u_+ & \text{при } x > \omega t + C. \end{cases} \quad (5.8)$$

Это решение можно интерпретировать следующим образом. Между частицами, имеющими скорости u_- и u_+ , происходит абсолютно неупругое соударение, то есть они соединяются в одну. После соударения частицы продолжают движение со скоростью $(u_+ + u_-)/2$, создавая ударную волну. Скорость движения этой волны найдена из закона сохранения импульса — среднее арифметическое между скоростями частиц до соударения. Заметим, что при таких соударениях происходит потеря кинетической энергии (к этому вопросу мы еще вернемся ниже).

Если же мы имели $u_+ > u_-$, и начальное распределение скоростей было гладкой монотонно возрастающей функцией, то никаких соударений между частицами происходить не будет, распределение скоростей $u(t, \cdot)$ в любой момент времени $t > 0$ будет, также как и при $t = 0$, гладкой монотонно возрастающей функцией, никаких ударных волн не может образоваться (см. разд. 3.1). В этом случае функция $u(t, x)$, задаваемая (5.8), хоть и удовлетворяет интегральному тождеству (5.3), не является физически правильным решением уравнения Хопфа.

5.2. Метод “исчезающей вязкости”

Для обобщения условия допустимости разрыва на случай невыпуклой функции состояния $f(u)$ сделаем следующее “наблюдение”, учитывая взаимное расположение графиков и хорд выпуклых функций: если $u_- > u_+$ ($u_- < u_+$), то график функции $f(u)$ должен быть расположен не выше (не ниже) хорды, стягивающей точки $(u_-, f(u_-))$ и $(u_+, f(u_+))$ (см. рис. 12). Оказывается, именно в такой форме полученные условия допустимости распространяются на случай произвольной (невыпуклой) функции состояния $f(u)$.

Для достаточно строгого обоснования этого утверждения применим “физические (точнее, газодинамические) соображения”, основывающиеся на понятиях “идеального” и “вязкого” газа. Если $x = x(t)$

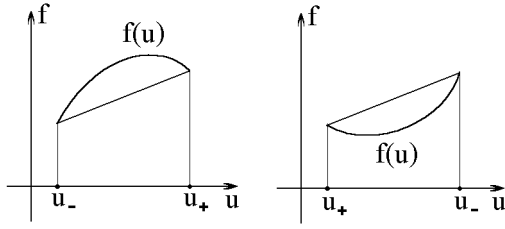


Рис. 12.

— траектория частицы идеального газа в трубке, расположенной вдоль оси x , а функция $u(t, x)$ — скорость частицы, находящейся в момент времени t в точке x , то (см. §1) $\dot{x}(t) = u(t, x(t))$, $\ddot{x}(t) = \frac{du}{dt} = 0$, откуда и возникает уравнение Хопфа (1.1). Но идеальный газ “бывает” лишь теоретически, в пределе, когда вязкость реального газа не учитывается ввиду ее малости.

Если ε , $\varepsilon > 0$, — коэффициент вязкости реального газа, то силу вязкостного трения (при определенных допущениях), действующую на частицу $x(t)$ и отнесенную к единице массы, можно принять равной $\varepsilon u_{xx}(t, x(t))$. Тогда $\ddot{x} = \frac{du}{dt} = \varepsilon u_{xx}$, и вместо уравнения Хопфа мы получаем так называемое уравнение Бюргерса

$$u_t + u \cdot u_x = \varepsilon u_{xx}. \quad (5.9)$$

Естественно считать (а это так и есть), что все допустимые обобщенные решения уравнения Хопфа могут быть получены как предел решений $u^\varepsilon(t, x)$ уравнения (5.9) при стремлении коэффициента вязкости ε к 0. Сама операция введения в уравнение первого порядка члена εu_{xx} с последующим изучением пределов при $\varepsilon \rightarrow +0$ называется *методом “исчезающей вязкости”*.

Прежде чем перейти к применению этого метода для обоснования сформулированного выше условия допустимости в общем случае, укажем важный метод “линеаризации” (в определенном смысле) уравнения Бюргерса (5.9). Учитывая, что $u_t = (\varepsilon u_x - u^2/2)_x$, введем потенциал $U(t, x)$, определяемый равенством

$$dU = u dx + (\varepsilon u_x - u^2/2) dt.$$

В этом случае

$$U_x = u, \quad U_t = \varepsilon u_x - u^2/2 = \varepsilon U_{xx} - U_x^2/2,$$

то есть функция $U(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$U_t + \frac{1}{2}U_x^2 = \varepsilon U_{xx}. \quad (5.10)$$

Сделаем в (5.10) замену $U = -2\varepsilon \ln z$. Тогда

$$U_t = -2\varepsilon \frac{z_t}{z}, \quad U_x = -2\varepsilon \frac{z_x}{z}, \quad U_{xx} = -2\varepsilon \frac{z_{xx}}{z} + 2\varepsilon \frac{z_x^2}{z^2}.$$

Уравнение (5.10) примет вид

$$-2\varepsilon \frac{z_t}{z} + 2\varepsilon^2 \frac{z_x^2}{z^2} = -2\varepsilon^2 \frac{z_{xx}}{z} + 2\varepsilon^2 \frac{z_x^2}{z^2},$$

то есть получено линейное уравнение теплопроводности относительно функции $z(t, x)$:

$$z_t = \varepsilon z_{xx}. \quad (5.11)$$

Замечание 5.2. Указанный метод линеаризации был впервые предложен при исследовании одной прикладной задачи русским механиком В.А.Флориным в 1948 году. Позже (в 50-е годы) этот метод был переоткрыт американскими учеными Э.Хопфом и С.Коулом и теперь часто называется их именами (правильно говорить о преобразовании Флорина-Хопфа-Коула).

Из сделанных замен следует, что решение уравнения (5.9) имеет вид

$$u = U_x = -2\varepsilon \frac{z_x}{z},$$

где $z(t, x)$ есть решение (5.11).

Как хорошо известно из теории линейных уравнений с частными производными второго порядка, решение задачи Коши для уравнения теплопроводности (5.11) даже с кусочно непрерывными начальными данными бесконечно дифференцируемо при $t > 0$. Таким образом, и решение уравнения Бюргера (5.9) также есть бесконечно дифференцируемая функция, и, следовательно, не может иметь ударных волн.

Предположим теперь, что простая волна

$$u(t, x) = u_- + \frac{u_+ - u_-}{2} [1 + \text{sign}(x - \omega t)] = \begin{cases} u_- & \text{при } x < \omega t, \\ u_+ & \text{при } x > \omega t, \end{cases} \quad (5.12)$$

где $\omega = \text{Const}$, является обобщенным решением уравнения (5.1) в смысле интегрального тождества (5.3). Для этого необходимо и достаточно, чтобы на линии разрыва $x(t) = \omega t$ было выполнено условие Ранкина-Гюгонио

$$\omega \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}. \quad (5.13)$$

Идея метода “исчезающей вязкости” в этом случае заключается в следующем. Будем считать, что данное разрывное решение (ударная волна) $u(t, x)$ вида (5.12) допустимо, если оно может быть получено как поточечный предел (при $x \neq \omega t$) решений $u^\varepsilon(t, x)$ уравнения

$$u_t^\varepsilon + (f(u^\varepsilon))_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon. \quad (5.14)$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$. (Излагаемый ниже подход был предложен И.М.Гельфандом [7]).

Учитывая структуру решения $u(t, x)$, будем искать решение уравнения (5.14) в виде

$$u^\varepsilon(t, x) = v(\xi), \quad \xi = \frac{x - \omega t}{\varepsilon}. \quad (5.15)$$

Подставляя решение такого вида в (5.14), получаем, что функция $v(\xi)$ есть решение уравнения

$$-\omega v' + (f(v))' = v''. \quad (5.16)$$

С другой стороны ясно, что функция $u^\varepsilon = v\left(\frac{x - \omega t}{\varepsilon}\right)$ поточечно (при $x \neq \omega t$) аппроксимирует при $\varepsilon \rightarrow +0$ функцию $u(t, x)$ вида (5.12) тогда и только тогда, когда функция $v(\xi)$ удовлетворяет граничным условиям

$$v(-\infty) = u_-, \quad v(+\infty) = u_+. \quad (5.17)$$

Замечание 5.3. Искомая функция $v(\xi)$ заведомо неединственна: если $v(\xi)$ — решение задачи (5.16)–(5.17), то решениями этой же задачи являются и функции $\tilde{v} = v(\xi - \xi_0)$ при любом $\xi_0 \in \mathbb{R}$.

Интегрируя (5.16), получаем

$$v' = -\omega v + f(v) + C = F(v) + C, \quad C = \text{Const}. \quad (5.18)$$

Для того чтобы автономное уравнение первого порядка (5.18) с гладкой правой частью $F(v) + C$ имело решение, которое стремится к константам u_- при $\xi \rightarrow -\infty$ и u_+ при $\xi \rightarrow +\infty$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- 1) u_- и u_+ – особые точки этого уравнения, т.е. обращают в нуль правую часть уравнения (5.18):

$$F(u_-) + C = F(u_+) + C = 0,$$

то есть $C = -F(u_-) = -F(u_+)$. Равенство $F(u_-) = F(u_+)$ после записи в виде $f(u_-) - \omega u_- = f(u_+) - \omega u_+$ в точности совпадает с условием Ранкина-Гюгонио (5.13).

- 2) На промежутке между u_- и u_+ нет других особых точек, и правая часть (5.18) $F(v) - F(u_-) = F(v) - F(u_+)$ на этом промежутке

- а) положительна при $u_- < u_+$ (тогда решение возрастает):

$$F(v) - F(u_-) > 0 \quad \forall v \in (u_-, u_+), \quad \text{если } u_- < u_+; \quad (5.19)$$

- б) отрицательна при $u_- > u_+$ ($v(\xi)$ убывает):

$$F(v) - F(u_+) < 0 \quad \forall v \in (u_+, u_-), \quad \text{если } u_+ < u_-; \quad (5.20)$$

Если же эти условия выполнены, то интересующие нас решения уравнения (5.16) задаются формулой

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v) - F(u_-)} = \xi - \xi_0, \quad v_0 = \frac{u_+ + u_-}{2}.$$

Соотношения (5.19)–(5.20) и являются аналитической записью условия допустимости.

Дадим теперь ему и геометрическую интерпретацию. Подставляя $F(v) = f(v) - \omega v$ в (5.19) и (5.20), получим:

$$\begin{aligned} f(v) - f(u_-) &> \omega(v - u_-) & \forall v \in (u_-, u_+), & \text{если } u_- < u_+, \\ f(v) - f(u_+) &< \omega(v - u_+) & \forall v \in (u_+, u_-), & \text{если } u_+ < u_-, \end{aligned}$$

или, с учетом условия Ранкина-Гюгонио (5.13):

$$\frac{f(u) - f(u_-)}{u - u_-} > \omega = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} \quad \forall u \in (u_-, u_+), \quad \text{если } u_- < u_+, \quad (5.19')$$

$$\frac{f(u) - f(u_+)}{u - u_+} < \omega = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} \quad \forall u \in (u_+, u_-), \quad \text{если } u_+ < u_-. \quad (5.20')$$

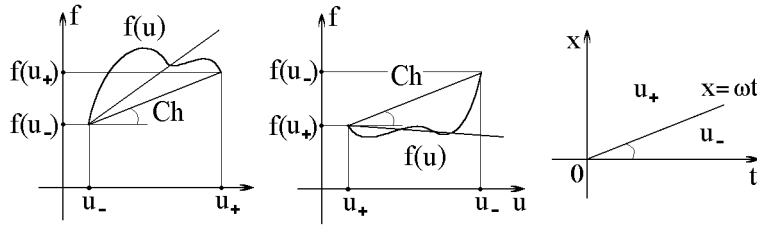


Рис. 13.

Нарисуем график функции $f(u)$ (см. рис. 13). Условие (5.19') означает, что хорда Ch этого графика с концами $(u_-, f(u_-))$, $(u_+, f(u_+))$ имеет меньший угол с положительным направлением оси u , чем секущая, проходящая через точки $(u_-, f(u_-))$, $(u, f(u))$ для всех u из интервала (u_-, u_+) . Следовательно, точка $(u, f(u))$ и весь график $f(u)$ на интервале (u_-, u_+) расположен выше указанной хорды Ch . Аналогично, условие (5.20') означает, что график функции $f(u)$ на (u_+, u_-) расположен ниже хорды Ch .

Замечание 5.4. Варьируя u_-, u_+ , а также $f(u)$, можно строить различные сходящиеся последовательности допустимых обобщенных решений вида (5.15). Естественно условиться считать допустимыми и любые поточечные пределы допустимых решений. Но тогда ясно, что любую ситуацию с касанием графика $f(u)$ и хорды Ch , тоже следует считать допустимой.

Окончательно получаем, что у решения $u(t, x)$ уравнения (5.1) возможен скачок от u_- к u_+ (в направлении возрастания x) при выполнении следующего **условия допустимости разрыва**:

- в случае $u_- < u_+$ график функции $f(u)$ на отрезке $[u_-, u_+]$ должен быть расположен **не ниже** хорды с концами $(u_-, f(u_-))$ и $(u_+, f(u_+))$;
- в случае $u_- > u_+$ график функции $f(u)$ на отрезке $[u_+, u_-]$ должен быть расположен **не выше** хорды с концами $(u_-, f(u_-))$ и $(u_+, f(u_+))$.

Дадим еще одну форму записи полученного условия. Для этого на рисунке в координатах (u, f) наряду с графиком функции $f(u)$ и хордой, соединяющей концы этого графика, расположим также

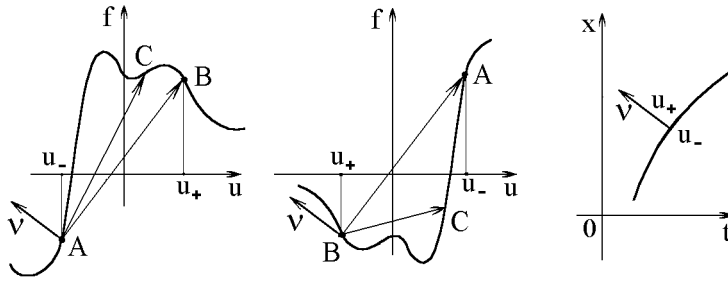


Рис. 14.

вектор нормали $\nu = (\cos(\nu, t), \cos(\nu, x))$ к линии сильного разрыва (см. рис. 14). Обозначим точки $A = (u_-, f(u_-))$, $B = (u_+, f(u_+))$ и $C = (u, f(u))$ — некоторая текущая точка на графике. Вектор ν ортогонален вектору \overrightarrow{AB} (это в точности условие Ранкина-Гюгонио (5.13)) и смотрит “вверх”, т.е. $\cos(\nu, x) > 0$ (так как нормаль выбирается нами по направлению оси x). Условие того, что график функции $f(u)$ расположен не ниже хорды в точности означает, что угол между векторами \overrightarrow{AC} (или \overrightarrow{BC}) и ν не больше $\pi/2$, то есть скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \nu)$ этих векторов неотрицательно:

$$(u - u_-) \cos(\nu, t) + (f(u) - f(u_-)) \cos(\nu, x) \geq 0 \quad \forall u \in (u_-, u_+) \quad (5.21)$$

в случае $u_- < u_+$.

Условие же того, график лежит не ниже хорды означает, что угол между теми же векторами не меньше $\pi/2$, то есть скалярное произведение $(\overrightarrow{BC}, \nu)$ неположительно:

$$(u - u_+) \cos(\nu, t) + (f(u) - f(u_+)) \cos(\nu, x) \leq 0 \quad \forall u \in (u_+, u_-) \quad (5.22)$$

в случае $u_- > u_+$.

Замечание 5.5. Условия допустимости разрыва, полученные “методом исчезающей вязкости” прекрасно согласуются с условиями, полученными в предыдущем разделе в случае выпуклой функции $f(u)$. Действительно, свойство выпуклости функции вниз (вверх) по определению означает, что любая хорда, соединяющая точки на графике этой функции, лежит выше (ниже) самого графика.

Везде ниже теперь под обобщенным кусочно гладким решением уравнения (5.1) мы будем понимать решение в смысле интегрального тождества (5.3), удовлетворяющее сформулированному условию возрастания энтропии на линиях сильного разрыва.

Упражнение 5.1. Установить, на каких прямых разрыва для решений $u(t, x)$ уравнений вида (5.1) выполнено, а на каких — нет, условие допустимости разрыва (при соблюдении условия Ранкина-Гюгонио (5.13)), где

- 1) $u(t, x)$ заданы в Упражнении 4.1;
- 2) $u(t, x)$ построены в Упражнении 4.2;
- 3) $u(t, x)$ построены в Упражнении 4.6.

5.3. Понятие энтропии и необратимость процессов

Почему же полученные выше условия допустимости разрыва называются условиями типа “возрастания энтропии”? Дело в том, что нелинейные физические процессы, моделируемые рассматриваемыми уравнениями, — необратимы во времени, а функция, при помощи которой характеризуется необратимость, называется “энтропией”.

Уравнение Хопфа (1.1) является, конечно, лишь простейшей моделью движения газа в трубке; в более правильных, более точных моделях присутствует еще давление, а в случае сжимаемого газа — и его плотность. Через эти характеристики состояния газа и выражается функция-энтропия S , которая (как это было известно уже в газовой динамике прошлого века) не убывает во времени при переходе через ударную волну Γ :

$$S_+ = S(t + 0, x) \geq S_- = S(t - 0, x), \quad (t, x) \in \Gamma. \quad (5.23)$$

Поэтому все неравенства, характеризующие необратимость природных процессов, называются неравенствами типа “возрастания энтропии”. В случае простейшей газодинамической модели — уравнения Хопфа — в качестве энтропии “выступает” кинетическая энергия частицы, находящейся в точке x в момент времени t :

$$S(t, x) \equiv \frac{1}{2}u^2(t, x).$$

Покажем, что при переходе через ударную волну неравенство (5.23) для этой функции действительно выполняется.

Условие Ранкина-Гюгонио (5.13) в случае уравнения Хопфа (т.к. $f(u) = u^2/2$) имеет вид

$$\frac{u_- + u_+}{2} = \frac{dx}{dt}. \quad (5.24)$$

Условие допустимости разрыва в случае выпуклой вниз функции состояния $f(u) = u^2/2$ записывается в виде

$$u_- - u_+ > 0. \quad (5.25)$$

Если $dx/dt \geq 0$, то (см. рис. 15) $S_- = u_+^2/2$, а $S_+ = u_-^2/2$. Умножая неравенство (5.25) на выражение $(u_- + u_+)/2$ (положительное в силу (5.24)), имеем $(u_-^2 - u_+^2)/2 > 0$, т.е. $S_- < S_+$.

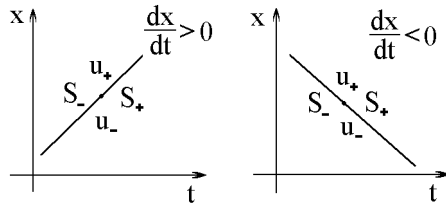


Рис. 15.

Аналогично, при $dx/dt < 0$ имеем (см. рис. 15):

$$S_- = \frac{1}{2}(u_-)^2 < \frac{1}{2}(u_+)^2 = S_+.$$

5.4. Энергетические оценки

Дадим еще одну характеристику необратимости для уравнения (5.1), имеющую более наглядный физический смысл. А именно, рассмотрим полную кинетическую энергию рассматриваемой физической системы

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx. \quad (5.26)$$

При гладких (и, скажем, финитных) начальных данных на некотором интервале времени $[0, T)$, $T > 0$, существует классическое (и

финитное по x при каждом фиксированном t) решение $u(t, x)$ задачи (5.1)–(5.2). В настоящем разделе мы будем рассматривать лишь те решения $u(t, x)$ уравнения (5.1), для которых кинетическая энергия (5.26) конечна (например, если $u(t, x)$ финитна по x).

Предложение 5.1. *Для классических решений уравнения (5.1) выполнено*

$$E(t) \equiv \text{Const},$$

то есть кинетическая энергия (5.26) является первым интегралом уравнения (5.1).

Доказательство. Ввиду $u(t, \pm\infty) = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_{-\infty}^{+\infty} uu_t dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} u(f(u))_x dx \\ &= -uf(u) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)u_x dx \\ &= \int_{u(t, -\infty)}^{u(t, +\infty)} f(u) du = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь уравнение с вязкостью

$$u_t^\varepsilon + (f(u^\varepsilon))_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon \quad (5.27)$$

Предложение 5.2. *Пусть $u^\varepsilon(t, x) \not\equiv 0$ — решение уравнения (5.27), причем u^ε , u_x^ε и u_{xx}^ε достаточно быстро и равномерно по t стремятся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Тогда полная кинетическая энергия $E(t)$ на этом решении убывает.*

Доказательство. Так же как и при доказательстве предыдущего предложения получаем

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon u_t^\varepsilon dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon (\varepsilon u_{xx}^\varepsilon - (f(u^\varepsilon))_x) dx \\ &= -\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} (u_x^\varepsilon)^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что мы имеем $dE/dt = 0$ лишь в случае постоянной по x функции $u^\varepsilon(t, x)$, что в силу ее стремления к нулю на бесконечности дает $u^\varepsilon(t, x) \equiv 0$. \square

Как мы помним (см. раздел 5.2), обобщенные энтропийные решения $u(t, x)$ уравнения (5.1) мы получали как пределы решений $u^\varepsilon(t, x)$ уравнения (5.27), на которых происходит диссипация энергии. Поэтому можно ожидать, что и на предельных решениях $u(t, x)$ кинетическая энергия также убывает.

Предложение 5.3. Пусть $u(t, x)$ — обобщенное энтропийное решение уравнения (5.1) с одной линией сильного разрыва $x = x(t)$. Тогда скорость убывания кинетической энергии $E(t)$ на этом решении в каждый момент времени $t = t_0$ равна площади $S(t_0)$, ограниченной графиком функции состояния $f = f(u)$ на отрезке $[u_-, u_+]$ (или $[u_+, u_-]$) и хордой, соединяющей точки $(u_-, f(u_-))$ и $(u_+, f(u_+))$ на этом графике (см. рис. 16) :

$$\frac{dE}{dt}(t_0) = -S(t_0). \quad (5.28)$$

Как и раньше, через $u_\pm = u_\pm(t_0)$ мы обозначаем односторонние пределы (по x) функции $u(t_0, x)$ при подходе к точке разрыва $x(t_0)$.

Доказательство. Рассмотрим для определенности случай, когда $u_- < u_+$, и, следовательно, график функции $f(u)$ на отрезке $[u_-, u_+]$ лежит выше соответствующей хорды. Тогда

$$S = \int_{u_-}^{u_+} f(u) du - \frac{f(u_+) + f(u_-)}{2}(u_+ - u_-).$$

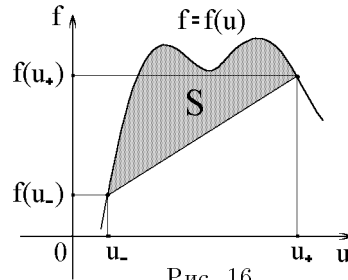


Рис. 16

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx \\ &= \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{x(t)} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx + \int_{x(t)}^{+\infty} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} u_-^2 \cdot \dot{x}(t) + \int_{-\infty}^{x(t)} u u_t(t, x) dx - \frac{1}{2} u_+^2 \cdot \dot{x}(t) + \int_{x(t)}^{+\infty} u u_t(t, x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{u_-^2 - u_+^2}{2} \cdot \dot{x}(t) - \int_{-\infty}^{x(t)} u (f(u))_x dx - \int_{x(t)}^{+\infty} u (f(u))_x dx \\
&= \frac{u_-^2 - u_+^2}{2} \cdot \dot{x}(t) - uf(u) \Big|_{x=-\infty}^{x=x(t)} + \int_{-\infty}^{x(t)} f(u) u_x dx \\
&\quad - uf(u) \Big|_{x=x(t)}^{x=+\infty} + \int_{x(t)}^{+\infty} f(u) u_x dx.
\end{aligned}$$

В силу условия Ранкина-Гюгонио (5.13) и с учетом того, что $u(t, \pm\infty) = 0$, имеем

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \frac{u_-^2 - u_+^2}{2} \cdot \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} - u_- f(u_-) \\
&\quad + \int_0^{u_-} f(u) du + u_+ f(u_+) + \int_{u_+}^0 f(u) du \\
&= u_+ f(u_+) - u_- f(u_-) - \frac{(u_+ + u_-)(f(u_+) - f(u_-))}{2} \\
&\quad - \int_{u_-}^{u_+} f(u) du \\
&= \frac{(u_+ - u_-)(f(u_+) + f(u_-))}{2} - \int_{u_-}^{u_+} f(u) du = -S. \quad \square
\end{aligned}$$

Замечание 5.6. Если решение имеет несколько ударных волн, то на каждой из них происходит потеря энергии в соответствии с (5.28). (Докажите этот факт самостоятельно.)

Заключение. Таким образом, в силу Предложения 5.1 мы имеем $E(t) = \text{Const} = E(0)$ на гладких решениях $u(t, x)$ уравнения (5.1) до критического момента времени T (когда у решений появляются особенности), т.е. диссипации кинетической энергии нет — она постоянна.

При наличии же ударных волн в соответствии с (5.28) мы имеем

$$\frac{dE}{dt} < 0,$$

то есть кинетическая энергия диссипирует (частично она превращается на ударных волнах в тепловую энергию). Следовательно, эволюция обобщенных решений с ударными волнами связана с убыванием кинетической энергии, что и определяет необратимость соответствующих физических процессов, моделируемых уравнением (5.1).

Такой физический процесс нельзя “прокрутить” (как в кино) в обратном по времени направлении.

Практически все встречались с этим явлением на море: если волны небольшие, море достаточно спокойное, и его температура на поверхности почти такая же, как и температура воздуха. Если ветер усиливается, и появляются “барашки” — “морские ударные волны” (волнение больше 3 баллов), то по прошествии длительного времени море у поверхности воды становится теплее воздуха. Это обусловлено выделением тепла на ударных волнах.

Чисто математически ситуация, указанная в Заключении, связана с тем обстоятельством, что при замене t на $-t$ и x на $-x$ (как и при сдвигах вдоль осей $x \rightarrow x-x_0$ и $t \rightarrow t-T$) уравнение (5.1) не изменяется (в этом случае говорят, что уравнение инвариантно относительно такой замены). Следовательно, наряду с любыми *гладкими* при $t \leq T$ решениями $u(t, x)$, функции $\tilde{u}(t, x) \equiv u(T-t, -x)$ тоже будут *гладкими* решениями уравнения (5.1). Если же $u(t, x)$ — *обобщенное разрывное* решение уравнения (5.1), то функция $\tilde{u}(t, x)$ **не будет** являться *обобщенным энтропийным* решением рассматриваемого уравнения, так как условие возрастания энтропии такой замены не выдерживает (оно заменяется прямо противоположным), что делает одновременную замену t на $T-t$ и x на $-x$ в этом случае недопустимой.

5.5. Определение обобщенного решения по Кружкову

Выше мы обсудили, какие требования необходимо накладывать на разрывы обобщенных (в смысле интегрального тождества) решений уравнения (5.1). Но ограничения такого рода имеют смысл лишь для кусочно-гладких функций, когда по крайней мере определено, что такое линия разрыва и односторонние пределы при подходе к этой линии. С другой стороны, при определении обобщенного решения $u(t, x)$ этого уравнения в смысле интегрального тождества (5.3) нам необходимо лишь существование соответствующих интегралов, что, конечно же, является намного менее ограничительным требованием, нежели кусочная гладкость функции $u(t, x)$. Поэтому встает вопрос, как дать определение обобщенного решения задачи Коши (5.1)–(5.2), включив в него и интегральное тождество, и условие возрастания энтропии (точнее, некоторое его обобщение, связанное с тем, что мы хотим рассматривать не только кусочно гладкие решения). Ответ на этот вопрос был дан С.Н.Кружковым (см. [8],[9]), причем не только для рассматриваемой нами задачи, а и для более широкого класса уравнений и систем. В этих же работах доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши в смысле данного определения.

Приведем это определение. Наиболее общим пространством обобщенных решений в классе обычных функций является пространство ограниченных измеримых в полосе $\Pi_T = [0, T) \times \mathbb{R}_x$ функций $u(t, x)$.

Определение 5.1. *Ограниченная измеримая в Π_T функция $u(t, x)$ называется обобщенным энтропийным решением (по Кружкову) задачи (5.1)–(5.2), если:*

- Для любой константы $k \in \mathbb{R}$ и для любой пробной функции $\varphi(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $\varphi(t, x) \geq 0$, выполняется неравенство

$$\int_{\Pi_T} [|u - k| \varphi_t + \text{sign}(u - k) (f(u) - f(k)) \varphi_x] dx dt \geq 0. \quad (5.29)$$

- $u(t, x) \rightarrow u_0(x)$ при $t \rightarrow +0$ в пространстве $L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$, то есть для любого отрезка $[a, b]$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_a^b |u(t, x) - u_0(x)| dx = 0.$$

Предложение 5.4. Если функция $u(t, x)$ является обобщенным энтропийным решением в смысле Определения 5.1 задачи (5.1)–(5.2), то она является обобщенным решением уравнения (5.1) в смысле интегрального тождества (5.3).

Доказательство. Так как функция, равная константе k , является классическим, а, следовательно, и обобщенным решением уравнения (5.1), то для любой пробной функции $\varphi(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$ выполнено

$$\int_{\Pi_T} [k\varphi_t + f(k)\varphi_x] dx dt = 0. \quad (5.30)$$

(В последнем равенстве несложно убедиться и непосредственно.)

Возьмем в (5.29) $k > \sup u(t, x)$. Имеем

$$\int_{\Pi_T} [(k - u)\varphi_t + (f(k) - f(u))\varphi_x] dx dt \geq 0$$

для любой функции $\varphi(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $\varphi(t, x) \geq 0$. Принимая во внимание (5.30), заключаем

$$- \int_{\Pi_T} [u\varphi_t + f(u)\varphi_x] dx dt \geq 0. \quad (5.31)$$

Беря $k < \inf u(t, x)$, аналогично получим

$$\int_{\Pi_T} [u\varphi_t + f(u)\varphi_x] dx dt \geq 0. \quad (5.32)$$

Сравнивая неравенства (5.31) и (5.32), приходим к следующему равенству

$$\int_{\Pi_T} [u\varphi_t + f(u)\varphi_x] dx dt = 0 \quad \forall \varphi(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T), \varphi(t, x) \geq 0.$$

Нам и требовалось получить такое интегральное тождество, но для любой (а не только неотрицательной) функции $\varphi(t, x)$ из пространства $C_0^\infty(\Pi_T)$. Поэтому для завершения доказательства остается заметить, что любую функцию $\varphi \in C_0^\infty(\Pi_T)$ можно представить как разность $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ двух неотрицательных пробных функций $\varphi_1(t, x)$ и $\varphi_2(t, x)$; $\varphi_i \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $\varphi_i(t, x) \geq 0$ ($i = 1, 2$). И поскольку соотношение (5.3) имеет место для φ_1 и φ_2 , то это тождество будет выполнено и для φ . \square

Предложение 5.5. Пусть $u = u(t, x)$ — кусочно гладкое обобщенное энтропийное решение уравнения (5.1) в смысле Определения 5.1. Тогда на каждой линии разрыва Γ (задаваемой уравнением $x = x(t)$) выполнено условие допустимости разрыва (5.21) или (5.22).

Доказательство. Зафиксируем точку $(t_0, x_0) \in \Gamma$, $x_0 = x(t_0)$, на линии сильного разрыва Γ . Как всегда обозначим u_{\pm} — односторонние пределы решения $u(t, x)$ при подходе к Γ . Пусть, для определенности, $u_-(t_0, x_0) < u_+(t_0, x_0)$. Зафиксируем произвольное число $k \in (u_-, u_+)$ и выберем малую окрестность $O \subset \Pi_T$ точки (t_0, x_0) , исходя из условий

$$u(t, x) < k \quad \text{при } (t, x) \in O_- \equiv \{(t, x) \in O \mid x < x(t)\}, \quad (5.33)$$

$$u(t, x) > k \quad \text{при } (t, x) \in O_+ \equiv \{(t, x) \in O \mid x > x(t)\}. \quad (5.34)$$

Из (5.29) следует, что для любой пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(O)$, $\varphi(t, x) \geq 0$ выполнено

$$\int_O [|u - k| \varphi_t + \text{sign}(u - k) (f(u) - f(k)) \varphi_x] dx dt \geq 0. \quad (5.35)$$

Представим последний интеграл по области O в виде суммы интегралов по O_- и O_+ . С учетом (5.33)–(5.34) получим

$$\begin{aligned} & - \int_{O_-} [(u - k) \varphi_t + (f(u) - f(k)) \varphi_x] dx dt \\ & + \int_{O_+} [(u - k) \varphi_t + (f(u) - f(k)) \varphi_x] dx dt \geq 0. \end{aligned}$$

Перебросим производные по t и по x в соответствии с формулой интегрирования по частям (4.1). Кроме интегралов по областям O_- и O_+ возникнут интегралы по их границам, то есть по ∂O и по $\Gamma \cap O$. Ввиду финитности φ в O , интеграл по ∂O равен нулю. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{O_-} [u_t + (f(u))_x] \varphi dx dt \\ & - \int_{\Gamma \cap O} ((u_- - k) \cos(\nu, t) + (f(u_-) - f(k)) \cos(\nu, x)) \varphi dS \\ & \quad - \int_{O_+} [u_t + (f(u))_x] \varphi dx dt \\ & - \int_{\Gamma \cap O} ((u_+ - k) \cos(\nu, t) + (f(u_+) - f(k)) \cos(\nu, x)) \varphi dS \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь ν — нормаль к кривой Γ , смотрящая из O_- в O_+ (то есть внешняя для области O_- и внутренняя для O_+). В силу Предложения 5.4 функция $u(t, x)$ является обобщенным (в смысле интегрального тождества) решением уравнения (5.1), а, значит, и классическим решением этого уравнения в каждой из областей O_- и O_+ . Таким образом, в O_- и O_+ выполнено $u_t + (f(u))_x = 0$. Итак, для любой пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(O)$, $\varphi(t, x) \geq 0$ выполнено

$$\int_{\Gamma \cap O} ((2k - u_- - u_+) \cos(\nu, t) + (2f(k) - f(u_-) - f(u_+)) \cos(\nu, x)) \varphi \, dS \geq 0.$$

Это означает, что при всех $k \in (u_-, u_+)$ выполнено

$$(2k - u_- - u_+) \cos(\nu, t) + (2f(k) - f(u_-) - f(u_+)) \cos(\nu, x) \geq 0. \quad (5.36)$$

Как уже отмечалось, $u(t, x)$ — обобщенное (в смысле интегрального тождества) решение уравнения (5.1), а, значит, на линии разрыва Γ выполнено условие Ранкина-Гюгонио (5.13):

$$(u_+ - u_-) \cos(\nu, t) + (f(u_+) - f(u_-)) \cos(\nu, x) = 0 \quad (5.37)$$

Неравенство (5.36) с учетом (5.37) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} & 2[(k - u_-) \cos(\nu, t) + (f(k) - f(u_-)) \cos(\nu, x)] \\ & - [(u_+ - u_-) \cos(\nu, t) + (f(u_+) - f(u_-)) \cos(\nu, x)] \\ & = 2[(k - u_-) \cos(\nu, t) + (f(k) - f(u_-)) \cos(\nu, x)] \geq 0 \end{aligned}$$

для любого $k \in (u_-, u_+)$, что в точности совпадает с условием допустимости разрыва (5.21).

Если же $u_+ < u_-$, то делая аналогичные преобразования при раскрытии модуля и $\text{sign}(u - k)$ в равенстве (5.35), мы получим противоположный знак, и, соответственно, вместо соотношения (5.36) будем иметь

$$(2k - u_- - u_+) \cos(\nu, t) + (2f(k) - f(u_-) - f(u_+)) \cos(\nu, x) \leq 0$$

при всех $k \in (u_+, u_-)$. С учетом (5.37), получаем неравенство

$$\begin{aligned} & 2[(k - u_+) \cos(\nu, t) + (f(k) - f(u_+)) \cos(\nu, x)] \\ & + [(u_+ - u_-) \cos(\nu, t) + (f(u_+) - f(u_-)) \cos(\nu, x)] \\ & = 2[(k - u_+) \cos(\nu, t) + (f(k) - f(u_+)) \cos(\nu, x)] \leq 0, \end{aligned}$$

выполненное для любого $k \in (u_+, u_-)$, что совпадает с (5.22). \square

В заключении покажем, что неравенство (5.29) является следствием метода “исчезающей вязкости”. Действительно, пусть $u(t, x)$ является пределом при $\varepsilon \rightarrow +0$ по норме $L_{1,loc}(\Pi_T)$ классических решений $u^\varepsilon(t, x)$ задачи Коши для уравнения

$$u_t + f'(u)u_x = \varepsilon u_{xx} \quad (5.38)$$

с начальным условием $u(0, x) = u_0(x)$.

Возьмем любую выпуклую вниз функцию $E(u) \in C^2(\mathbb{R})$ и умножим уравнение (5.38) на $E'(u)$. Учитывая

$$\begin{aligned} E'(u)u_t &= \frac{\partial E(u(t, x))}{\partial t}, \\ f'(u)E'(u)u_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_k^{u(t, x)} f'(\xi) E'(\xi) d\xi \right), \\ E'(u)u_{xx} &= (E(u))_{xx} - E''(u)u_x^2, \end{aligned}$$

имеем

$$E_t + \left(\int_k^u f'(\xi) E'(\xi) d\xi \right)_x = \varepsilon (E(u))_{xx} - \varepsilon E''(u)u_x^2 \leq \varepsilon (E(u))_{xx} \quad (5.39)$$

в силу $E''(u) \geq 0$, $\varepsilon > 0$. Умножим теперь неравенство (5.39) на пробную функцию $\varphi(t, x) \geq 0$ из Определения 5.1 и проинтегрируем по Π_T . Применяя формулу интегрирования по частям, перебросим все производные на φ :

$$- \int_{\Pi_T} \left[\varphi_t E(u) + \varphi_x \int_k^u f'(\xi) E'(\xi) d\xi \right] dx dt \leq \varepsilon \int_{\Pi_T} \varphi_{xx} E(u) dx dt$$

В пределе при $\varepsilon \rightarrow +0$ получаем, что

$$\int_{\Pi_T} \left[\varphi_t E(u) + \varphi_x \int_k^u f'(\xi) E'(\xi) d\xi \right] dx dt \geq 0. \quad (5.40)$$

Пусть $\{E_m(u)\}$ — последовательность дважды гладких выпуклых функций, аппроксимирующих функцию $|u - k|$. Подставим $E = E_m(u)$ в неравенство (5.40) и перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty$. Так как $E'_m(\xi) \rightarrow \text{sign}(\xi - k)$, то

$$\begin{aligned}
\int_k^u f'(\xi) E'_m(\xi) d\xi &\longrightarrow \int_k^u f'(\xi) \operatorname{sign}(\xi - k) d\xi \\
&= \operatorname{sign}(u - k) \int_k^u f'(\xi) d\xi \\
&= \operatorname{sign}(u - k) (f(u) - f(k)).
\end{aligned}$$

Таким образом, из (5.40) мы вывели (5.29).

Задача 5.2. *Подробно обоснуйте последний предельный переход.*

Замечание 5.7. В случае выпуклой функции состояния $f(u)$ можно в определении обобщенного энтропийного решения заменить интегральное неравенство (5.29) интегральным тождеством (5.3) и неравенством (5.29), которое должно выполняться хотя бы для одной строго выпуклой энтропии $E(u)$. Единственность такого решения доказана в [10].

Замечание 5.8. Определение обобщенного энтропийного решения на основе неравенства (5.29) остается в силе для многомерного аналога задачи (5.1)–(5.2). При этом $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (f(u))_x \equiv \nabla_x f(u(t, x)), \quad \varphi_x = \nabla_x \varphi,$$

а $(f(u) - f(k)) \varphi_x$ — скалярное произведение $(f(u) - f(k))$ на φ_x . Введенные определения обобщенного решения $u(t, x)$ и набор энтропий $|u - k|$, $k \in \mathbb{R}$, в публикациях часто связывают с именем С.Н.Кружкова (решение в смысле Кружкова). В работах [8], [9] впервые было введено это определение и развита имеющая глубокий физический смысл техника доказательства теорем существования и единственности.

6. Задача Римана о распаде разрыва

В настоящем параграфе мы рассмотрим так называемую задачу о распаде произвольного разрыва (задачу Римана) для уравнения (4.2), то есть будем строить обобщенные решения $u(t, x)$ в полосе $\Pi_T = \{-\infty < x < +\infty, 0 < t < T\}$ следующей задачи:

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x) = \begin{cases} u_- & \text{при } x < 0, \\ u_+ & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

где u_- и u_+ — произвольные константы. Построенные решения будут кусочно гладкими в Π_T функциями, которые на каждой компоненте гладкости удовлетворяют в классическом смысле изучаемому уравнению, на линиях разрыва удовлетворяют условию Ранкина-Гюгонио (4.5) и условию возрастания энтропии. Построенные решения $u(t, x)$ будут стремиться к $u_0(x)$ при $t \rightarrow +0$ везде, кроме точки $x = 0$.

Доказательство теоремы существования и единственности обобщенных (в смысле интегрального тождества и условия возрастания энтропии) решений задачи (6.1) можно найти в [16, Лекции 4-6].

Прежде всего заметим, что исходное уравнение не меняется при замене $x \rightarrow kx, t \rightarrow kt$, начальное условие также переходит в себя при растяжениях $x \rightarrow kx, k > 0$. Кроме того, условие возрастания энтропии инвариантно относительно указанного преобразования. Значит, в силу единственности, при замене переменных $x \rightarrow kx, t \rightarrow kt$, где $k > 0$, функция $u(t, x)$ переходит в себя:

$$u(kt, kx) = u(t, x) \quad \forall k > 0.$$

Это в точности означает, что $u(t, x)$ остается постоянной на всех лучах $x = \xi t, t > 0$, выходящих из начала координат, т.е. является функцией от $\xi = x/t$:

$$u(t, x) = u(x/t), \quad t > 0. \quad (6.2)$$

Решения, зависящие от x/t называются *автомодельными*. У автомодельных решений, в частности, линии разрыва могут быть только лучами, выходящими из начала координат.

Упражнение 6.1. Найти все гладкие в полуплоскости $t > 0$ автомодельные решения уравнений из Упражнения 4.2.

6.1. Уравнение Хопфа

Для начала рассмотрим задачу (6.1) в случае $f(u) = u^2/2$:

$$u_t + uu_x = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x) = \begin{cases} u_- & \text{при } x < 0, \\ u_+ & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Прежде всего опишем все гладкие автомодельные решения уравнения Хопфа. Подставляя (6.2) в уравнение (6.3), получим:

$$-\frac{x}{t^2} u' \left(\frac{x}{t} \right) + \frac{1}{t} u \left(\frac{x}{t} \right) u' \left(\frac{x}{t} \right) = \frac{1}{t} u' \left(\frac{x}{t} \right) \left(u \left(\frac{x}{t} \right) - \frac{x}{t} \right) = 0,$$

т.е. либо $u' = 0$, следовательно $u \equiv C$ — константа, либо $u = x/t$. Таким образом, все гладкие автомодельные решения уравнения Хопфа есть константы и функция x/t .

Наша дальнейшая задача — соединить правильным образом (т.е. с выполнением на лучах разрыва условий Ранкина-Гюгонио и возрастания энтропии) построенные гладкие автомодельные решения так, чтобы удовлетворить начальному условию $u_0(x)$. Прежде всего выясним, по каким лучам можно стыковать различные константы, а также константу и функцию x/t .

Две постоянные функции $u(t, x) \equiv u_1$ и $u(t, x) \equiv u_2$, $u_i = \text{Const}$, как следует из условия Ранкина-Гюгонио (4.5), стыкуются по прямой

$$x = \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1} t = \frac{1}{2} \frac{u_2^2 - u_1^2}{u_2 - u_1} t = \frac{u_2 + u_1}{2} t,$$

причем скачок, из условия допустимости разрыва, возможен только в сторону уменьшения u (при росте x). Таким образом, если для определенности $u_2 > u_1$, то

$$u(t, x) = u_2 \quad \text{при } x < \frac{u_2 + u_1}{2} t, \quad \text{и} \quad u(t, x) = u_1 \quad \text{при } x > \frac{u_2 + u_1}{2} t.$$

Что касается стыковки константы $u(t, x) \equiv u_3 = \text{Const}$ и функции $u(t, x) = x/t$, то если они стыкуются по лучу $x = \xi t$, то предел функции x/t при подходе к этому лучу равен ξ , и из (4.5) следует:

$$\xi = \frac{dx}{dt} = \frac{f(u_3) - f(\xi)}{u_3 - \xi} = \frac{1}{2} \frac{u_3^2 - \xi^2}{u_3 - \xi} = \frac{u_3 + \xi}{2},$$

т.е. $\xi = u_3$. Последнее означает, что полученная функция непрерывна на луче стыковки $x = \xi t = u_3 t$, $t > 0$, и разрыв — слабый.

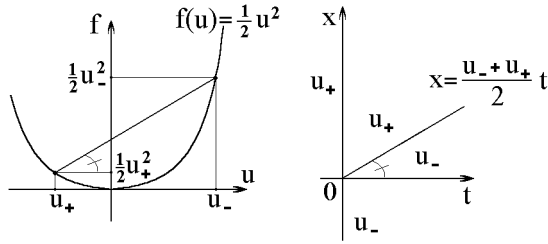


Рис. 17.

Теперь мы можем полностью решить задачу Римана о распаде разрыва для уравнения Хопфа. Здесь возможны две принципиально различные ситуации:

- 1) Если $u_- > u_+$, то решение строится в виде *ударной волны* — двух констант u_- и u_+ , соединенных по лучу $x = \frac{u_- + u_+}{2}t$ в соответствии с условием Ранкина-Гюгонио (см. рис. 17):

$$u(t, x) = \begin{cases} u_- & \text{при } x < \frac{u_- + u_+}{2}t, \\ u_+ & \text{при } x > \frac{u_- + u_+}{2}t. \end{cases} \quad (6.4)$$

Полученный разрыв, как уже отмечалось, является допустимым в смысле условия возрастания энтропии.

- 2) Если $u_- < u_+$, то строить решение в виде ударной волны нельзя, так как получаемый в этом случае разрыв не удовлетворяет условию возрастания энтропии. Здесь на помощь приходит функция x/t , которая по непрерывности стыкуется с константами u_- и u_+ (см. рис. 18):

$$u(t, x) = \begin{cases} u_- & \text{при } x \leq u_-t, \\ x/t & \text{при } u_-t < x < u_+t, \\ u_+ & \text{при } x \geq u_+t. \end{cases} \quad (6.5)$$

Полученное решение непрерывно во всей полуплоскости $t > 0$. Угол $u_-t < x < u_+t$, $t > 0$, в котором происходит сглаживание разрывных начальных условий, называют *областью разрежения*, а само решение (6.5) — *центрированной волной разрежения*.

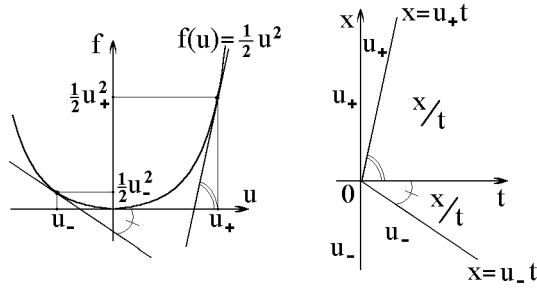


Рис. 18.

Дадим геометрический комментарий к полученным решениям. Построим график функции $f(u) = u^2/2$ в осях (u, f) , параллельных осям (t, x) , и отметим на нем точки $(u_-, u_-^2/2)$ и $(u_+, u_+^2/2)$. Тогда, как уже отмечалось выше, линия разрыва решения (6.4) параллельна отрезку, соединяющему эти точки (см. рис. 17). Обратим внимание и на следующий факт (который, как мы увидим позже, совсем не случаен): линии слабого разрыва решения $u(t, x)$, задаваемого (6.5), — лучи $x = u_- t$ и $x = u_+ t$ — параллельны касательным к графику функции $f(u) = u^2/2$, построенных соответственно в точках $(u_-, f(u_-))$ и $(u_+, f(u_+))$.

Замечание 6.1. При $u_- > u_+$ формула (6.5) не задает функции в полуплоскости $t > 0$.

Задача 6.1. Показать, что в классе автомодельных обобщенных решений задачи (6.3) построенные выше решения (6.4) и (6.5) единственны.

6.2. Случай выпуклой функции состояния

Решение задачи Римана о распаде разрыва (6.1) в ситуации, когда $f(u)$ — выпуклая вниз функция отличается от решения этой задачи в случае уравнения Хопфа (т.е. когда $f(u) = u^2/2$) лишь тем, что вместо непостоянного гладкого автомодельного решения x/t уравнения Хопфа участвует некоторая другая функция $\psi(x/t)$. Найдем ее. Как и выше, подставим (6.2) в (6.1) и получим:

$$-\frac{x}{t^2}u' + \frac{1}{t}f'(u)u' = \frac{1}{t}u'(x/t)(f'(u(x/t)) - x/t) = 0.$$

Таким образом, кроме констант, получаемых из условия $u' = 0$, есть еще одна функция $u(\xi) = \psi(\xi)$ (здесь $\xi = x/t$), являющаяся решением уравнения

$$f'(\psi) = \xi,$$

т.е. ψ — функция, обратная к f' : $\psi = (f')^{-1}$. Она существует, так как f — выпуклая, и следовательно, f' — монотонная функция. Это последнее найденное решение $u = \psi(x/t)$, разрывное в $(0, 0)$ и непрерывное при $t > 0$, называют *волной разрежения*.

Замечание 6.2. В случае уравнения Хопфа у нас и было $f'(u) = u$, а, значит, $\psi(\xi) = (f')^{-1}(\xi) = \xi$.

Решение (6.1) в случае выпуклой вниз функции $f(u)$ будем строить по аналогии с уравнением Хопфа, а именно:

- 1) Если $u_- > u_+$, то решение снова строим в виде ударной волны, стыкуя две константы u_- и u_+ в соответствии с условием Ранкина-Гюгоньо по лучу $\frac{x}{t} = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}$, $t > 0$:

$$u(t, x) = \begin{cases} u_- & \text{при } x < \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}t, \\ u_+ & \text{при } x > \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}t. \end{cases} \quad (6.6)$$

(Сравните с (6.4) и рис. 17.) Полученный сильный разрыв допустим в смысле условия возрастания энтропии.

- 2) Если $u_- < u_+$, то решение вида (6.6) не удовлетворяет условию возрастания энтропии. Тогда, как и при построении (6.5), склеим константы u_- и u_+ с построенным решением $\psi(x/t)$, найдя лучи склейки $x = \xi_- t$ и $x = \xi_+ t$ из условий непрерывности решения на этих лучах: $u_{\pm} = \psi(\xi_{\pm})$, т.е. $\xi_{\pm} = f'(u_{\pm})$:

$$u(t, x) = \begin{cases} u_- & \text{при } x \leq f'(u_-)t, \\ \psi(x/t) & \text{при } f'(u_-)t < x < f'(u_+)t, \\ u_+ & \text{при } x \geq f'(u_+)t. \end{cases} \quad (6.7)$$

Заданная в (6.5) функция корректно определена при $t > 0$, так как функция состояния $f(u)$ выпукла вниз, следовательно, $f'(u)$ монотонно возрастает, и $f'(u_-) < f'(u_+)$ в случае $u_- < u_+$.

Волна разрежения $\psi(x/t)$, как непрерывная при $t > 0$ функция, принимает все возможные значения между u_- и u_+ . В силу определения ψ как функции, обратной к f' , условие $\psi(x/t) = u_0$ равносильно $x = f'(u_0)t$ для любого $u_0 \in [u_-, u_+]$. Итак, некоторое фиксированное значение u_0 волной разрежения $\psi(x/t)$ принимается на луче $x = f'(u_0)t$, $t > 0$, параллельном касательной к графику функции $f = f(u)$, построенной в точке $(u_0, f(u_0))$. В частности, мы получаем доказательство уже отмеченного в случае уравнения Хопфа утверждения: линии слабого разрыва решения $u(t, x)$, задаваемого формулой (6.7) (т.е. лучи $x = f'(u_{\pm})t$) параллельны касательным к графику функции $f = f(u)$, построенным в крайних точках $(u_{\pm}, f(u_{\pm}))$ (см. рис. 18). (Конечно, мы снова предполагаем, что оси (u, f) параллельны осям (t, x) .)

Замечание 6.3. Нам важна выпуклость функции $f(u)$ лишь на отрезке $[u_-, u_+]$ (или $[u_+, u_-]$).

Что касается случая выпуклой вверх (на рассматриваемом отрезке) функции $f(u)$, то решение, в некотором смысле, строится ровно наоборот по сравнению с вышеизложенным, а именно: в случае $u_- < u_+$ мы получаем ударную волну (6.6); если же $u_- > u_+$, то решение задается (6.7) (в этом случае $f'(u)$ убывает, и, следовательно, снова будет выполнено $f'(u_-) < f'(u_+)$). Аккуратно проделайте все выкладки в этом случае самостоятельно:

Задача 6.2. Решить задачу Римана (6.1) в случае произвольной выпуклой вверх функции $f(u)$, построить решение графически (как на рис. 17 и 18), проверить выполнение условия Ранкина-Гюгоньо и условия возрастания энтропии.

Упражнение 6.2. Решить следующие задачи о распаде разрыва:

$$1) \quad u_t - (u^2)_x = 0, \\ u|_{t=0} = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad u|_{t=0} = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ -1 & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$2) \quad u_t + u^2 \cdot u_x = 0, \\ u|_{t=0} = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 2 & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad u|_{t=0} = \begin{cases} 2 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

- 3) $u_t + \cos u \cdot u_x = 0$, $u|_{t=0} = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \pi & \text{при } x > 0, \end{cases}$
 $u|_{t=0} = \begin{cases} \pi & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x > 0 \end{cases}$ и $u|_{t=0} = \begin{cases} \pi & \text{при } x < 0, \\ 2\pi & \text{при } x > 0; \end{cases}$
- 4) $u_t + e^u \cdot u_x = 0$,
 $u|_{t=0} = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}$ и $u|_{t=0} = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x > 0; \end{cases}$
- 5) $u_t + (\ln u)_x = 0$,
 $u|_{t=0} = \begin{cases} e & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}$ и $u|_{t=0} = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ e & \text{при } x > 0. \end{cases}$

6.3. Случай невыпуклой функции состояния

Определение 6.1. Выпуклой вверх оболочкой функции $f(u)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ называют функцию

$$\hat{f}(u) = \inf_{\tilde{f} \in \hat{F}} \tilde{f}(u), \quad u \in [\alpha, \beta],$$

где \hat{F} совокупность всех выпуклых вверх функций $\tilde{f}(u)$ таких, что $\tilde{f}(u) \geq f(u) \quad \forall u \in [\alpha, \beta]$.

Определение 6.2. Выпуклой вниз оболочкой функции $f(u)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ называют функцию

$$\check{f}(u) = \sup_{\tilde{f} \in \check{F}} \tilde{f}(u), \quad u \in [\alpha, \beta],$$

где \check{F} совокупность всех выпуклых вниз функций $\tilde{f}(u)$ таких, что $\tilde{f}(u) \leq f(u) \quad \forall u \in [\alpha, \beta]$.

Замечание 6.4. Если $f(u)$ — выпуклая вверх (вниз) функция на отрезке $[\alpha, \beta]$, то ее выпуклой вверх (вниз) оболочкой на этом отрезке является она сама: $\hat{f}(u) = f(u)$ ($\check{f}(u) = f(u)$), а график ее выпуклой вниз (вверх) оболочки — отрезок, соединяющий точки $(\alpha, f(\alpha))$ и $(\beta, f(\beta))$.

Упражнение 6.3. Построить выпуклую вверх и выпуклую вниз оболочки функции $f(u) = u^3$ на отрезке $[-1, 1]$ и функции $f(u) = \sin u$ на отрезке $[0, 3\pi]$.

Для решения задачи Римана (6.1) в случае $u_- < u_+$ построим выпуклую вниз оболочку функции $f(u)$ на отрезке $[u_-, u_+]$, а в случае $u_- > u_+$ — выпуклую вверх оболочку на отрезке $[u_+, u_-]$. График оболочки состоит из выпуклых (в соответствующую сторону) кусков графиков функции $f(u)$ и отрезков, соединяющих эти куски. Каждый такой отрезок будет соответствовать лучу разрыва (ударной волне) построенного решения между двумя гладкими автомодельными решениями вида $u(t, x) = \psi(x/t)$, где $\psi(\xi)$ — функция, обратная к $\xi = f'(u)$ (см. раздел 6.2). Заметим, что на каждом участке выпуклости $f(u)$ функция, обратная к $f'(u)$, существует.

Пример 6.1. Построим решение следующей задачи Римана:

$$u_t + (u^3)_x = 0, \quad u|_{t=0} = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ -1 & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (6.8)$$

Сначала построим выпуклую вверх (так как $u_- = 1 > -1 = u_+$) оболочку функции $f(u) = u^3$ на отрезке $[-1, 1]$. Для этого опустим касательную из точки $(1, 1)$ на графике рассматриваемой функции к этому графику. Точку касания (u_0, u_0^3) к графику найдем из условия:

$$\frac{1 - u_0^3}{1 - u_0} = f'(u_0) = 3u_0^2, \quad u_0 \neq 1,$$

т.е. $1 + u_0 + u_0^2 = 3u_0^2$, откуда $u_0 = -1/2$. Таким образом, график выпуклой вверх оболочки функции $f(u) = u^3$ на отрезке $[-1, 1]$ состоит (см. рис. 19) из куска кубической параболы на отрезке $[-1, -1/2]$ и отрезка, соединяющего точки $(-1/2, -1/8)$ и $(1, 1)$. Значит, решение поставленной задачи имеет ровно один луч сильного разрыва $x = \xi t$, $t > 0$, параллельный только что построенному отрезку (если, как всегда, оси (t, x) параллельны осям (u, f)), т.е.

$$\xi = \frac{1 + 1/8}{1 + 1/2} = \frac{3}{4}.$$

Этот разрыв идет между константой $u_- = 1$ (со стороны $x < \frac{3}{4}t$) и функцией $\psi(x/t)$. Здесь $\psi(\xi)$ — функция, обратная к $\xi = f'(u) = 3u^2$ на отрезке $[-1, -1/2]$, т.е.

$$u = \psi(\xi) = -\sqrt{\xi/3}, \quad 3/4 \leq \xi \leq 3.$$

Предел решения $u(t, x)$ на луче сильного разрыва $x = \frac{3}{4}t$ со стороны $x > \frac{3}{4}t$ равен $\psi(\frac{3}{4}) = -\frac{1}{2}$. (Это есть следствие $f'(-\frac{1}{2}) = 3(-\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$.)

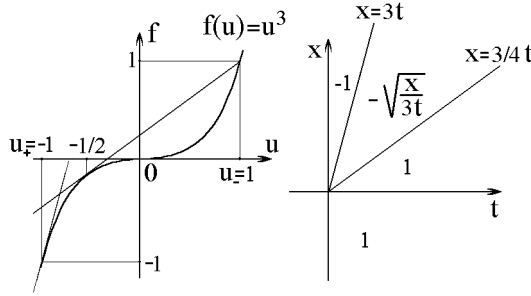


Рис. 19.

Как и в случае выпуклой функции (см. раздел 6.2), стыковка между волной разрежения $\psi(x/t)$ и константой $u_+ = -1$ идет по непрерывности, т.е. по лучу $x = 3t, t > 0$, который опять-таки параллелен касательной к графику функции $f(u) = u^3$, построенной в точке $(u_+, f(u_+)) = (u_+, u_+^3) = (-1, -1)$.

Таким образом, получено решение задачи (6.8):

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < \frac{3}{4}t, \\ -\sqrt{\frac{x}{3t}} & \text{при } \frac{3}{4}t < x < 3t, \\ -1 & \text{при } x \geq 3t. \end{cases}$$

Упражнение 6.4. Построить решение задачи Римана:

$$u_t + u^2 \cdot u_x = 0, \quad u|_{t=0} = \begin{cases} -2 & \text{при } x < 0, \\ 2 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Пример 6.2. Решим следующую задачу о распаде разрыва:

$$u_t + (\sin u)_x = 0, \quad u|_{t=0} = \begin{cases} 3\pi & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Так как $u_- = 3\pi > 0 = u_+$, построим выпуклую вверх оболочку функции $f(u) = \sin u$ на отрезке $[0, 3\pi]$. Эта оболочка состоит (см. рис. 20) из двух выпуклых вверх кусков графика $\sin u$ на отрезках $[0, \pi/2]$ и $[5\pi/2, 3\pi]$ и горизонтального отрезка, соединяющего точки $(\pi/2, 1)$ и $(5\pi/2, 1)$ на синусоиде. Таким образом, искомое решение $u(t, x)$ должно иметь сильный разрыв по прямой $x = 0$ от $5\pi/2 = \lim_{x \rightarrow -0} u(t, x)$ к $\pi/2 = \lim_{x \rightarrow +0} u(t, x)$. Кроме этого,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= 3\pi & \text{при } x < f'(3\pi) \cdot t = \cos 3\pi \cdot t = -t \\ u(t, x) &= 0 & \text{при } x > f'(0) \cdot t = t. \end{aligned}$$

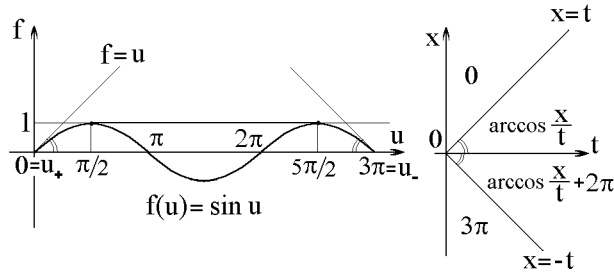


Рис. 20.

Осталось разрешить относительно u уравнение

$$f'(u) = \cos u = \xi = x/t$$

на отрезках $[0, \pi/2]$ и $[5\pi/2, 3\pi]$, где, заметим, функция $f'(u) = \cos u$ монотонна. Решение уравнения $\cos u = \xi$, $-1 \leq \xi \leq 1$, хорошо известно: $u = \pm \arccos \xi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. На отрезке $[0, \pi/2]$ это будет $u = \arccos \xi$, а на отрезке $[5\pi/2, 3\pi]$ — $u = \arccos \xi + 2\pi$. Таким образом, построено решение рассматриваемой задачи (см. рис. 20):

$$u(t, x) = \begin{cases} 3\pi & \text{при } x \leq -t, \\ \arccos x/t + 2\pi & \text{при } -t < x < 0, \\ \arccos x/t & \text{при } 0 < x < t, \\ 0 & \text{при } x \geq t. \end{cases}$$

Решение задачи Римана кардинально изменится, если поменять местами u_+ и u_- .

Пример 6.3.

$$u_t + (\sin u)_x = 0, \quad u|_{t=0} = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 3\pi & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Выпуклая вниз оболочка $\sin u$ на $[0, 3\pi]$ состоит (см. рис. 21) из касательных, опущенных из точек $(0, 0)$ и $(3\pi, 0)$ на выпуклый вниз кусок синусоиды на отрезке $[\pi, 2\pi]$ и куска графика $\sin u$ между точками касания $(u_1, \sin u_1)$ и $(u_2, \sin u_2)$. В силу симметрии легко понять, что $u_1 + u_2 = 3\pi$, $\sin u_1 = \sin u_2$, и тангенсы углов наклона построенных касательных отличаются лишь знаком. Обозначим

$$-k = \frac{f(u_1) - f(0)}{u_1 - 0} = \frac{\sin u_1}{u_1} = f'(u_1) = \cos u_1$$

— тангенс угла наклона касательной, опущенных из точки $(0, 0)$, тогда $+k$ — тангенс угла наклона второй касательной. Сами значения u_1, u_2 и k мы, естественно, найти не можем, а можем лишь сказать, что u_1 — наименьшее положительное решение уравнения $\operatorname{tg} u_1 = u_1$; $u_2 = 3\pi - u_1$, $k = -\cos u_1 = \cos u_2$.

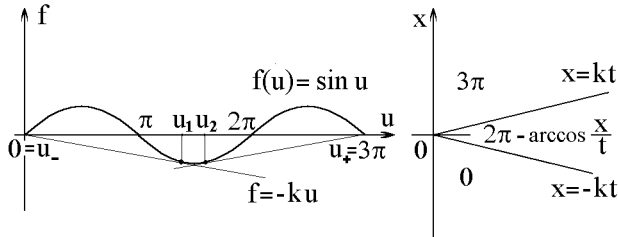


Рис. 21.

На отрезке $[u_1, u_2] \subset [\pi, 2\pi]$ обратим функцию $f'(u) = \cos u$. В этом случае $u = (f')^{-1}(\xi) = 2\pi - \arccos \xi$, $-k \leq \xi \leq k$. Теперь можно записать искомое решение (см. рис. 21):

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -kt, \\ 2\pi - \arccos x/t & \text{при } -kt < x < kt, \\ 3\pi & \text{при } x \geq kt. \end{cases}$$

Построенное решение имеет два разрыва: по прямой $x = -kt$ — скачок от 0 до u_1 ; по прямой $x = kt$ — от u_2 до 3π .

Упражнение 6.5. Построить решение задачи Римана:

$$u_t + \sin(2u) \cdot u_x = 0, \quad u|_{t=0} = \begin{cases} -5\pi/4 & \text{при } x < 0, \\ 5\pi/4 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Заключение

В данном пособии даны основные понятия нелокальной теории задачи Коши для одномерного (по пространственной переменной) квазилинейного закона сохранения вида

$$u_t + (f(u))_x = 0. \quad (\text{A.1})$$

Что касается нелокальной теории для многомерного скалярного уравнения

$$u_t + \operatorname{div}_x f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f(u) \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.2})$$

то ее довольно завершенная форма появилась в конце 60-х годов (см. [8],[9]) в том случае, когда компоненты $f_i(u)$ вектор-функции состояния $f(u)$ удовлетворяют условию Липшица и, следовательно, в теории задачи Коши для уравнения (A.2) имеет место эффект конечной скорости распространения возмущений и конечной области зависимости решения (в данной фиксированной точке (t, x)) от начальных данных.

Новый (современный) всплеск в развитии нелокальной теории уравнений (A.1) и (A.2) связан с включением в рассмотрение случая, когда функция состояния только непрерывна, т.е., вообще говоря, недифференцируема и, следовательно, когда можно ожидать появления типично “параболического — диффузионного” эффекта бесконечной скорости распространения возмущений и бесконечной области зависимости обобщенного энтропийного решения от начальных данных.

Действительно, давайте попытаемся построить обобщенное энтропийное решение задачи Коши

$$u_t + \left(\frac{|u|^\alpha}{\alpha} \right)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (\text{A.3})$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \equiv \frac{[\operatorname{sign}(x+1) - \operatorname{sign} x]}{2} = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 0), \\ 0, & x \notin (-1, 0). \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Так как начальная функция $u_0(x) \geq 0$, то обобщенное энтропийное решение $u(t, x)$ тоже неотрицательно и, следовательно, в (A.1) функция состояния $f(u) \equiv u^\alpha/\alpha$ выпукла вверх на интересующем нас отрезке изменения u . С другой стороны, ввиду специфики структуры (“одноступенчатость”) начальной функции, можно надеяться, что на

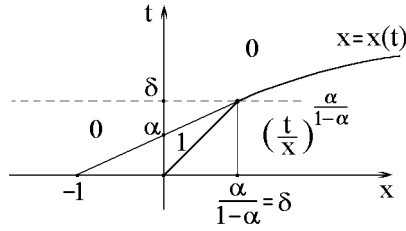


Рис. 22.

достаточно малом отрезке времени $0 \leq t \leq \delta$ обобщенное энтропийное решение рассматриваемой задачи будет определяться решением двух задач Римана с начальными функциями $\text{sign}(x + 1)$ и $\text{sign } x$.

Задача А.3. Убедитесь, что обобщенное энтропийное решение $u(t, x)$ задачи (А.3)–(А.4) для $0 < t < \frac{\alpha}{1-\alpha} = \delta$ задается формулой (см. рис. 22)

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < \frac{t}{\alpha} - 1, \\ 1 & \text{при } \frac{t}{\alpha} - 1 < x \leq t \\ (\frac{t}{x})^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{при } x > t. \end{cases}$$

Задача А.4. Продолжить решение $u(t, x)$ задачи (А.3)–(А.4) в полуплоскость $t > \delta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$. Точнее, найти уравнение линии разрыва $x = x(t)$, положив при $t > \delta$ (см. рис. 22)

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x(t), \\ (\frac{t}{x})^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{при } x > x(t). \end{cases}$$

Таким образом, для начальной функции с компактным носителем обобщенное энтропийное решение $u(t, x)$ задачи (А.3)–(А.4) имеет некомпактный (неограниченный) носитель при любых (сколь угодно малых!) $t < \delta$. Как известно, в теории параболических уравнений (диффузионных процессов) эффект бесконечной скорости распространения возмущений приводит к неединственности решения задачи Коши. Каково влияние такого эффекта на теорию нелокальной разрешимости задачи Коши для уравнения (А.2) в классе ограниченных измеримых функций? Оказывается, что обобщенное энтропий-

ное решение этой задачи существует всегда без каких-либо ограничений на компоненты функции состояния $f_i(u)$. А вот единственность обобщенного энтропийного решения этой задачи (как было впервые получено в [11]) “контролируется” произведением модулей непрерывности $\omega_i(\rho)$ функций $f_i(u)$. Если для любых u, v

$$|f_i(u) - f_i(v)| \leq \omega_i(|u - v|),$$

где $\omega_i(\rho)$ — выпуклая вверх, строго монотонная непрерывная функция, $\omega_i(0) = 0$, то для единственности обобщенного энтропийного решения достаточно, чтобы

$$\Omega(\rho) \equiv \prod_{i=1}^n \omega_i(\rho) \leq \text{Const } \rho^{n-1}. \quad (\text{A.5})$$

Отметим, что для уравнения

$$u_t + \left(\frac{|u|^\alpha}{\alpha}\right)_x + \left(\frac{|u|^\beta}{\beta}\right)_y = 0, \quad 0 < \alpha < \beta < 1,$$

условие (A.5), принимающее в этом случае вид $\alpha + \beta \leq 1$, является необходимым и достаточным для единственности обобщенного энтропийного решения задачи Коши. Заметим, что в случае $n = 1$ какие-либо ограничения на функцию состояния $f(u)$ условие (A.5) не накладывает: единственность обобщенного энтропийного решения имеет место всегда. Заметим также, что в [11] даны достаточно простые доказательства единственности обобщенного энтропийного решения в случае несколько более сильного, чем (A.5), условия $\Omega(\rho) = o(\rho^{n-1})$, $\rho \rightarrow 0$.

Итак, мы видим, что возникшая в 50-х годах нашего века не-локальная теория квазилинейных законов сохранения 1-го порядка интенсивно развивается в наше время: здесь еще много интересных нерешенных задач даже в случае одномерного уравнения (A.2), но особенно актуальна и интересна проблематика таких законов в векторном случае, даже в простейших ситуациях. Действительно, если мы рассмотрим хорошо всем известную “волновую” систему

$$\begin{cases} u_t - v_x = 0 \\ v_t - u_x = 0, \end{cases}$$

с изучения которой начиналась математическая физика в трудах Даламбера и Эйлера, и затем учтем некоторые нелинейные зависимости

в рассматриваемом волновом процессе, заменив линейную функцию состояния v в первом уравнении на некоторую нелинейную зависимость $p(v)$, $p'(v) > 0$, то возникнет так называемая “ p ”-система теории гиперболических систем

$$\begin{cases} u_t - (p(v))_x & = 0 \\ v_t - u_x & = 0, \end{cases}$$

являющаяся, в частности, одной из важных газодинамических моделей. Так вот, в настоящее время ситуация такова, что при любой нелинейности $p(v)$ никто в мире не знает, как определить “правильное” энтропийное обобщенное решение этой системы. Так что малейшее нелинейное возмущение простой линейной системы приводит к труднейшей нерешенной проблеме современного нелинейного анализа. Хотелось бы надеяться, что актуальная, просто формулирующаяся, “ненадуманно” трудная проблематика нелокальной теории квазилинейных законов сохранения привлечет к ней внимание молодых, ищущих исследователей, способных придумать новые нетрадиционные подходы.

Мы благодарим кафедру дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, особенно ее заведующего — академика Ольгу Арсеньевну Олейник — за поддержку наших инициатив по внедрению изложенного выше материала в современную теорию и практику преподавания уравнений с частными производными.

Литература

- [1] Hopf E., *The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$* . Comm. Pure Appl. Math., 3(3), 1950, 201–230.
- [2] Олейник О. А., *О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций*. ДАН СССР, 95(3), 1954, 451–454.
- [3] Тихонов А. Н., Самарский А. А., *О разрывных решениях квазилинейного уравнения первого порядка*. ДАН СССР, 99(1), 1954, 27–30.
- [4] Lax P., *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computations*. Comm. Pure Appl. Math., 7(1), 1954, 159–193.
- [5] Ладыженская О. А., *О построении разрывных решений квазилинейных гиперболических уравнений как пределов решений соответствующих параболических уравнений, когда коэффициент вязкости стремится к нулю*. ДАН СССР, 111(2), 1956, 291–294.
- [6] Олейник О. А., *Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений*. УМН, 12(2), 1957, 3–73.
- [7] Гельфанд И. М., *Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений*. УМН, 14(2), 1959, 87–158.
- [8] Кружков С. Н., *Обобщенные решения задачи Коши в целом для нелинейных уравнений первого порядка*. ДАН СССР, 187(1), 1969, 29–32.
- [9] Кружков С. Н., *Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными*. Матем. сборник, 81(2), 1970, 228–255.
- [10] Панов Е. Ю., *О единственности решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка с одной строго выпуклой энтропией*. Матем. заметки, 55(5), 1994, 116–129.
- [11] Кружков С. Н., Панов Е. Ю., *Консервативные квазилинейные законы первого порядка с бесконечной областью зависимости от начальных данных*. ДАН СССР, 314(1), 79–84.

- [12] Арнольд В. И., *Дополнительные главы обыкновенных дифференциальных уравнений*, Москва: Наука, 1982.
- [13] Арнольд В. И., *Лекции по уравнениям с частными производными*, Москва: Изд-во МК НМУ, 1995.
- [14] Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А., *Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка: обобщенные решения, ударные волны, центрированные волны разрежения. (Краткое учебное пособие)*, Москва: Изд-во мех-мат ф-та МГУ, 1997
- [15] Комеч А. И., *Практическое решение уравнений математической физики (Учебно-методическое пособие для студентов университетов)*, Москва: Изд-во мех-мат ф-та МГУ, 1993
- [16] Кружков С. Н., *Нелинейные уравнения с частными производными (Лекции). Часть 2. Уравнения первого порядка*. Москва: Изд-во МГУ, 1970.
- [17] Филиппов А. Ф., *Сборник задач по дифференциальным уравнениям*, Москва: Наука, 1985.

Горицкий Андрей Юрьевич,
Кружков Станислав Николаевич,
Чечкин Григорий Александрович

**Уравнения с частными производными первого порядка.
(Учебное пособие)**

М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 1999, 96 стр.

Подписано в печать 10.09.1999 г.
Формат 60×90 1/16. Объем 6 п.л.
Заказ 15. Тираж 500 экз.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ
г. Москва, Воробьевы горы.
Лицензия на издательскую деятельность ЛР N 040746,
от 12.03.1996 г.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета и франко-русского центра им. А.М.Ляпунова.