В. А. Палин, Е. В. Радкевич*

ПРИБЛИЖЕНИЕ НАВЬЕ—СТОКСА И ПРОБЛЕМЫ ПРОЕКЦИИ ЧЕПМЕНА—ЭНСКОГА ДЛЯ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Целью этой статьи является исследование проблемы Навье—Стокса приближения кинетических уравнений [17] в терминах так называемой проекции Чепмена—Энскога [3]. Нас будут интересовать свойства проекции Чепмена—Энскога задачи Коши для моментных аппроксимаций кинетических уравнений [1, 2], и прежде всего исследование проекции Чепмена—Энскога для кинетического уравнения Больцмана—Пайерлса (1), для которого динамика фазовой плотности определяется кинетическим уравнением вида

$$\partial_t f + \partial_{k_j} \omega \partial_{x_j} f = S(f). \tag{1}$$

Функция $\omega(k)$ называется дисперсионным соотношением, $\bar{k}$ — волновой вектор. Обычно эта функция неизотропна, зависит от структуры кристалла и от межатомного взаимодействия. Для простоты мы рассмотрим изотропное дисперсионное соотношение

$$\omega(k) = ck, \quad \frac{3}{c^3} = \sum_{\alpha} \frac{1}{c_\alpha^3}, \quad \alpha = l, t_1, t_2, \quad k = \sqrt{(\bar{k}, \bar{k})},$$

где α обозначает три волновые моды со скоростями c_α продольной и двух поперечных волн. Оператор столкновений $S(f)$ учитывает столкновения фононов между собой, с дефектами решетки и границами кристалла. Есть два различных механизма взаимодействия фононов, дающих вклад в оператор столкновений: N- и R-процессы. Оба процесса

**Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 03-01-00189).

сохраняют энергию, нормальный процесс дополнительно сохраняет момент. Таким образом, в нормальном процессе консервативны e и p_j, для R-процесса консервативной величиной является, вообще говоря, только e. Распределение энергии фононов и ее поток определяем соотношениями

$$e(x,t) = \int \hbar\omega(k) f(x,t,\bar{k})\, d\bar{k},$$

$$Q_j(x,t) = \int \hbar\omega(k)\partial_{k_j}\omega(k) f(x,t,\bar{k})\, d\bar{k} = c^2 p_j.$$

Моменты высших порядков $N_{\langle i_1,\ldots,i_M\rangle}$ определяются по аналогии с кинетической теорией газа. Суть подхода Чепмена и Энскога, например, для проекции диффузионного типа состоит в нахождении операторной зависимости неравновесных переменных p_j, $N_{\langle i_1\ldots k\ldots l\ldots i_n\rangle}$ от консервативной величины e. На примере феноменов нелинейной диффузии и так называемой второй скорости звука [4, 7—10] при теплопереносе в диэлектриках на низких температурах мы хотим исследовать условия существования подобной проекции и ее свойства, определяемые механизмом теплопереноса в диэлектриках. В одномерном случае система моментов порядка M кинетического уравнения Больцмана—Пайерлса имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \partial_t e + \partial_x p = 0, \\ \partial_t p + \alpha_1 \partial_x e + \partial_x N_0 + \dfrac{1}{\tau_R} p = 0, \\ \partial_t N_0 + \alpha_2 \partial_x p + \partial_x N_1 + \dfrac{1}{\tau} N_0 = 0, \\ \vdots \\ \partial_t N_{2m-2} + \alpha_{2m}\partial_x N_{2m-3} + \partial_x N_{2m-1} + \dfrac{1}{\tau} N_{2m-2} = 0, \\ \partial_t N_{2m-1} + \alpha_{2m+1}\partial_x N_{2m-2} + \dfrac{1}{\tau} N_{2m-1} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\alpha_j = j^2c^2/(4j^2-1)$.

Но прежде чем приступить к исследованию моментных аппроксимаций кинетического уравнения Больцмана—Пайерлса, постараемся понять природу задач, поставленных физиками.

1.1. Гидродинамическое приближение. Хорошо известно, что системы моментов Грэда [1,2] можно рассматривать не только как аппроксимацию кинетических уравнений, но и как расширение, сглаживание предельных систем и их первых приближений, полученных феноменологическим путем (например, систем уравнений Эйлера газовой динамики, систем уравнений Навье—Стокса или Навье—Стокса—Фурье гидродинамики).

Классической проблемой физической кинетики является вывод уравнений гидродинамики из микроскопического описания (включение уравнений гидродинамики в иерархию систем моментов). Знаменитый метод Чепмена—Энскога [3] дает возможность вычислить решения кинетического уравнения Больцмана как формальные ряды по степеням малого параметра $\varepsilon = 1/\mathrm{Kn}$, Kn — число Кнудсена. Этот параметр отражает пропорцию между средней длиной свободного пробега частицы и шкалой изменения гидродинамических величин — плотности, средней скорости и температуры. Обрыв (усечение) ряда Чепмена—Энскога на членах порядка ε^0 приводит к гидродинамике Эйлера, гидродинамику Навье—Стокса получаем как первую поправку (ε^1), также получаем так называемые Барнет и супер-Барнет гидродинамики, которые отвечают ε^2 и ε^3 соответственно.

Целью введения пост-Навье-Стокс членов является расширение гидродинамического описания за область строго гидродинамического предела $\varepsilon \ll 1$. Однако даже в простейшем режиме — одномерном линейном отклонении от состояния глобального равновесия [1, 17] — система уравнений гидродинамики Барнета нарушает базовые физические условия вывода уравнения Больцмана. А именно достаточно короткие акустические волны неустойчивы (так называемая ультрафиолетовая катастрофа), возрастают по времени вместо затухания, что приводит к противоречию с H-теоремой, в силу которой любое достаточно малое возмущение состояния равновесия должно *затухать*.

Более того, эта ситуация не улучшается в следующем приближении — супер-Барнет. Ультрафиолетовая катастрофа, которая проявляется в низших по порядку усечениях разложения Чепмена—Энскога, приводит к очень серьезным трудностям в решении проблемы расширения гидродинамического описания в области далеко не равновесные [1, 3].

Приближения Эйлера и Навье—Стокса остаются базовыми в гидродинамическом описании, поэтому задача их расширения — одна из центральных открытых проблем кинетической теории.

Что же происходит в аппроксимации Чепмена—Энскога кинетических уравнений? Ссылка на асимптотический характер этого метода неубедительна. В любых «расходимостях» разумных асимптотических методов, как правило, надо искать более глубокие корни, лежащие в характерных свойствах описываемых ими моделей и их структур.

В [16] приводится фольклорная шутка: так называемая «теорема Дорфмана», которая гласит: наиболее интересные расширения в неравновесной статистической физике расходятся. Расходимости позволяют взглянуть на край области применимости модели.

Расходимость в низших по иерархии усечениях формальных разложений далеко не удивительна. Во многих случаях, например в квантовой теории и статистической физике [3], такая ситуация часто улучшается при включении в рассмотрение более далеких членов разложения.

На наш взгляд, констатации этого факта недостаточно. Важно понять, что есть *критерий* «допустимости» усечения: именно он требует внимания и исследования. Таким образом, мы опять приходим к необходимости указания критерия *корректности* отбора допустимых усечений, отбора допустимых систем в иерархии аппроксимаций. Постараемся объяснить возникающие здесь проблемы на примерах.

1.2. Неравновесные переменные. Одна из основных проблем моментной теории описания процессов неравновесной термодинамики связана со специфическими трудностями смешанных задач для систем моментов. Часть неизвестных задачи — неравновесные переменные (моменты высших порядков) — не имеют интуитивного физического смысла. Такие переменные не могут быть определены из эксперимента [1,18]. Тогда что значат для них данные Коши и тем более граничные данные? Это должно учитываться при формулировке смешанной задачи в структуре краевых условий. Каковы в этом случае корректные с физической точки зрения граничные условия?

Сравнительный анализ точных решений задачи Коши кинетических уравнений и их моментных аппроксимаций показывает, что для разумно малой невязки требуется достаточно большое число неравновесных переменных. Например, адекватное описание тепловых процессов в кристаллах [10] обеспечивается не менее чем 40-моментной аппроксимацией кинетического уравнения Больцмана—Пайерлса. Число граничных условий, учитывающих поведение неравновесных переменных в окрестности границы, невелико. Для разреженного газа возможен скачок температуры на стенке, и возможно появление скорости проскальзывания. Впервые граничные условия, описывающие эти феномены, были предложены в [18]. Однако таких условий недостаточно для формулировки полноценных граничных задач. Вопросы же, возникающие при моделировании процессов в окрестности границы, связаны прежде всего с поведением неравновесных переменных в окрестности границы, с их ролью в устойчивости процессов на больших временах. Эти вопросы связаны с исследованием условий устойчивости предельного перехода к смешанной задаче для предельных систем моментных аппроксимаций кинетических уравнений. Например, исследование предельного перехода при $\mathrm{Kn} \to \infty$ или $t \to \infty$ от смешанной задачи моментной аппроксимации кинетического уравнения Больцмана к смешанной задаче для системы уравнений Эйлера газовой динамики.

Итак, экспериментально невозможно контролировать начальные и граничные значения для моментов высших порядков, которые мы назвали неравновесными, в отличие от базовых гидродинамических величин (консервативных величин), имеющих физическую интерпретацию. Предложенный Чепменом и Энскогом подход [3] позволяет остаться в рамках начальных и граничных условий только для консервативных переменных, поскольку суть подхода состоит в нахождении *операторной зависимости неравновесных переменных от базовых, консервативных величин*, т. е. в нахождении *проекции из фазового пространства моментных аппроксимаций в фазовое пространство консервативных переменных*.

Тогда для системы моментов проекции Чепмена—Энскога требуются начальные и краевые условия только в фазовом пространстве консервативных переменных.

В этом параграфе мы остановимся на проекции Чепмена—Энскога *для задачи Коши*. Каковы основные требования к проекции Чепмена—Энскога в этом случае?

1. Проекция системы моментов должна быть *гиперболической системой с релаксацией*, т. е. проекция должна действовать в рамках гиперболических систем с релаксацией: главная часть проекции системы моментов — гиперболическая псевдодифференциальная система первого порядка, и решения задачи Коши для этой системы устойчивы.
2. Псевдодифференциальные операторы проекции Чепмена—Энскога должны иметь порядки *не выше нулевого*.

Чтобы понять природу проекции Чепмена—Энскога, начнем с задачи, для которой она прежде всего была предназначена.

1.3. Метод Чепмена—Энскога. Гидродинамическое приближение. Цель раздела — познакомить читателей со свойствами проекции Чепмена—Энскога и сформулировать проблемы, возникающие при претворении этого подхода в жизнь.

1.4. Приближение Навье—Стокса—Фурье. Рассмотрим одномерную 13-моментную систему Грэда для кинетического уравнения Больцмана

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}(\varrho) + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho v) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \\
\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho v^2 + \frac{k}{m}T\varrho + \sigma\right) = 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(v^2 + 3\frac{k}{m}T\varrho\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho q v^3 + 5\frac{k}{m}T\varrho v + 2\sigma v + 2q\right) = 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2}{3}\varrho v^2 + \sigma\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\varrho v^3 + \frac{4}{3}\frac{k}{m}T\varrho v + \frac{7}{3}\sigma v + \frac{8}{15}q\right) = -B\varrho\sigma, \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho v^3 + 5\frac{k}{m}T\varrho v + 2\sigma v + 2q\right) + \frac{\partial}{\partial x}\biggl(\varrho v^4 + 8\frac{k}{m}T\varrho v^2 + 5\sigma v^2 + \\
+ \frac{32}{5}qv + \frac{k}{m}T\left(5\frac{k}{m}T\varrho + 7\sigma\right)\biggr) = -2B\varrho\left(\frac{2}{3}q + \sigma v\right)
\end{gathered}
\tag{3}
$$

и применим к ней метод Чепмена—Энскога. Здесь базовые гидродинамические переменные: плотность ϱ, скорость v и температура T. Неравновесные переменные: $\sigma = p_{\langle 11\rangle}$ — девиатор давления и q — первая компонента q_1 теплового потока; B используется для обозначения числа Кнудсена Kn.

Чтобы понять природу метода Чепмена—Энскога, для простоты рассмотрим линеаризацию системы (3) около состояния равновесия $\varrho_E = \mathrm{const}$, $v_E = \mathrm{const}$, $T_E = \mathrm{const}$, $\sigma = 0$, $q = 0$.

Перепишем 13-моментную систему в безразмерном виде. Для этой цели введем скорость звука, связанную с выбранным состоянием равновесия:

$$
c_s = \sqrt{\frac{5}{3}\frac{k}{m}T_E}.
$$

Введем безразмерные величины

$$
\begin{gathered}
\hat{t} = \frac{t}{t_E}, \quad \hat{x} = \frac{x}{c_s t_E}, \quad \hat{\varrho} = \frac{\varrho}{\varrho_E}, \quad \hat{v} = \frac{v}{c_s}, \quad \hat{T} = \frac{T}{c_s^2}, \\
\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{\varrho_E c_s^2}, \quad \hat{q} = \frac{q}{\varrho_E c_s^3}.
\end{gathered}
$$

Фиксированное равновесное состояние в безразмерных переменных принимает вид

$$
\hat{\varrho}_E = 1, \quad \hat{v}_E = \mu_E, \quad \frac{k}{m}\hat{T}_E = \frac{3}{5}. \tag{4}
$$

Здесь $\mu_E = v_E/c_s$ — число Маха.

Теперь, следуя процедуре метода Чепмена—Энскога, введем формально малый параметр ε — время релаксации. Заметим, что это равносильно переходу к большим временам [3, 6]. В то же время для разреженного газа $B \gg 1$, поэтому замена $\varepsilon = 1/B$ также соответствует процедуре введения малого параметра в методе Чепмена—Энскога.

Линеаризованную около (4) систему (3) представим в виде

$$\mathcal{A}^x_{13}\partial_x\mathcal{U} + \mathcal{A}^\tau_{13}\partial_\tau\mathcal{U} + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{A}^B_{13}\mathcal{U} = 0, \quad \partial_\tau = \partial_t + \mu_E\partial_x, \tag{5}$$

$$\mathcal{A}^x_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{15} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{2} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}^\tau_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^B_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Вектор $\mathcal{U}$ имеет компоненты $\langle v, \varrho, U, \sigma, q\rangle$, где $U = \frac{k}{m}T - \frac{2}{5}\varrho$.

Убедимся, что и в этом случае разложение Чепмена—Энскога неравновесных переменных является *перегруппировкой* регулярного асимптотического разложения

$$\begin{aligned} \varrho(x,t,\varepsilon) &= \varrho_0(x,t) + \varepsilon\varrho_1(x,t) + \varepsilon^2\varrho_2(x,t) + \ldots, \\ u(x,t,\varepsilon) &= u_0(x,t) + \varepsilon u_1(x,t) + \varepsilon^2 u_2(x,t) + \ldots, \\ U(x,t) &= U_0(x,t) + \varepsilon U_1(x,t) + \varepsilon^2 U_2(x,t) + \ldots, \\ \sigma(x,t,\varepsilon) &= \varepsilon\sigma_1(x,t) + \varepsilon^2\sigma_2(x,t) + \ldots, \\ q(x,t,\varepsilon) &= \varepsilon q_1(x,t) + \varepsilon^2 q_2(x,t) + \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), для первых членов разложений неравновесных переменных выводим

$$\sigma_1 = -\partial_x u_0, \quad q_1 = -\frac{9}{10}\partial_x\varrho_0 - \frac{9}{4}\partial_x U_0 = -\frac{9}{4}\frac{m}{k}\partial_x T_0. \tag{7}$$

Как видно, мы получили соотношения феноменологических законов Навье—Стокса и Фурье. Подставляя (7) в первые три уравнения линеаризованной 13-моментной системы, получим так называемое гидродинамическое приближение Навье—Стокса—Фурье

$$\begin{gathered}\partial_t\varrho_0+\partial_x v_0=0,\quad x\in\mathbb{R}^1,\\ \partial_t v_0+\frac{3}{5}\partial_x\varrho_0+\frac{m}{k}\partial_x T_0=\varepsilon\frac{4}{5}\partial_x^2 v_0,\\ \partial_t\frac{m}{k}T_0+\frac{2}{5}\partial_x v_0=\varepsilon\frac{9}{4}\partial_x^2\frac{m}{k}T_0\end{gathered}$$

линеаризованной системы уравнений Эйлера

$$\begin{gathered}\partial_t\varrho+\partial_x v=0,\quad x\in\mathbb{R}^1,\\ \partial_t v+\frac{3}{5}\partial_x\varrho+\partial_x\frac{m}{k}T=0,\\ \partial_t\frac{m}{k}T+\frac{2}{5}\partial_x v=0.\end{gathered}\tag{8}$$

Проверим, устойчива ли задача Коши приближения (7) — так называемого приближения Навье—Стокса. Дисперсионное уравнение задачи Коши имеет вид

$$\begin{gathered}\mathcal{P}_{NS}=\det\begin{pmatrix}\tau & \xi & 0\\ \frac{3}{5}\xi & \tau-\varepsilon\frac{4}{5}i\xi^2 & \xi\\ 0 & \frac{2}{5}\xi & \tau-\varepsilon\frac{9}{4}i\xi^2\end{pmatrix}=\\ =P_0(\tau,\xi)-i\varepsilon\xi^2\gamma_1P_1(\tau,\xi)-\varepsilon^2\xi^4\gamma_2P_2(\tau,\xi)=0,\\ P_0(\tau,\xi)=\tau(\tau^2-\xi^2),\quad P_1(\tau,\xi)=\tau^2-\frac{27}{61},\quad P_2(\tau,\xi)=\tau,\\ \gamma_1=\frac{9}{5},\quad \gamma_2=\frac{61}{20}.\end{gathered}$$

Мы получили строго гиперболический пучок из трех полиномов, у которого корни соседних полиномов строго разделяют друг друга. В [12] доказано, что такой пучок устойчив, т. е. мнимые части его корней положительны $\operatorname{Im}\tau_j(\xi)>0$, $j=1,2,3$. Отметим, что полином P_0 — характеристический полином линеаризованной системы Эйлера (8).

1.5. Ультрафиолетовая катастрофа. Теперь исследуем на устойчивость гидродинамическое приближение — так называемое приближение Барнета. На втором шаге алгоритма Чепмена—Энскога найдем следующие члены в разложении неравновесных переменных:

$$\begin{gathered}\sigma_2=-\partial_t\sigma_1-\frac{4}{5}\partial_x v_1-\frac{8}{15}\partial_x q_1=\frac{4}{5}\partial_x^2 v_0-\frac{4}{5}\partial_x v_1+\frac{6}{5}\partial_x^2\frac{m}{k}T_0,\\ q_2=-\frac{3}{2}\left(\partial_t q_1+\frac{3}{5}\partial_x\frac{m}{k}T_1+\frac{3}{5}\partial_x\sigma_1\right)=\frac{27}{8}\partial_x^2\frac{m}{k}T_0-\frac{9}{4}\partial_x\frac{m}{k}T_1-\frac{18}{25}\partial_x^2 v_0.\end{gathered}$$

Отсюда получаем приближение Барнета неравновесных переменных

$$\sigma(x,t,\varepsilon) = -\frac{4}{5}\varepsilon\partial_x v + \varepsilon^2\left(\frac{4}{5}\partial_x^2 v + \frac{6}{5}\partial_x^2\frac{m}{k}T\right) + O(\varepsilon^3),$$
$$q(x,t,\varepsilon) = -\varepsilon\frac{9}{4}\partial_x T + \varepsilon^2\left(\frac{27}{8}\partial_x^2\frac{m}{k}T - \frac{18}{25}\partial_x^2 v\right) + O(\varepsilon^3)$$

и аппроксимацию Барнета линеаризованной системы уравнений Эйлера

$$\partial_t\varrho + \partial_x v = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$
$$\partial_t v + \frac{3}{5}\partial_x\varrho + \partial_x\frac{m}{k}T = \varepsilon\partial_x^2\left(\frac{4}{5}v - \varepsilon\frac{4}{5}\partial_x v - \varepsilon\frac{6}{5}\partial_x\frac{m}{k}T\right),$$
$$\partial_t\frac{m}{k}T + \frac{2}{5}\partial_x v = \varepsilon\partial_x^2\left(\frac{9}{4}\frac{m}{k}T - \varepsilon\frac{27}{8}\partial_x\frac{m}{k}T + \varepsilon\frac{18}{25}\partial_x v\right).$$

Дисперсионное уравнение приближения Барнета

$$\mathcal{P}_B = \det\begin{pmatrix} \tau & \xi & 0 \\ \frac{3}{5}\xi & \tau - \varepsilon\frac{4}{5}i\xi^2 - \varepsilon^2\frac{4}{5}\xi^3 & \xi - \varepsilon^2\frac{6}{5}\xi^3 \\ 0 & \frac{2}{5}\xi + \varepsilon^2\frac{18}{25}\xi^3 & \tau - \varepsilon\frac{9}{4}i\xi^2 - \varepsilon^2\frac{27}{8}\xi^3 \end{pmatrix} =$$
$$= \mathcal{P}_{NS} - \frac{167}{40}\varepsilon^2\tau^2\xi^3 + i\frac{9}{2}\varepsilon^3\tau\xi^5 + \frac{27}{10}\varepsilon^4\tau\xi^6 = 0$$

неустойчиво на высоких частотах. Таким образом, мы получили так называемую *ультрафиолетовую катастрофу* [1, 16, 18] гидродинамического приближения Барнета, в то время как система моментов (5) устойчива.

Продолжая этот алгоритм, группируя члены в регулярной асимптотике решений 13-моментной системы, мы получаем цепочку приближений Чепмена—Энскога неравновесных переменных и соответствующую им иерархию гидродинамических приближений высших порядков. Наша задача — исследовать условия устойчивости цепочки гидродинамических приближений. Эффект ультрафиолетовой катастрофы порождает массу вопросов.

1. Как соотносятся полиномиальные пучки дисперсионных уравнений гидродинамических приближений и полиномиальный пучок дисперсионного уравнения 13-моментной системы? Как связаны их корни?
2. Если неустойчивы пост-Навье-Стокс-Фурье приближения, будут ли равномерно устойчивы полиномиальные пучки дисперсионных

уравнений гидродинамических приближений достаточно высокого порядка?

3. В чем природа неустойчивости пост-Навье-Стокс-Фурье приближений? Как соотносится устойчивость систем моментов и неустойчивость их пост-Навье-Стокс-Фурье приближений?

Структура полиномов цепочки достаточно сложна. Попробуем ее упростить. Сравним полученные результаты с разложением Чепмена—Энскога для более простого кинетического уравнения Больцмана—Пайерлса с одной консервативной (базовой) переменной.

§ 2. УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА—ПАЙЕРЛСА

Целью этого параграфа является исследование проекции Чепмена—Энскога на примере феноменов нелинейной диффузии и так называемой второй скорости звука [4—10] при теплопереносе в диэлектриках на низких температурах.

2.1. Газ фононов. Фононный процесс переноса тепла интерпретируется аналогично процессу переноса в обычном газе, но с некоторыми оговорками. Наиболее важные различия с обычным газом таковы.

1. Фононы могут образовываться и исчезать при взаимодействии. Распределение числа фононов во времени и в пространстве определяется локальной температурой в точке (x, t).
2. При взаимодействии фононов сохраняется энергия, в то время как момент, вообще говоря, не сохраняется. Поэтому фононы называют квазичастицами.

Для газа фононов известно три механизма переноса энергии.

1. Энергия переносится баллистик-фононами, которые не взаимодействуют при движении в кристалле, сохраняя энергию.
2. Энергия распространяется так называемым вторым звуком, если есть взаимодействие фононов, при котором сохраняется момент. Это подобно звуковой волне в обычном газе, которая передается при сохранении энергии и момента сталкивающихся частиц. В силу такой похожести этот механизм переноса называется *вторым звуком*.
3. Энергия переносится диффузией при рассеянии на дефектах решетки и примесях в кристалле, когда в большинстве случаев при

взаимодействии фононы не сохраняют квазимомент. Аналог обычного теплопереноса: теплоперенос затухает через очень короткое время.

2.2. Кинетическое уравнение Больцмана—Пайерлса. В своих построениях Пайерлс отталкивался от классической теории удельной теплоты для диэлектрических твердых тел. Хорошо известно, что в предположении о гармоничности межатомных потенциалов в кристаллах вибрации атомов около их состояний равновесия могут быть представлены как собственные колебания или собственные моды. Тогда N атомов определяют $3N$ собственных мод с частотами ω_s, $s = 1, \ldots, 3N$. Возможная энергия каждой моды дается соотношением

$$e_s = \left(n_s + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_s, \quad n_s = 0, 1, 2, \ldots,$$

здесь $\hbar$ — постоянная Планка, n_s — число s-мод кванта энергии $\hbar\omega_s$. В интерпретации фононов будем говорить, что есть n_s фононов с энергией $\hbar\omega_s$. Фононы ведут себя как частицы, подчиненные статистике Бозе.

Эта модель достаточна для описания свойств термодинамического равновесия, таких, как удельная теплота в кристаллах [4—9]. Однако такая модель не дает удовлетворительного описания неравновесных процессов, которые включают неоднородные поля и требуют явной локализации фононов в пространстве. Используя представление собственных мод, Пайерлс показал, что волны со смежными волновыми векторами в объеме $[\bar{k}, \bar{k} + \Delta\bar{k}]$ могут быть представлены в форме волновых пакетов, локализованных в пространственном объеме $[x, x+\Delta x]$, для которого $|\Delta\bar{k}|\delta x| = 2\pi$. Каждый такой пакет содержит некоторое число фононов с энергией $\hbar\omega(k)$.

Функция $\omega(k)$ называется дисперсионным соотношением. Она обычно неизотропна, зависит от структуры кристалла и от межатомного взаимодействия. Даже для простейших решеток определение этой функции достаточно сложно. Для расчетов часто используют простейшее изотропное дисперсионное соотношение

$$\omega_\alpha(k) = c_\alpha k, \quad \alpha = l, t_1, t_2, \quad k = \sqrt{(\bar{k}, \bar{k})},$$

где α обозначает три волновые моды со скоростями c_α продольной и двух поперечных волн. Хорошо известно, что волновые пакеты распространяются с групповой скоростью $\partial\omega/\partial k$. То же верно для соответствующих фононов.

Для наших целей достаточно иметь дело с моделью фононов Дебая (Debye) [9], которая учитывает только одну представительную моду с дисперсионным соотношением $\omega = ck$, где

$$\frac{3}{c^3} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{c_\alpha^3}.$$

Отталкиваясь от этих рассмотрений, Пайерлс предположил, что неравновесные свойства кристаллов могут быть описаны по аналогии с кинетической теорией газа. Пространство состояний фононов определяется моментом фонона $\hbar\bar{k}$, его положением x, t в пространстве и времени и фазовой плотностью $f(x, t, \bar{k})$, определяющей число фононов в окрестности x и $\bar{k}$ в момент времени t. Временная динамика фазовой плотности определяется кинетическим уравнением Больцмана—Пайерлса

$$\partial_t f + \partial_{k_j}\omega\partial_{x_j} f = S(f).$$

Оператор столкновений $S(f)$ учитывает столкновения фононов между собой, с дефектами решетки и границами кристалла. Напомним, что есть два различных механизма взаимодействия фононов, дающих вклад в оператор столкновений: N- и R-процессы. Оба этих процесса сохраняют энергию, и нормальный процесс сохраняет момент. Соответствующие вклады в S обозначаются через $S_N(f)$ и $S_R(f)$. Тогда

$$S(f) = S_N(f) + S_R(f),$$
$$\int \hbar\omega S_N(f)\, d\bar{k} = \int \hbar\omega k_j S_N(f)\, d\bar{k} = 0, \quad \int \hbar\omega S_R(f)\, d\bar{k} = 0,$$

но может быть

$$\int \hbar\omega k_j S_R(f)\, d\bar{k} \neq 0.$$

Следовательно, в нормальном процессе консервативны e и p_j, для R-процесса консервативной величиной является, вообще говоря, только e.

Тогда распределение энергии фононов и ее поток определяем соотношениями

$$e(x, t) = \int \hbar\omega(k) f(x, t, \bar{k})\, d\bar{k},$$
$$Q_j(x, t) = \int \hbar\omega(k)\partial_{k_j}\omega(k) f(x, t, \bar{k})\, d\bar{k} = c^2 p_j.$$

Моменты высших порядков определяются по аналогии с кинетической теорией газа.

2.3. Моментные аппроксимации кинетического уравнения Больцмана—Пайерлса. Как показали численные исследования модели фононов и сравнительный анализ их с экспериментом [7—9], гиперболические системы с релаксацией, определяемые системами моментов кинетического уравнения Больцмана—Пайерлса, служат превосходным инструментом для описания теплопереноса в кристаллах. В частности, в [9] дан ответ на вопрос о числе неравновесных переменных (числе уравнений моментной аппроксимации кинетического уравнения), требуемых для удовлетворительного описания экспериментов: в одномерном случае требуется не менее *40 уравнений*.

Однако, как мы уже отмечали, включение моментов высокого порядка, не имеющих прямой физической интерпретации, порождает проблему с выбором начальных и граничных условий. Подход Чепмена—Энскога [3] позволяет остаться в рамках начальных и граничных условий только для базовых переменных, поскольку суть его состоит в нахождении операторной зависимости неравновесных переменных от консервативных величин. Так, например, для задачи Коши для трехмоментной системы газа фононов (одномерный случай)

$$
\begin{gathered}
\partial_t \tilde{e} + \partial_x p = 0, \quad \tilde{e} = \frac{e}{c^2}, \\
\partial_t p + \alpha_1 \partial_x e + \partial_x N + \frac{1}{\tau_R} p = 0, \\
\partial_t N + \alpha_2 \partial_x p + \frac{1}{\tau} N = 0, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_N} + \frac{1}{\tau_R},
\end{gathered}
\tag{9}
$$

с одной консервативной переменной $\tilde{e}$ для диффузионного процесса исследуются условия представления вида

$$
p = q(\partial_x)\tilde{e}, \quad N = \mu(\partial_x)\tilde{e}.
$$

Здесь $\tau_R > 0$ и $\tau_N > 0$ — времена релаксации RN- и N-нормального процессов соответственно, $\alpha_1 = c^2/3$, $\alpha_2 = 4c^2/(15)$, c — скорость звука Дебая [9]; μ, q — псевдодифференциальные операторы порядка не выше нулевого.

§ 3. ПРОЕКЦИЯ ЧЕПМЕНА—ЭНСКОГА

Теперь определим классическую проекцию Чепмена—Энскога для системы (9). Для этого рассмотрим систему на больших временах, т. е.

введем в систему малый параметр $\varepsilon > 0$:

$$\begin{gathered}\partial_t \tilde{e} + \partial_x p = 0,\\ \partial_t p + \alpha_1 \partial_x \tilde{e} + \partial_x N + \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\tau_R} p = 0,\\ \partial_t N + \alpha_2 \partial_x p + \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\tau} N = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Будем искать разложение Чепмена—Энскога вида

$$\begin{aligned} p = q(\varepsilon\partial_x) = \varepsilon q_1(\partial_x)\tilde{e} + \varepsilon^2 q_2(\partial_x)\tilde{e} + \ldots,\\ N = \mu(\varepsilon\partial_x) = \varepsilon \mu_1(\partial_x)\tilde{e} + \varepsilon^2 \mu_2(\partial_x)\tilde{e} + \ldots\end{aligned} \tag{11}$$

Подставив (11) в (10) и приравняв члены при разных степенях ε, получим первые операторные соотношения

$$q_1 = -\tau_R\alpha_1\partial_x, \quad q_3 = -\tau\partial_x\mu_2 + \partial_x q_1^2 = -(\tau^2\tau_R\alpha_2\alpha_1 + \alpha_1^2\tau_R^2)\partial_x^2,$$

откуда следуют так называемые Навье-Стокс и пост-Навье-Стокс приближения кинетического уравнения Больцмана—Пайерлса

$$\begin{gathered}\partial_t\tilde{e} = \varepsilon\tau_R\alpha_1\partial_x^2\tilde{e},\\ \partial_t\tilde{e} = \varepsilon\tau_R\alpha_1\partial_x^2\tilde{e} + \varepsilon^3(\tau^2\tau_R\alpha_2\alpha_1 + \alpha_1^2\tau_R^2)\partial_x^3\tilde{e}.\end{gathered}$$

Первое устойчивое, второе и следующие — неустойчивые, в то время как система моментов (9) устойчива. Ее дисперсионное уравнение

$$\begin{gathered}\mathcal{D}_3 = \omega\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)\left(\omega - \frac{i}{\tau_R}\right) - \xi^2\left((\alpha_1+\alpha_2)\omega - \alpha_1\frac{i}{\tau}\right) =\\ = P_0 - i\gamma_1 P_1 - \gamma_2 P_2 = 0,\\ P_0 = \omega(\omega^2 - (\alpha_1+\alpha_2)\xi^2), \quad P_1 = \omega^2 - \alpha_1\frac{\tau_R}{\tau+\tau_R}\xi^2, \quad P_2 = \omega,\\ \gamma_1 = \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_R}\right), \quad \gamma_2 = \frac{1}{\tau\tau_R},\end{gathered} \tag{12}$$

удовлетворяет условиям устойчивости гиперболических пучков [9,10]:

1) полиномы пучка P_0, P_1, P_2 гиперболические;
2) корни соседних полиномов пучка строго разделяют друг друга.

Такая ситуация часто встречается в квантовой и статистической физике. Для устойчивости аппроксимации обычно надо брать достаточно много членов разложения. Вопрос в том — *сколько*?

3.1. Регулярное разложение. Квантование. Исследуем регулярное разложение

$$\begin{aligned} \tilde{e} &= \tilde{e}_0 + \varepsilon \tilde{e}_1 + \ldots, \\ p &= \varepsilon p_1 + \ldots, \\ N &= \varepsilon p_1 + \ldots \end{aligned}$$

Подставим эти разложения в (10). Первые 20 членов разложения группируются в следующие выражения:

$$\begin{aligned} p_\varepsilon &= \partial_x q_N(-\varepsilon^2 \partial_x^2) \tilde{e}_\varepsilon, \\ N_\varepsilon &= \partial_x^2 \mu_{N-1}(-\varepsilon^2 \partial_x^2) \tilde{e}_\varepsilon, \end{aligned} \tag{13}$$

где q_N, μ_N — ряды Тейлора символов операторов $q(-\partial_x^2)$, $\mu(-\partial_x^2)$ — псевдодифференциальных операторов порядка -2 и 0 соответственно. Таким образом, просматривается квантование: порядок момента соответствует порядку оператора проекции Чепмена—Энскога. Покажем, что (13) реализуется.

3.2. Проекция Чепмена—Энскога диффузионного типа. Теперь рассмотрим проекцию Чепмена—Энскога для системы (9). Проекцию будем искать в виде

$$\begin{aligned} p &= \partial_x q(-\partial_x^2) \tilde{e}, \\ N &= \partial_x^2 \mu(-\partial_x^2) \tilde{e}. \end{aligned} \tag{14}$$

Положим $M = \xi^2 \mu(\xi^2)$, $Q = \xi^2 q(\xi^2)$. Тогда из уравнений (9) в образах Фурье получим алгебраические уравнения для символов операторов проекции

$$M = -\alpha_2 Q \left(Q + \frac{1}{\tau} \right)^{-1},$$

$$Q \left(Q + \frac{1}{\tau_R} \right) \left(Q + \frac{1}{\tau} \right) + \xi^2 \left((\alpha_1 + \alpha_2) Q + \alpha_1 \frac{1}{\tau} \right) = 0. \tag{15}$$

Очевидно, замена $Q = i\omega$ переводит уравнение (15) в дисперсионный полином (12). Условие существования вещественного решения уравнения для производящей функции Q с условием $Q(0) = 0$ выписывается чрезвычайно просто:

$$\frac{\tau}{\tau_R} > \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}. \tag{16}$$

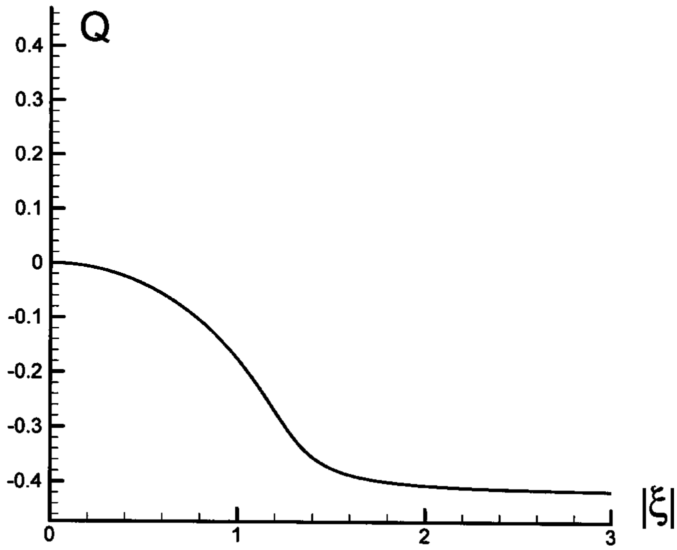

Рис. 1

Здесь мы воспользовались тем, что, из физических соображений, $\tau_R >$ $> \tau$. Условие (16) определяет окно допустимых параметров τ_R, τ. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 3.1. *В окне параметров* (16) *существует гладкая ограниченная стабилизирующаяся на бесконечности при* $|\xi| \to \infty$ *ветвь* $Q(|\xi|^2)$ *корня уравнения*

$$Q\left(Q + \frac{1}{\tau_R}\right)\left(Q + \frac{1}{\tau}\right) + \xi^2\left((\alpha_1 + \alpha_2)Q + \alpha_1\frac{1}{\tau}\right) = 0,$$

такая, что $Q(0) = 0$, $Q'(0) \neq 0$ (*рис.* 1).

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 3.1. *В окне параметров* (16) *существует проекция Чепмена—Энскога диффузионного типа* (14) *системы моментов* (9) *в фазовое пространство консервативной переменной* $\tilde{e}$. *Задача Коши для проекции системы* (9) (*фактор уравнение проекции Чепмена—Энскога*) *имеет следующий вид*:

$$\partial_t \tilde{e}(t,\xi) - Q(-\partial_x^2)\tilde{e} = 0,$$
$$\tilde{e}|_{t=0} = \tilde{e}_0(x).$$

Из свойств производящей функции Q следует устойчивость этого уравнения.

3.3. Проекция Чепмена—Энскога погранслойного типа. Вторая скорость звука. Теперь рассмотрим окно параметров, противоположное рассмотренному выше, т. е. будем считать, что для системы (9) справедливо следующее соотношение на времена релаксации (τ_R, τ):

$$\frac{\tau}{\tau_R} < \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}. \tag{17}$$

Проекцию будем искать в виде

$$N = \partial_x q(-\partial_x^2)p + \sigma(-\partial_x^2)e. \tag{18}$$

Проведя в этом случае построения, аналогичные приведенным выше, получим

$$\Sigma = -\frac{\alpha_1 \xi^2 Q}{Q + \frac{1}{\tau}},$$
$$Q\left(Q + \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_R}\right)\left(Q + \frac{1}{\tau}\right) + \xi^2\left[(\alpha_1 + \alpha_2)Q + \alpha_2 \frac{1}{\tau}\right] = 0, \tag{19}$$

где $\Sigma(\xi^2) = \xi^2 \sigma(\xi^2)$, $Q(\xi^2) = \xi^2 q(\xi^2)$. Тогда справедливо следующее предложение.

Предложение 3.2. *В окне параметров* (17) *существует вещественная гладкая ограниченная стабилизирующаяся на бесконечности при $|\xi| \to \infty$ ветвь $Q(|\xi|^2)$ корня уравнения*

$$Q\left(Q + \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_R}\right)\left(Q + \frac{1}{\tau}\right) + \xi^2\left[(\alpha_1 + \alpha_2)Q + \alpha_2 \frac{1}{\tau}\right] = 0,$$

такая, что $Q(0) = 0$, $Q'(0) \neq 0$ (рис. 2).

Таким образом, вещественное ограниченное решение этого уравнения, такое, что $Q(0) = 0$, существует в окне параметров (17). Замена

$$Q + \frac{1}{\tau} = -i\omega$$

переводит уравнение для производящей функции (19) в дисперсионное уравнение (12). Таким образом, необходимым и достаточным условием существования проекции вида (18) является существование чисто мнимой ограниченной ветви корня (однопараметрической кривой $\omega(|\xi|)$)

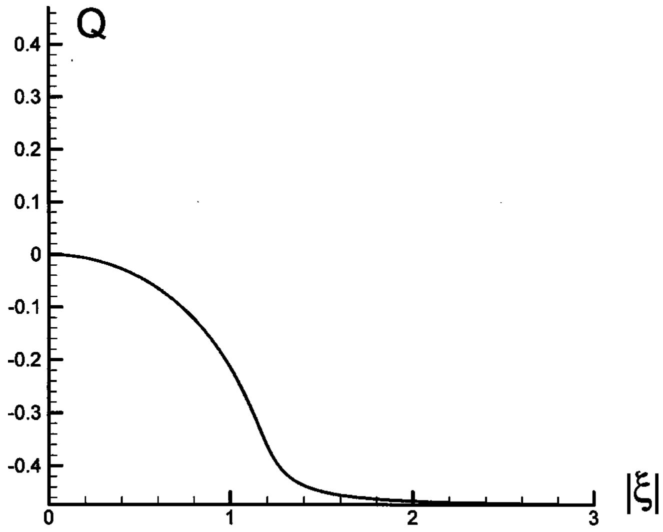

Рис. 2

дисперсионного уравнения погранслойного типа. В дальнейшем *спектром* моментного представления оператора столкновений будем называть корни дисперсионного уравнения $\mathcal{D}|_{\xi=0} = 0$ системы моментов при $\xi = 0$. Кратность нулевой точки спектра равна числу N_c законов сохранения в системе моментов, т. е. числу термодинамических базовых переменных. В нашем случае $\mathcal{D}|_{\xi=0} = (\omega - i/\tau_R)(\omega - i/\tau)\omega = 0$, спектр состоит из $\{0, i/\tau_R, i/\tau\}$ и $N_c = 1$. Ветви корня дисперсионного уравнения $\omega_b(\xi)$ будем называть ветвями погранслойного типа, если они стартуют из ненулевых точек спектра представления оператора столкновений, т. е. $\omega_b|_{\xi=0} \neq 0$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *В окне параметров* (17) *существует проекция Чепмена—Энскога второй скорости звука* (18) *системы моментов* (9) *в фазовое пространство величин $\tilde{e}$, p. Фактор-система проекции*

$$\begin{gathered} \partial_t \tilde{e} + \partial_x p = 0, \\ \partial_t p + (\alpha_1 + \sigma)\partial_x \tilde{e} + \left(\frac{1}{\tau_R} - Q\right) p = 0, \end{gathered} \tag{20}$$

является гиперболической псевдодифференциальной системой первого порядка с релаксацией.

Действительно, система проекции (20) в силу свойств производящей функции Q является гиперболической псевдодифференциальной системой первого порядка с релаксацией. Ее дисперсионное уравнение

$$\omega\left(\omega - i\left(\frac{1}{\tau_R} - Q\right)\right) - (\alpha_1 + \sigma)\xi^2 = 0 \tag{21}$$

определяет устойчивый гиперболический пучок, если

$$\begin{gathered} \alpha_1 + \sigma(|\xi|^2) > 0, \\ \frac{1}{\tau_R} - Q(|\xi|^2) > 0 \quad \forall |\xi| \geqslant 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Второе условие — очевидное следствие неотрицательности производящей функции Q. Относительно первого условия заметим, что из монотонности Q следует монотонное возрастание функции σ, предельное значение которой $\sigma^\infty = \alpha_2$ и $\sigma(0) = 0$. Таким образом, σ — это положительная функция типа кинка, и первое неравенство в (22) также очевидно.

Нетрудно убедиться, что уравнение (21) можно получить делением дисперсионного уравнения (12) первоначальной системы на

$$\omega - i\left(Q + \frac{1}{\tau}\right),$$

т. е. оно является *факторизацией* (12) по погранслойному корню

$$\omega_b = i\left(Q + \frac{1}{\tau}\right).$$

Замечание (вторая скорость звука для нормального процесса, $\tau_R = \infty$). Нетрудно видеть, что предельным переходом $\tau_R \to \infty$ (одномерный случай) мы получим аналогичные результаты для системы трех моментов N-процесса с двумя законами сохранения для уравнения Больцмана—Пайерлса. В одномерном случае система имеет вид

$$\begin{gathered} \partial_t e + \partial_x p = 0, \\ \partial_t p + \alpha_1 \partial_x e + \partial_x N = 0, \\ \partial_t N + \alpha_2 \partial_x p + \frac{1}{\tau} N = 0. \end{gathered} \tag{23}$$

Дисперсионное уравнение этой системы:

$$\omega^2\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right) - \xi^2\left[\alpha_1\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)\alpha_2\omega\right] = 0.$$

Предельный переход в (12) определяет уравнение для производящей функции

$$Q\left(Q+\frac{1}{\tau}\right)+\xi^2\left[\alpha_2\left(Q+\frac{1}{\tau}\right)+\alpha_1 Q\right]=0$$

проекции Чепмена—Энскога

$$N=\partial_x q(-\partial_x^2)p+\sigma(-\partial_x^2)\tilde{e}$$

системы моментов (23) в фазовое пространство переменных $(\tilde{e},p)$. Очевидно существование диффузионного решения безо всяких ограничений на параметр τ. Тогда $Q(\infty)=-\alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2)\tau$. Фактор дисперсионного уравнения по корню погранслойного типа

$$\mathcal{D}_{N,3}=\left(\omega-i\left(Q+\frac{1}{\tau}\right)\right)\left(\omega^2+iQ\omega+\frac{\alpha_1}{\tau}\,\frac{\xi^2}{(Q+\frac{1}{\tau})}\right). \tag{24}$$

Проекция системы (23) в фазовое пространство консервативных термодинамических величин $\tilde{e}$, p имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\partial_t\tilde{e}+\partial_x p=0,\\ \partial_t p+(\alpha_1+\sigma(-\partial_x^2))\partial_x\tilde{e}-Q(-\partial_x^2)p=0.\end{gathered}$$

Дисперсионное уравнение этой системы:

$$\omega(\omega+iQ(\xi^2))-(\alpha_1+\sigma(-\partial_x^2))\xi^2=0.$$

Если выразить σ через Q, получим

$$\omega(\omega+iQ)-\alpha_1\frac{1}{\tau}\,\frac{\xi^2}{Q+\frac{1}{\tau}}=0.$$

Таким образом, мы получили сомножитель в (24) дисперсионного полинома, профакторизованного по погранслойному корню. Здесь $\sigma(\infty)=$ $=\alpha_2$, отсюда на высоких частотах получаем асимптотику второй скорости звука

$$\omega_{SII}^{\pm}=\pm\sqrt{\alpha_1+\alpha_2}|\xi|+O(1).$$

3.4. Система моментов нечетного порядка, одномерный случай. Исследуем вначале самую простую одномерную систему двух уравнений моментов первого порядка

$$\begin{gathered}\partial_t\tilde{e}+\partial_x p=0,\\ \partial_t p+\alpha_1\partial_x\tilde{e}+\frac{1}{\tau_R}p=0.\end{gathered} \tag{25}$$

Ее дисперсионное уравнение имеет следующий вид:

$$\omega^2 - \alpha_1\xi^2 - i\frac{1}{\tau_R}\omega = 0. \tag{26}$$

Проекцию из фазового пространства системы (25) в фазовое пространство базовой переменной $\tilde{e}$ будем искать в виде

$$p = \partial_x q(-\partial_x^2)\tilde{e}.$$

Уравнение для производящей функции $Q = \xi^2 q(\xi^2)$ проекции из фазового пространства системы (25) в фазовое пространство базовой переменной $\tilde{e}$ получим заменой $\omega = iQ$ в (26):

$$Q^2 + \frac{1}{\tau_R}Q + \alpha_1|\xi|^2 = 0.$$

Отсюда следует, что не существует вещественного решения уравнения для производящей функции, или, что равносильно, чисто мнимого корня дисперсионного уравнения диффузионного типа. Следовательно, не существует проекции Чепмена—Энскога диффузионного типа. С физической точки зрения этот факт очевиден. Здесь диффузионная мода является вырожденной прямой волной второй скорости звука.

3.5. 4-Моментная система, одномерный случай. Приведем исследование четырехмоментной одномерной системы моментной аппроксимации уравнения Больцмана—Пайерлса [7]

$$\partial_t\tilde{e} + \partial_x p = 0, \quad \tilde{e} = \frac{e}{c^2},$$
$$\partial_t p + \alpha_1\partial_x e + \partial_x N + \frac{1}{\tau_R}p = 0,$$
$$\partial_t N + \alpha_2\partial_x p + \partial_x N_1 + \frac{1}{\tau}N = 0,$$
$$\partial_t N_1 + \alpha_3\partial_x N + \frac{1}{\tau}N_1 = 0.$$

Найдем ее дисперсионное уравнение. Имеем рекуррентную формулу

$$D_K = \left(\omega - \frac{1}{\tau}\right)D_{K-1} - \alpha_{K-1}\xi^2 D_{K-2}.$$

В нашем случае имеем

$$D_4 = \left(\omega - \frac{1}{\tau}\right)D_3 - \alpha_3\xi^2 D_2,$$
$$D_3 = \left(\omega - \frac{1}{\tau}\right)D_2 - \alpha_3\xi^2\omega, \quad D_2 = \omega\left(\omega - \frac{1}{\tau_R}\right) - \alpha_1\xi^2.$$

Отсюда получаем

$$D_4 = \omega\left(\omega - \frac{i}{\tau_R}\right)\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)^2 - \\ - \xi^2\left[\alpha_3\omega\left(\omega - \frac{i}{\tau_R}\right) + \alpha_2\omega\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right) + \alpha_1\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)^2\right] + \alpha_1\alpha_3\xi^4 = 0.$$

Разложения ищем в виде

$$\tilde{e} = \tilde{e}_0 + \varepsilon\tilde{e}_1 + \varepsilon^2\tilde{e}_2 + \varepsilon^3\tilde{e}_3 + \ldots, \tag{27}$$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \ldots, \tag{28}$$

$$N = \varepsilon N_1 + \varepsilon^2 N_2 + \varepsilon^3 N_3 + \ldots, \tag{29}$$

$$N_1 = \varepsilon N_0^1 + \varepsilon^2 N_0^2 + \varepsilon^3 N_0^3 + \ldots \tag{30}$$

Эти разложения подставляем в уравнения

$$\partial_t\tilde{e} + \partial_x p = 0, \tag{31}$$

$$\alpha_1\partial_x\tilde{e} + \partial_t p + \frac{1}{\varepsilon\tau_R}p + \partial_x N = 0, \tag{32}$$

$$\alpha_2\partial_x p + \partial_t N + \frac{1}{\varepsilon\tau}N + \partial_x N_1 = 0, \tag{33}$$

$$\alpha_3\partial_x N + \partial_t N_1 + \frac{1}{\varepsilon\tau}N_1 = 0. \tag{34}$$

Первые результаты подстановок (27)—(30) в (31)—(34) дают

для (31)

$$\partial_t\tilde{e} = 0, \tag{35}$$

$$\partial_t\tilde{e}_1 + \partial_x p_1 = 0, \tag{36}$$

$$\partial_t\tilde{e}_2 + \partial_x p_2 = 0, \tag{37}$$

$$\partial_t\tilde{e}_3 + \partial_x p_3 = 0; \tag{38}$$

для (32)

$$\frac{1}{\tau_R}p_0 = 0, \tag{39}$$

$$\alpha_1\partial_x\tilde{e}_0 + \frac{1}{\tau_R}p_1 = 0, \tag{40}$$

$$\alpha_1\partial_x\tilde{e}_1 + \partial_t p_1 + \frac{1}{\tau_R}p_2 + \partial_x N_1 = 0, \tag{41}$$

$$\alpha_1\partial_x\tilde{e}_2 + \partial_t p_2 + \frac{1}{\tau_R}p_3 + \partial_x N_2 = 0, \tag{42}$$

$$\alpha_1\partial_x\tilde{e}_3 + \partial_t p_3 + \frac{1}{\tau_R}p_4 + \partial_x N_3 = 0; \tag{43}$$

для (33)

$$\frac{1}{\tau}N_1 = 0, \tag{44}$$

$$\alpha_2\partial_x p_1 + \partial_t N_1 + \frac{1}{\tau}N_2 + \partial_x N_1^1 = 0, \tag{45}$$

$$\alpha_2\partial_x p_2 + \partial_t N_2 + \frac{1}{\tau}N_3 + \partial_x N_2^1 = 0, \tag{46}$$

$$\alpha_2\partial_x p_3 + \partial_t N_3 + \frac{1}{\tau}N_4 + \partial_x N_3^1 = 0; \tag{47}$$

для (34)

$$\frac{1}{\tau}N_1^1 = 0, \tag{48}$$

$$\alpha_3\partial_x N_1 + \partial_t N_1^1 + \frac{1}{\tau}N_2^1 = 0, \tag{49}$$

$$\alpha_3\partial_x N_2 + \partial_t N_2^1 + \frac{1}{\tau}N_3^1 = 0, \tag{50}$$

$$\alpha_3\partial_x N_3 + \partial_t N_3^1 + \frac{1}{\tau}N_4^1 = 0. \tag{51}$$

Из этих уравнений видно, что

$$p_0 = 0, \tag{52}$$

$$N_1 = 0, \tag{53}$$

$$N_1^1 = 0, \tag{54}$$

$$N_2^1 = 0. \tag{55}$$

Для выражения N_i и N_i^1 через $\partial_x^\alpha\tilde{e}_j$ и $\partial_x^\beta p_k$ будем использовать следующие рекуррентные формулы, полученные из (35)—(51):

для $\partial_t\tilde{e}_i$

$$\partial_t e_0 = 0, \tag{56}$$

$$\partial_t e_i = -\partial_x p_i \quad (i \geqslant 1); \tag{57}$$

для $\partial_t p_i$

$$p_0 = 0, \tag{58}$$

$$\partial_t p_1 = -\alpha_1 \partial_x \tilde{e}_1 - \frac{1}{\tau_R} p_2, \tag{59}$$

$$\partial_t p_i = -\alpha_1 \partial_x \tilde{e}_i - \frac{1}{\tau_R} p_{i+1} - \partial_x N_i \quad (i \geqslant 2); \tag{60}$$

для N_i

$$N_1 = 0, \tag{61}$$

$$N_2 = -\alpha_2 \tau \partial_x p_1, \tag{62}$$

$$N_3 = -\alpha_2 \tau \partial_x p_2 - \tau \partial_t N_2, \tag{63}$$

$$N_i = -\alpha_2 \tau \partial_x p_{i-1} - \tau \partial_t N_{i-1} - \tau \partial_x N^1_{i-1} \quad (i \geqslant 4); \tag{64}$$

для N^1_i

$$N^1_1 = 0, \tag{65}$$

$$N^1_2 = 0, \tag{66}$$

$$N^1_3 = -\alpha_3 \tau \partial_x N_2, \tag{67}$$

$$N^1_i = -\alpha_3 \tau \partial_x N_{i-1} - \tau \partial_t N^1_{i-1} \quad (i \geqslant 4). \tag{68}$$

Выражая N_i и N^1_i через производные e_j и p_k, получим следующие разложения:

$$N_2 = -\alpha_2 \tau \partial_x p_1, \tag{69}$$

$$N^1_3 = \alpha_2 \alpha_3 \tau^2 \partial^2_x p_1, \tag{70}$$

$$N_3 = -\alpha_2 \tau \left(1 + \frac{\tau}{\tau_R}\right) \partial_x p_2 - \alpha_1 \alpha_2 \tau^2 \partial^2_x e_1, \tag{71}$$

$$N^1_4 = \alpha_2 \alpha_3 \tau^2 \left(1 + 2\frac{\tau}{\tau_R}\right) \partial^2_x p_2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \tau^3 \partial^3_x e_1, \tag{72}$$

$$\begin{gathered} N_4 = -\alpha_2 \tau \left[1 + \left(1 + \frac{\tau}{\tau_R}\right) \frac{\tau}{\tau_R}\right] \partial_x p_3 + \\ + \alpha_2^2 \tau^3 \left(1 + \frac{\tau}{\tau_R}\right) \partial^3_x p_1 - \alpha_1 \alpha_2 \tau^2 \left(1 + \frac{\tau}{\tau_R}\right) \partial^2_x e_2, \end{gathered} \tag{73}$$

$$N_5^1 = \alpha_2\alpha_3\tau^2 \left[1 + \left(2 + 3\frac{\tau}{\tau_R}\right)\frac{\tau}{\tau_R}\right]\partial_x^2 p_3 -$$
$$- \alpha_2\alpha_3\tau^4 \left[\alpha_2\left(2 + 3\frac{\tau}{\tau_R}\right) - 2\alpha_1\right]\partial_x^4 p_1 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\tau^3\left(2 + 3\frac{\tau}{\tau_R}\right)\partial_x^3 e_2, \tag{74}$$

$$N_5 = -\alpha_2\tau\left[1 + \left(1 + \left(1 + \frac{\tau}{\tau_R}\right)\frac{\tau}{\tau_R}\right)\frac{\tau}{\tau_R}\right]\partial_x p_4 +$$
$$+ \alpha_2\tau^3\left[\alpha_2\left(1 + \frac{\tau}{\tau_R}\right)^3 - \alpha_1\left(1 + \frac{\tau}{\tau_R}\right) - \alpha_3\left(1 + 2\frac{\tau}{\tau_R}\right)\right]\partial_x^3 p_2 -$$
$$- \alpha_1\alpha_2\tau^2\left[1 + \left(1 + \frac{\tau}{\tau_R}\right)\right]\partial_x^2 e_3 +$$
$$+ \alpha_1\alpha_2\tau^4\left[\alpha_2\left(1 + \left(1 + \frac{\tau}{\tau_R}\right)^2\right) - 2\alpha_3\right]\partial_x^4 e_1. \tag{75}$$

Исходя из вида первых формул, проекцию на фазовую плоскость (e, p) будем искать в виде

$$N = \partial_x q(-\partial_x^2)p + \sigma(-\partial_x^2)e, \tag{76}$$
$$N_1 = q_1(-\partial_x^2)p + \partial_x\sigma_1(-\partial_x^2)e, \tag{77}$$

где символы $q(\xi^2)$, $\sigma_1(\xi^2)$ и $q_1(\xi^2)$, $\sigma(\xi^2)$ псевдодифференциальных операторов $q(-\partial_x^2)$, $\sigma_1(-\partial_x^2)$ и $q_1(-\partial_x^2)$, $\sigma(-\partial_x^2)$ являются функциями порядка -1 и 0 соответственно.

Перечислим основные требования к проекции Чепмена—Энскога (76), (77).

1. Проекция системы (31)—(34)

$$\partial_t e + \partial_x p = 0, \tag{78}$$
$$\partial_t p + (\alpha_1 + \sigma)\partial_x e + \left(\frac{1}{\tau_R} - Q\right)p = 0 \tag{79}$$

должна быть гиперболической системой с релаксацией, т. е. проекция должна действовать в рамках гиперболических систем с релаксацией: главная часть псевдодифференциальной системы первого порядка (78), (79) гиперболическая, и решения задачи Коши для этой системы устойчивы.

2. Порядки псевдодифференциальных операторов проекции Чепмена—Энскога не выше нуля.

Для системы (78), (79) это равносильно следующим соотношениям:

$$\alpha_1 + \sigma > 0, \quad \frac{1}{\tau_R} - Q > 0 \quad \forall |\xi| \geqslant 0. \tag{80}$$

Действительно, дисперсионное уравнение этой системы

$$\omega^2 - (\alpha_1 + \sigma(\xi^2))\xi^2 - i\left(\frac{1}{\tau_R} - Q\right)\omega = 0$$

определяет устойчивый гиперболический пучок тогда и только тогда, когда выполнены условия (80).

Подставим выражения (76), (77) в систему (27)—(30). Получим систему

$$\partial_t e + \partial_x p = 0, \tag{81}$$

$$\alpha_1 \partial_x e + \partial_t p + \frac{1}{\tau_R} p + \partial_x^2 q(-\partial_x^2)p + \partial_x \sigma(-\partial_x^2)e = 0, \tag{82}$$

$$\begin{gathered}\alpha_2 \partial_x p + \partial_t(\partial_x q(-\partial_x^2)p + \sigma(-\partial_x^2)e) + \\ + \frac{1}{\tau}(\partial_x q(-\partial_x^2)p + \sigma(-\partial_x^2)e) + \partial_x(q_1(-\partial_x^2)p + \partial_x \sigma_1(-\partial_x^2)e) = 0,\end{gathered} \tag{83}$$

$$\begin{gathered}\alpha_3 \partial_x(\partial_x q(-\partial_x^2)p + \sigma(-\partial_x^2)e) + \partial_t(q_1(-\partial_x^2)p + \partial_x \sigma_1(-\partial_x^2)e) + \\ + \frac{1}{\tau}(q_1(-\partial_x^2)p + \partial_x \sigma_1(-\partial_x^2)e) = 0.\end{gathered} \tag{84}$$

Прежде всего нам необходимо выражение

$$\partial_t p = -\alpha_1 \partial_x e - \frac{1}{\tau_R} p - \partial_x^2 q(-\partial_x^2)p - \partial_x \sigma(-\partial_x^2)e. \tag{85}$$

Далее из (83), (84) получим с использованием (85), разделяя каждое из уравнений на два независимых — по e и по p,

$$\begin{gathered}\alpha_2 \partial_x p - \frac{1}{\tau_R} \partial_x q(-\partial_x^2)p - \partial_x^3 q^2(-\partial_x^2)p - \partial_x \sigma(-\partial_x^2)p + \\ + \frac{1}{\tau} \partial_x q(-\partial_x^2)p + \partial_x q_1(-\partial_x^2)p = 0,\end{gathered}$$

$$-\alpha_1 \partial_x^2 q(-\partial_x^2)e - \partial_x^2 q(-\partial_x^2)\sigma(-\partial_x^2)e + \frac{1}{\tau}\sigma(-\partial_x^2)e + \partial_x^2 \sigma_1(-\partial_x^2)e = 0,$$

$$\begin{gathered}\alpha_3 \partial_x^2 q(-\partial_x^2)p - \frac{1}{\tau_R} q_1(-\partial_x^2)p - \partial_x^2 q_1(-\partial_x^2)q(-\partial_x^2)p - \\ - \partial_x^2 \sigma_1(-\partial_x^2)p + \frac{1}{\tau} q_1(-\partial_x^2)p = 0,\end{gathered}$$

$$\alpha_3\partial_x\sigma(-\partial_x^2)e - \alpha_1\partial_x q_1(-\partial_x^2)e - \partial_x q_1(-\partial_x^2)\sigma(-\partial_x^2)e +$$
$$+\frac{1}{\tau}\partial_x\sigma_1(-\partial_x^2)e = 0.$$

Эти четыре уравнения используются для нахождения неизвестных вещественнозначных ограниченных функций $Q = \xi^2 q$, $\Sigma_1 = \xi^2\sigma_1$ и q_1, σ. Преобразование Фурье по x позволяет перейти к алгебраическим выражениям для символов псевдодифференциальных операторов Q, Σ_1, q_1, σ. Получим четыре алгебраических уравнения

$$-\alpha_2\xi^2 + \frac{1}{\tau_R}Q(\xi^2) - Q^2(\xi^2) + \xi^2\sigma(\xi^2) - \frac{1}{\tau}Q(\xi^2) - \xi^2 q_1(\xi^2) = 0, \quad (86)$$

$$\alpha_1 Q(\xi^2) + Q(\xi^2)\sigma(\xi^2) + \frac{1}{\tau}\sigma(\xi^2) - \Sigma_1(\xi^2) = 0, \quad (87)$$

$$-\alpha_3 Q(\xi^2) - \frac{1}{\tau_R}q_1(\xi^2) + q_1(\xi^2)Q(\xi^2) + \Sigma_1(\xi^2) + \frac{1}{\tau}q_1(\xi^2) = 0, \quad (88)$$

$$-\alpha_3\xi^2\sigma(\xi^2) + \alpha_1\xi^2 q_1(\xi^2) + \xi^2 q_1(\xi^2)\sigma(\xi^2) - \frac{1}{\tau}\Sigma_1(\xi^2) = 0. \quad (89)$$

3.6. Уравнение для производящей функции. Эту систему соотношений можно переписать в виде

$$Q\left(Q + \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_R}\right) = -\alpha_2\xi^2 + \xi^2(\sigma - q_1), \quad (90)$$

$$\Sigma_1 = \alpha_1 Q + \left(Q + \frac{1}{\tau}\right)\sigma,$$

$$q_1\left(Q + \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_R}\right) = \alpha_3 Q - \Sigma_1,$$

$$(q_1 - \alpha_3)\xi^2\sigma = -\alpha_1\xi^2 q_1 + \frac{1}{\tau}\Sigma_1. \quad (91)$$

Теперь покажем, что система для производящих функций сводится к уравнению седьмого порядка относительно производящей функции $Q(|\xi|^2)$.

Исключая в силу второго уравнения Σ_1 из третьего уравнения, получаем

$$q_1 = \frac{(\alpha_3 - \alpha_1)Q - (Q + \frac{1}{\tau})\sigma}{R_2}, \quad R_2 = Q + \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_R}.$$

Отсюда в силу первого уравнения имеем

$$\xi^2\sigma = \frac{QR_2^2 + \xi^2[\alpha_2 R_2 + (\alpha_3 - \alpha_1)Q]}{R_2 + R_1}, \quad R_1 = Q + \frac{1}{\tau}. \quad (92)$$

Теперь поставим выражения для $\xi^2\sigma$, q_1 в последнее уравнение (91). Получим уравнение для производящей функции:

$$\mathcal{D}_3 = \left(Q+\frac{1}{\tau}\right)(|\xi|^2\sigma)^2 + |\xi|^2\sigma\left\{|\xi|^2\left[\alpha_1\left(Q+\frac{1}{\tau}\right)+(\alpha_1-\alpha_3)Q+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\alpha_3\left(Q+\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau_R}\right)\right]+\frac{1}{\tau}\left(Q+\frac{1}{\tau}\right)\left(Q+\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau_R}\right)\right\}+$$
$$+|\xi|^2\frac{\alpha_1}{\tau}Q\left(Q+\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau_R}\right)+|\xi|^4\alpha_1(\alpha_1-\alpha_3)Q=0. \qquad (93)$$

Подставляя (92) в (93), окончательно выводим

$$\mathcal{D}_3 = \left(Q+\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau_R}\right)(\mathcal{P}_6(Q)+|\xi|^2\mathcal{P}_4(Q)+|\xi|^4\mathcal{P}_2(Q))=0, \qquad (94)$$

$$\mathcal{P}_6(Q) = QR_1^2R_2^2\left(R_2+\frac{1}{\tau}\right),$$

$$\mathcal{P}_4 = 2\alpha_2QR_1R_2^2+(\alpha_1-\alpha_3)\left[Q^2R_2^2-\frac{1}{\tau}(QR_1R_2+QR_1^2-Q^2R_1R_2)\right]+$$
$$+(R_1+R_2)\left[QR_2(\alpha_2R_2+\alpha_1R_1)+\frac{1}{\tau}(\alpha_2R_1R_2+\alpha_1Q(R_1+R_2))\right], \qquad (95)$$

$$R_1=\left(Q+\frac{1}{\tau}\right),\quad R_2=\left(Q+\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau_R}\right),$$
$$\mathcal{P}_2=(R_1+R_2)[\alpha_2(\alpha_3R_2+\alpha_1R_1)+(\alpha_1-\alpha_3)^2Q]+$$
$$+(\alpha_2R_2+(\alpha_3-\alpha_1)Q)(\alpha_2R_1+(\alpha_1-\alpha_3)Q).$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$QR_2+\frac{1}{\tau}(R_2+R_1)=R_1\left(R_2+\frac{1}{\tau}\right)$$

и

$$R_1[\alpha_2R_2+(\alpha_3-\alpha_1)Q+\alpha_1(R_2+R_1)][\alpha_2R_2+(\alpha_3-\alpha_1)Q]+$$
$$+(R_2+R_1)[(\alpha_1-\alpha_3)Q(\alpha_2R_2+(\alpha_3-\alpha_1)Q+\alpha_1(R_2+R_1))+$$
$$+\alpha_3R_2(\alpha_2R_2+(\alpha_3-\alpha_1)Q)]=$$
$$=R_2\{\alpha_2R_1[\alpha_2R_2+(\alpha_3-\alpha_1)Q+\alpha_1(R_2+R_1)]+$$
$$+\alpha_3R_1[\alpha_2R_2+(\alpha_3-\alpha_1)Q]+$$
$$+(\alpha_1-\alpha_3)Q[\alpha_2R_2+(\alpha_3-\alpha_1)Q+\alpha_1(R_2+R_1)]+$$
$$+\alpha_3R_2[\alpha_2R_2+(\alpha_3-\alpha_1)Q]\}.$$

Теорема 3.3. *В окне параметров*

$$0 < \frac{\tau}{\tau_R} < 2\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_2} \tag{96}$$

существует проекция Чепмена—Энскога

$$N = \partial_x q(-\partial_x^2)p + \sigma(-\partial_x^2)\tilde{e}, \tag{97}$$

$$N_1 = q_1(-\partial_x^2)p + \partial_x\sigma_1(-\partial_x^2)\tilde{e} \tag{98}$$

в гиперболическую псевдодифференциальную систему первого порядка с релаксацией в фазовом пространстве консервативных переменных $(\tilde{e}, p)$ *одномерной системы моментов третьего порядка вида*

$$\begin{gathered} \partial_t\tilde{e} + \partial_x p = 0, \\ \partial_t p + (\alpha_1 + \sigma(-\partial_x^2))\partial_x\tilde{e} + \left(\frac{1}{\tau_R} - Q(-\partial_x^2)\right)p = 0. \end{gathered} \tag{99}$$

Здесь символы псевдодифференциальных операторов $\sigma_1(-\partial_x^2)$ *и* $q_1(-\partial_x^2)$, $\sigma(-\partial_x^2)$

$$\begin{gathered} \Sigma_1(\xi^2) = \alpha_1 Q + \left(Q + \frac{1}{\tau}\right)\sigma, \\ \xi^2\sigma(\xi^2) = \frac{QR_2^2 + \xi^2[\alpha_2 R_2 + (\alpha_3 - \alpha_1)Q]}{R_2 + R_1}, \\ R_1(\xi^2) = Q + \frac{1}{\tau}, \quad R_2 = Q + \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_R}, \\ q_1(\xi^2) = \frac{(\alpha_3 - \alpha_1)Q - (Q + \frac{1}{\tau})\sigma}{R_2}, \end{gathered}$$

производящая функция $Q(\xi^2) = \xi^2 q(\xi^2)$ *определяется гладкой кривой корней полиномиального пучка*

$$\mathcal{D}_3 = QR_2^2R_1^2\left(R_2 + \frac{1}{\tau}\right) + \xi^2\mathcal{P}_1 + \xi^4\mathcal{P}_2 = 0 \tag{100}$$

из трех полиномов, такой, что $Q(0) = 0$, *существование которой гарантируется окном параметров* (96).

Доказательство теоремы начнем с предложения о существовании производящей функции. Каковы условия существования гладкого вещественного ограниченного стабилизирующегося на бесконечности решения Q, $Q(0) = 0$?

Предложение 3.3. *В окне параметров*

$$0 < q < 2\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_2}$$

существует единственная гладкая $Q(|\xi|^2)$ *кривая вещественных корней полиномиального пучка*

$$\mathcal{D}_3 = QR_2^2R_1^2\left(R_2 + \frac{1}{\tau}\right) + \xi^2\mathcal{P}_1 + \xi^4\mathcal{P}_2 = 0 \qquad (101)$$

из трех полиномов, такая, что $Q(0) = 0$ *(рис. 3). Более того,*

$$\sigma(\xi^2) + \alpha_1 > 0 \quad \forall|\xi| \geqslant 0. \qquad (102)$$

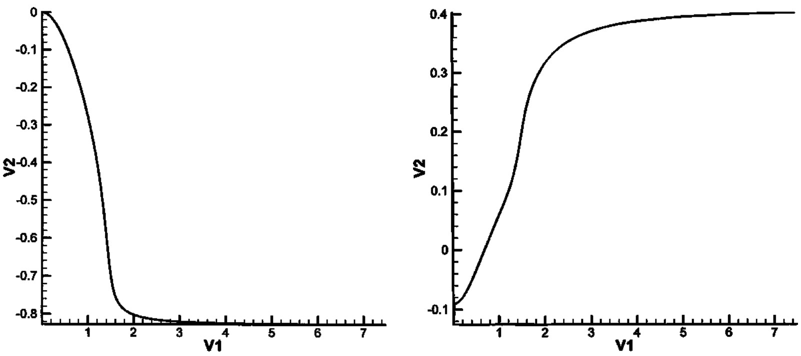

Рис. 3

При исследовании пучка (101) удобно перейти к новой переменной $Q = \frac{1}{\tau}\tilde{Q}$:

$$\begin{gathered}
\tau^6\mathcal{D}_3 = \tilde{Q}\tilde{R}_2{}^2\tilde{R}_1{}^2(\tilde{R}_2 + 1) + \xi^2\mathcal{P}_1(\tilde{Q}) + \xi^4\mathcal{P}_2(\tilde{Q}) = 0,\\
\tilde{R}_1 = \tilde{Q} + 1, \quad \tilde{R}_2 = \tilde{Q} + 1 - q,\\
\mathcal{P}_1(\tilde{Q}) = \tilde{Q}\tilde{R}_2[2\alpha_2\tilde{R}_1\tilde{R}_2 + (\tilde{R}_2 + \tilde{R}_1)(\alpha_1\tilde{R}_1 + \alpha_3\tilde{R}_2)] +\\
+ (\tilde{R}_2 + \tilde{R}_1)[\tilde{R}_2(\alpha_1\tilde{Q} + \alpha_2\tilde{R}_1) + \alpha_3\tilde{Q}\tilde{R}_1] - (\alpha_1 - \alpha_3)q\tilde{Q}\tilde{R}_2{}^2,\\
\mathcal{P}_2(\tilde{Q}) = [\alpha_2\tilde{R}_1 + (\alpha_1 - \alpha_3)\tilde{Q}]\,[\alpha_2\tilde{R}_2 + (\alpha_3 - \alpha_1)\tilde{Q}] +\\
+ (\tilde{R}_2 + \tilde{R}_1)[\alpha_3(\alpha_2\tilde{R}_2 + (\alpha_3 - \alpha_1)\tilde{Q}) + \alpha_1(\alpha_2\tilde{R}_1 + (\alpha_1 - \alpha_3)\tilde{Q})].
\end{gathered}$$

Теперь докажем существование гладких кривых вещественных корней для двух пучков из двух полиномов

$$\mathcal{R}_1 = \tilde{Q}\tilde{R}_2{}^2\tilde{R}_1{}^2(\tilde{R}_2+1)+\xi^2\mathcal{P}_1(\tilde{Q})=0, \tag{103}$$

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{P}_1(\tilde{Q})+\xi^2\mathcal{P}_2(\tilde{Q})=0. \tag{104}$$

1. Для первого пучка (103) очевидно, что

$$\begin{gathered}
\mathcal{P}_1|_{\tilde{Q}=0} = \alpha_2(2-q)(1-q)>0,\\
\mathcal{P}_1|_{\tilde{Q}=-1+q} = -\alpha_3 q^2(1-q)<0,\\
\mathcal{P}_1|_{\tilde{Q}=-1} = -\alpha_3 q<0,\\
\mathcal{P}_1|_{\tilde{Q}=-2+q} = (2-q)\{\alpha_2(1-q)+\alpha_1(3-q)+\alpha_3(3-q)\}>0.
\end{gathered}$$

При $q=0$ мы имеем двукратный корень $\tilde{Q}=-1$, который становится парой комплексно сопряженных корней при $q\in(0,1)$. Для любого $q\in[0,1]$ есть еще два вещественных корня $\tilde{Q}=r_1^{\pm}(q)$, $r_1^-<-1<$ $<-1+q<r_1^+$ на интервале $(-2+q,0)$, так что

$$\mathcal{P}_1 = a_0\left(Q-\frac{1}{\tau}r_1^+\right)\left(Q-\frac{1}{\tau}r_1^-\right)\mathcal{R}.$$

Более того, эти корни при возрастании $q\to 1$ движутся направо к значениям $r_1^-(1)=-1$ и $r_1^+(1)=0$ соответственно.

2. Уравнение

$$\begin{gathered}
\mathcal{P}_2|_{q=0} = [\alpha_2^2+(\alpha_1-\alpha_3)^2+2\alpha_2(\alpha_3+\alpha_1)]\tilde{Q}^2+\\
+2\alpha_2^2((\alpha_1-\alpha_3)^2+\alpha_2(\alpha_3+\alpha_1))\tilde{Q}+\alpha_2^2+2(\alpha_3+\alpha_1)\alpha_2=0
\end{gathered}$$

определяет два стартовых корня $-2<r_2^-(0)<r_2^+(0)<0$, близких к -1. Так же, как выше, можно показать существование для любого $q\in[0,1)$ двух вещественных корней $r_2^-(q)<r_2^+(q)$ полинома $\mathcal{P}_2$, таких, что

$$-2+q<r_1^-(q)<r_2^-(q)<r_2^+(q)<r_1^+(q)<0 \quad \forall q\in(0,1).$$

Более того, эти корни при возрастании $q\to 1$ также движутся направо к значениям $r_2^-(1)\simeq -0{,}6$ и $r_2^+(1)\simeq -0{,}4$.

3. Таким образом, для любого $q\in[0,1)$ существует две гладкие кривые вещественных корней, стартующие при $|\xi|=0$ из нуля $\tilde{Q}=0$ и $\tilde{Q}=-2+q$ и стабилизирующиеся к корням r_1^+ и r_1^- полинома $\mathcal{P}_1$ соответственно.

4. Также для любого $q \in [0,1)$ существуют две гладкие кривые вещественных корней, стартующие при $|\xi| = 0$ из $\tilde{Q} = r_1^-(0)$ и $\tilde{Q} = r_1^+(0)$ и стабилизирующиеся к корням r_2^+ и r_2^- полинома $\mathcal{P}_2$ соответственно.

5. Осталось понять, являются ли эти кривые верхними и нижними решениями для полного пучка

$$D = \tilde{Q}\tilde{R}_2{}^2\tilde{R}_1{}^2(\tilde{R}_2 + 1) + \xi^2\mathcal{P}_1(\tilde{Q}) + \xi^4\mathcal{P}_2(\tilde{Q}) = 0. \tag{105}$$

Имеем

$$D(r_1^+) = \xi^4\mathcal{P}_2(r_1^+) > 0,$$
$$D(r_2^+) = r_2^+(r_2^+ + 1 - q)^2(r_2^+ + 1)^2(r_2^+ + 2 - q) < 0.$$

Отсюда следует существование гладкой кривой

$$r_2^+ < r(|\xi|^2, q) < r_1^+, \quad r(0,q) = 0, \quad \forall q \in (0,1)$$

корня пучка (105).

6. Осталась последняя проблема — проверка отсутствия сингулярности в формулах для символов операторов проекции Чепмена—Энскога. Напомним, что значение $r(|\xi|^2, q)$ при $|\xi| \to \infty$ монотонно стремится сначала к r_1^- и затем к r_1^+. Отсюда условие несингулярности, имеющее вид

$$r(|\xi|^2, q) > -1 + \frac{1}{2}q, \quad q \in (0, q_*), \quad \forall |\xi| \geqslant 0,$$

определит допустимое окно параметра. Достаточно определить критическое значение $q = q_*$, для которого $r_2^+(q_*) = -1 + \frac{1}{2}q_*$, когда кривая $r = -1 + \frac{1}{2}q$ «обгоняет» $r_2^+(q)$. Тогда

$$r_2^+(q) > -1 + \frac{1}{2}q \quad \forall q \in (0, q_*).$$

Таким образом, определяем q_* как единственное решение уравнения $\mathcal{P}_2|_{\tilde{Q}=-1+\frac{1}{2}q} = 0$, т. е.

$$[(\alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_3)q - 2(\alpha_1 - \alpha_3)]^2 = 0 \implies q_* = 2\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_3}. \tag{106}$$

Очевидно, что

$$2\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_3} < 1,$$

если $\alpha_1 - \alpha_3 < \alpha_2$, т. е. $\alpha_1 < \alpha_3 + \alpha_2$; это справедливо для данных значений параметров α_1, α_3, α_2.

7. Теперь покажем, что нет особенностей в формулах (91). Для этого достаточно показать, что числитель формулы для q_1 равен нулю, когда обращается в нуль знаменатель. Действительно, если $R_2 = 0$, имеем

$$\sigma|_{R_2=0} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)(1-q)}{q}.$$

Тогда в числителе формулы для q_1

$$\left((\alpha_3 - \alpha_1)Q - \left(Q + \frac{1}{\tau}\right)\sigma\right)\Big|_{R_2=0} =$$
$$= (\alpha_1 - \alpha_3)(1-q) - q\frac{(\alpha_1 - \alpha_3)(1-q)}{q} = 0.$$

Таким образом, в окне параметров теоремы нет особенностей в формулах для символов операторов проекции Чепмена—Энскога.

8. Проверка условия (102) гиперболичности проекции одномерной системы моментов третьего порядка в фазовом пространстве консервативных переменных проводится аналогично, но требует преодоления больших технических трудностей.

Это завершает доказательство теоремы.

§ 4. ИЕРАРХИЯ СИСТЕМ МОМЕНТОВ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

Многомерный случай. На примере феноменов нелинейной диффузии и так называемой второй скорости звука [4, 7—10] при теплопереносе в диэлектриках на низких температурах мы исследуем условия существования проекций Чепмена—Энскога задачи Коши для систем моментов порядка M

$$\begin{gathered}
\partial_t \tilde{e} + \partial_{x_k} p_k = 0,\\
\partial_t p_j + \frac{1}{3}c^2 \partial_{x_j}\tilde{e} + \partial_{x_k} N_{\langle jk\rangle} + \frac{1}{\tau_R} p_j = 0,\\
\partial_t N_{\langle ij\rangle} + \frac{2}{5}c^2 \partial_{x_j\rangle} p_{\langle i} + \frac{1}{\tau} N_{\langle ij\rangle} = 0,\\
\partial_t N_{\langle i_1\dots i_n\rangle} + \frac{n}{2n+1}c^2 \partial_{x_{i_n}\rangle} N_{\langle\langle i_1\dots i_{n-1}\rangle} + \frac{1}{\tau} N_{\langle i_1\dots i_n\rangle} = 0,\\
i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots i_n, \quad i_k = 1,2,3, \quad 1 < n \leqslant M,
\end{gathered} \tag{107}$$

кинетического уравнения Больцмана—Пайерлса (см. [4, 9]) в фазовое пространство консервативной переменной $\tilde{e} = e/c$ (проекция диффузионного типа), в фазовое пространство моментов на единицу меньшего порядка (проекция погранслойного типа) или в фазовое пространство переменных $\tilde{e} = e/c$, $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_d)^\top \in \mathbb{R}^d$ (проекция типа второй скорости звука). Здесь мы использовали соотношения $\partial_{x_{j\rangle}} p_{\langle i}$, $\partial_{x_{i_n\rangle}} N_{\langle\langle i_1 \ldots i_{n-1}\rangle}$ для симметрических бесследовых тензоров [1], δ_{ij} — символ Кронекера, c — скорость звука Дебая, e — распределение энергии фононов [4]. В (107) и ниже предполагается суммирование по повторяющимся индексам. Так,

$$\partial_{x_{j\rangle}} p_{\langle i} = \partial_{x_j} p_i + \partial_{x_i} p_j - \frac{2}{d} \operatorname{div}_x \bar{p} \delta_{ij}.$$

Суть подхода Чепмена и Энскога в исследовании задачи Коши для этой системы, например для проекции диффузионного типа (проекции в фазовое пространство консервативной переменной e), состоит в нахождении операторной зависимости неравновесных переменных p_j, $N_{\langle i_1 \ldots k \ldots l \ldots i_n\rangle}$ от консервативной величины e. Ниже мы докажем следующую теорему.

Теорема. *Для любой системы моментов уравнения Больцмана—Пайерлса четного порядка $2k$ ($2k+1$ уравнений в одномерном случае) существуют критические значения*

$$(q^d_{2k+1}, q^b_{2k+1}), \quad 1 > q^d_{2k+1} \geqslant q^b_{2k+1} > 0,$$

параметра $q = \tau/\tau_R$, такие, что

1) *в окне параметров $1 > q > q^d_{2k+1}$ существует проекция Чепмена—Энскога диффузионного типа в фазовое пространство консервативной переменной $\tilde{e}$:*

$$\partial_t \tilde{e} + Q(-\Delta)\tilde{e} = 0,$$

где $\omega = -iQ(|\xi|^2)$, $Q(0) = 0$, — ограниченная гладкая кривая чисто мнимых корней дисперсионного уравнения одномерной системы моментов кинетического уравнения Больцмана—Пайерлса того же порядка;

2) *в окне параметров $q^b_{2k+1} > q > 0$ существует проекция Чепмена—Энскога (погранслойного типа) системы моментов уравнения Больцмана—Пайерлса четного порядка в псевдодифференциальное замыкание системы моментов нечетного порядка $2k-1$ (псевдодифференциальную систему гиперболических уравнений с ре-*

лаксацией первого порядка). Результатом проекции является система гиперболических псевдодифференциальных уравнений первого порядка с релаксацией.

Исследования показали, что в многомерном случае результаты те же, что и в одномерном, с тем же окном допустимых параметров. Следствием *изотропности дисперсионного уравнения* являются следующие утверждения.

Лемма (о факторизации дисперсионного полинома). *Дисперсионный полином многомерной ($d = 2, 3$) системы моментов до порядка $M \geqslant 2$ включительно имеет фактором дисперсионный полином одномерной системы моментов того же порядка.*

Теорема (существование диффузионной моды). *Для многомерной ($d = 2, 3$) системы моментов до порядка $M = 2k$, $k \geqslant 1$, включительно необходимым и достаточным условием существования проекции Чепмена—Энскога диффузионного типа*

$$\begin{gathered} p_j = \partial_{x_j} q_j(\nabla_x)\tilde{e}, \quad j = 1, 2, 3, \\ N_{i_1,\ldots,i_k} = \partial_{x_{i_1}} \ldots \partial_{x_{i_k}} q_{i_1,\ldots,i_k}(\nabla_x)\tilde{e}, \quad i_1, \ldots, i_k = 1, 2, 3, \quad 2 \leqslant k \leqslant M, \end{gathered} \tag{108}$$

с гладкими символами $q_{i_1,\ldots,i_k}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, порядка $-(M-k)$, $k = 1, \ldots, M$, является существование ограниченной гладкой кривой чисто мнимых корней $\omega = -iQ(|\xi|^2)$ дисперсионного уравнения одномерной системы моментов кинетического уравнения Больцмана—Пайерлса того же порядка, т. е. $Q(\lambda)$ — ограниченная, отрицательная на полупрямой $\lambda > 0$ функция, такая, что $Q(0) = 0$, $Q'(0) < 0$. К тому же

$$Q(|\xi|^2) = \xi_1^2 q_1(|\xi|^2) + \xi_2^2 q_2(|\xi|^2) + \xi_3^2 q_3(|\xi|^2).$$

Производящие функции

$$Q_{i_1,\ldots,i_k}(\xi) = \prod_{s=1}^{k} \xi_{i_s}^2 q_{i_1,\ldots,i_k}(\xi)$$

удовлетворяют системе алгебраических уравнений, имеющей единственное гладкое вещественное ограниченное решение $\forall |\xi| \geqslant 0$.

Для многомерных проекций Чепмена—Энскога погранслойного типа, проектирующих систему моментов кинетического уравнения Больцмана—Пайерлса в систему фазового пространства моментов на единицу меньшего порядка (в одномерном случае в систему фазового пространства на единицу меньшей размерности), справедливы похожие результаты. Условия существования многомерной проекции определяются условиями существования ограниченной гладкой кривой чисто мнимых погранслойных корней дисперсионного уравнения одномерной системы того же порядка. Таким образом, исследование проекции Чепмена—Энскога в многомерном случае сводится к исследованию проекции Чепмена—Энскога одномерной системы.

4.1. Центральное многообразие и проблемы проекции Чепмена—Энскога. Приведем теорему о проекции Чепмена—Энскога для одномерного NR-процесса, четный порядок системы.

Теорема. *Положим* $q = \tau/\tau_R \in (0,1)$. *Для любой одномерной системы моментов уравнения Больцмана—Пайерлса четного порядка* $2k$ (*нечетное число* $2k+1$ *уравнений*) *существуют критические значения параметра* $q^b_{2k+1} < q^d_{2k+1}$, *такие, что*:

1) *для значений параметра* $q > q^d_{2k+1}$ *пучок дисперсионного уравнения является диффузионно связным, т. е. существует ограниченная кривая устойчивых чисто мнимых корней дисперсионного уравнения диффузионного типа, стабилизирующаяся на бесконечности. Тогда определена проекция Чепмена—Энскога диффузионного типа в фазовое пространство консервативной переменной* $\tilde{e}$;
2) *для значений параметра* $q < Q^b_{2k+1}$ *пучок дисперсионного уравнения является погранслойно связным, т. е. существует ограниченная кривая устойчивых чисто мнимых корней дисперсионного уравнения погранслойного типа, стабилизирующаяся на бесконечности. Тогда определена проекция Чепмена—Энскога погранслойного типа* (*из системы моментов четного порядка в систему моментов нечетного порядка*), *понижающая порядок системы на единицу.*

Доказательство теоремы разбивается на несколько предложений. Дисперсионное уравнение системы моментов порядка $2k$ (одномерный случай) можно получить из рекуррентного соотношения

$$D_{2k+1} = \left(\omega - \frac{1}{\tau}\right) D_{2k}(\omega) - \alpha_{2k}\xi^2 D_{2(k-1)}(\omega) = 0. \qquad (109)$$

Здесь $D_j(\omega)$ — дисперсионное уравнение одномерной системы моментов из j уравнений, из которого нетрудно получить следующее уравнение для производящей функции диффузионного типа:

$$P_{2k+1}(Q, |\xi|^2) = Q\left(Q + \frac{1}{\tau_R}\right)\left(Q + \frac{1}{\tau}\right)^{2k-1} +$$

$$+ |\xi|^2 \left(Q + \frac{1}{\tau}\right)^{2k-3} \mathcal{P}_{1,2k+1}(Q) + \ldots +$$
$$+ |\xi|^{2(k-1)} \left(Q + \frac{1}{\tau}\right) \mathcal{P}_{k-1,2k+1}(Q) + |\xi|^{2k} \mathcal{L}_1(Q) = 0, \tag{110}$$

где

$$\tau^2 \mathcal{P}_{j,2k+1}(Q) = a_{j,2k+1} \hat{Q}^2 + b_{j,2k+1}(q) \hat{Q} + c_{1,2k+1},$$
$$\tau \mathcal{L}_{1,2k+1}(Q) = \alpha_{2k+1} \hat{Q} + \beta_{2k+1} -$$

многочлены второго и первого порядка соответственно с положительными коэффициентами. Коэффициенты $b_{j,2k+1}(q)$ являются линейными относительно q функциями с положительными коэффициентами. Здесь $R_1 = Q + 1/\tau$, $R_2 = Q + 1/\tau_R$ и $\hat{Q} = \tau Q$. Заданные коэффициенты $\alpha_j = j^2 c/(4j^2 - 1)$. Первым делом постараемся найти итерационные формулы для полиномов $\mathcal{P}_{j,2k+1}(Q)$, $\mathcal{L}_{1,2k+1}(Q)$.

Предложение. *Для любого целого $k \geqslant 2$ справедливы следующее представления*:

$$\mathcal{P}_{1,2k+1}(Q) = \mathcal{P}_{1,2k-1} + (\alpha_{2k-1} + \alpha_{2k}) R_2 Q,$$
$$\mathcal{P}_{k-1,2k+1}(Q) = \alpha_{2k} \mathcal{P}_{k-2,2k-1}(Q) +$$
$$+ R_1 \Bigg(\mathcal{L}_{1,2k-1}(Q) + \alpha_{2k-1} \mathcal{L}_{1,2k-31}(Q) +$$
$$+ \sum_{r=2}^{k-2} \prod_{j=1}^{r} \alpha_{2k-2j+1} \mathcal{L}_{1,2k-2r-1}(Q) \Bigg) + \prod_{j=1}^{k-1} \alpha_{2j+1} R_2 Q;$$

здесь мы считаем, что $\mathcal{P}_{0,m}(Q) = R_2 Q$ и $\mathcal{P}_{1,3}(Q) = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 Q$.

В то же время для любого s, $1 < s < k-1$, $k > 2$, верны представления

$$\mathcal{P}_{s,2k+1}(Q) = \mathcal{P}_{s,2k-1}(Q) + \alpha_{2k} \mathcal{P}_{s-1,2k-1}(Q) +$$
$$+ \sum_{r=1}^{s} \prod_{j=1}^{r} \alpha_{2k-2j+1} \mathcal{P}_{s-t,2k-2t-1}(Q). \tag{111}$$

Например, для $k = 2$ имеем

$$P_5(Q) = R_1^3 R_2 Q + \xi^2 \mathcal{P}_{1,5}(Q) + \xi^4 \mathcal{L}_{1,5}(Q),$$
$$\mathcal{P}_{1,5} = R_1 \mathcal{L}_{1,3} + (\alpha_3 + \alpha_4) R_2 Q, \quad \mathcal{L}_{1,5} = \alpha_4 \mathcal{L}_{1,3} + \alpha_1 \alpha_3 R_1.$$

Определение (диффузионно связного полиномиального пучка). Назовем соседними парами полиномов пучка (110) следующие пары полиномов:

$$\left(Q+\frac{1}{\tau}\right)Q\left(Q+\frac{1}{\tau_R}\right), \quad \mathcal{P}_{1,2k+1}(Q),$$
$$\left(Q+\frac{1}{\tau}\right)\mathcal{P}_{s,2k+1}(Q), \quad \mathcal{P}_{s+1,2k+1}(Q), \quad s \geqslant 1,$$
$$\mathcal{P}_{k-1,2k+1}(Q), \quad \mathcal{L}_1(Q).$$

Полиномиальный пучок (110) будем называть диффузионно связным, если корни соседних пар полиномов пучка взаимно разделяют друг друга, т. е.

$$\left[\left(Q+\frac{1}{\tau}\right)Q\left(Q+\frac{1}{\tau_R}\right), \mathcal{P}_{1,2k+1}(Q)\right] > 0 \quad \forall Q \in \left[0, -\frac{1}{\tau}\right),$$
$$\left[R_1\left(Q+\frac{1}{\tau}\right)\mathcal{P}_{s,2k+1}(Q), \mathcal{P}_{s+1,2k+1}(Q)\right] > 0 \quad \forall Q \in \left[0, -\frac{1}{\tau}\right), \quad s \geqslant 1,$$
$$[\mathcal{P}_{k-1,2k+1}(Q), \mathcal{L}_{1,2k+1}(Q)] > 0 \quad \forall Q \in \left[0, -\frac{1}{\tau}\right).$$

Предложение. *Полиномиальный пучок*

$$P_{2k+1}(Q,|\xi|^2) = Q\left(Q+\frac{1}{\tau_R}\right)\left(Q+\frac{1}{\tau}\right)^{2k-1} + \\ + |\xi|^2\left(Q+\frac{1}{\tau}\right)^{2k-3}\mathcal{P}_{1,2k+1}(Q) + \ldots + \\ + |\xi|^{2(k-1)}\left(Q+\frac{1}{\tau}\right)\mathcal{P}_{k-1,2k+1}(Q) + |\xi|^{2k}\mathcal{L}_{1,2k+1}(Q) = 0$$

системы моментов уравнения Больцмана—Пайерлса четного порядка (одномерный случай) является связным в окне параметров

$$q > q_{2k+1} = \max(q_{2k-1}, q^*_{2k+1}), \quad \mathcal{L}_{1,2k+1}\left(-\frac{1}{\tau}q^*_{2k+1}\right) = 0. \qquad (112)$$

Предложение. *Для любой системы моментов четного порядка $2k$ уравнения Больцмана—Пайерлса ($2k+1$ уравнение в одномерном случае) в окне параметров $q_{2k+1} > \max(q^*_3, q^*_5, \ldots, q^*_{2k+1})$ из связности пучка* (110) *следует, что*

1) *существует производящая функция пучка* (110) *диффузионного типа, т. е. монотонно убывающая кривая* $Q(|\xi|^2)$, $Q(0) = 0$, *вещественных простых корней уравнения* (110);
2) *существует кривая* $\omega = -iQ(|\xi|^2)$ *чисто мнимых простых корней дисперсионного уравнения системы моментов.*

Проекция Чепмена—Энскога погранслойного типа. Вторая часть теоремы этого параграфа (о структуре проекции Чепмена—Энскога погранслойного типа) доказывается по аналогии с доказательством существования проекции Чепмена—Энскога диффузионного типа и сводится к исследованию уравнения для производящей функции погранслойного типа

$$P_{2k+1}^b = QP_{2k}^b(Q) + \alpha_{2k-1}\xi^2 P_{2(k-1)}^b = 0,$$
$$D_m\left(i\left(Q + \frac{1}{\tau}\right)\right) = i^m P_m^b(Q),$$

получаемого из дисперсионного уравнения одномерной системы моментов заменой $\omega = i(Q + \frac{1}{\tau})$. Здесь $D_m(\omega)$ — дисперсионное уравнение одномерной системы моментов из m уравнений. Это уравнение имеет монотонно убывающее решение ($Q(0) = 0$) для достаточно малых значений параметра $q < q_{2k+1}^b$. Оценка окна допустимых параметров проводится так же, как в диффузионном случае. Из высокочастотной асимптотики корней дисперсионного уравнения следует возможное существование только одной глобальной кривой чисто мнимых корней. Отсюда следует, что производящие функции диффузионного и погранслойного типа не могут существовать одновременно, т. е. критическое значение параметра q_{2k+1}^d, равное минимуму из всех возможных значений q_{2k+1} при уточнении оценок скобок Пуассона для проекции диффузионного типа, не меньше значения параметра q_{2k+1}^b, равного максимуму из всех возможных значений параметра при уточнении оценок скобок Пуассона для проекции погранслойного типа:

$$q_{2k+1}^d \geqslant q_{2k+1}^b. \tag{113}$$

Это утверждение завершает доказательство теоремы для проекций диффузионного и погранслойного типов. Доказательство теоремы для систем моментов нечетного порядка (четное число уравнений в одномерном случае) доказывается аналогично, но технически сложнее.

Вопрос о строгом неравенстве или равенстве в (113) остается открытым. Строгое неравенство указывает на тот факт, что для промежуточных значений параметра $q_{2k+1}^d > q > q_{2k+1}^b$ либо производящая функция диффузионного типа, либо производящая функция погранслойного типа является негладкой.

4.2. Бесконечномерная система. Бесконечная система моментов имеет простое автомодельное решение, получаемое как слабый предел решений проекций Чепмена—Энскога систем моментов четного порядка $M = 2K$ при $K \to \infty$:

$$\begin{gathered} \partial_t \tilde{e} - Q_M(-\partial_x^2)\tilde{e} = 0, \\ \tilde{e}|_{t=0} = \tilde{e}^0(x). \end{gathered}$$

Пусть $Y(x) = x\theta(x)$ — так называемая тепловая функция Хевисайда. Здесь функция Хевисайда $\theta(x) = 1$ для $x > 0$, $\theta(x) = 0$ для $x < 0$. Решение бесконечной системы имеет следующий вид:

$$\tilde{e}(x,t) = Y(x - x(t)), \quad \frac{dx}{dt} = A(x(t)).$$

Здесь потенциал

$$A(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{K\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(ix\xi) \frac{Q_{2K+1}(\xi^2)}{\xi^2}\, d\xi$$

и $\omega = -iQ_{2K}(\xi^2)$ — чисто мнимый ограниченный устойчивый корень дисперсионного уравнения системы моментов порядка $2K$ диффузионного типа $Q(0) = Q'(0) = 0$, $Q''(0) \neq 0$.

§ 5. СТРУКТУРА ПРОЕКЦИИ ЧЕПМЕНА—ЭНСКОГА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА—ПАЙЕРЛСА

Проведенные нами исследования дают почву для интереснейших математических постановок совершенно новых и бесспорно актуальных задач для целого класса кинетических уравнений, например уравнений Больцмана и Фоккера—Планка. Из построения проекции Чепмена—Энскога становится понятной причина неустойчивости пост-Навье-Стокс приближений (так называемой ультрафиолетовой катастрофы). Производящие функции как решения полиномиальных пучков являются функциями типа кинка, которые очень плохо приближаются на высоких частотах своими разложениями в ряды Тейлора в нуле.

В принципе, предложенный подход универсален: по регулярной асимптотике действительно угадывается квантование иерархии моментов, которая позволяет сформулировать операторный анзац проекции Чепмена—Энскога. Основные задачи:

а) описать класс неприводимых проекций, тем самым выделить соответствующие решения иерархии систем моментов, описывающие основные процессы моментной аппроксимации кинетического уравнения;
б) выяснить, насколько класс неприводимых проекций выделяет решения общего положения;
в) описать поведение на больших временах решений задачи Коши для моментных аппроксимаций кинетических уравнений как разделение динамик: динамики аттракции решений задачи Коши для моментных аппроксимаций к решениям задачи Коши проекций Чэпмена—Энскога в фазовое пространство физических переменных (консервативных переменных) и динамики на больших временах решений задачи Коши для этих проекций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Müller I., Ruggeri T.* Extended Thermodynamics. Berlin: Springer, 1993.
2. *Levermore C. D.*. Moment closure hierarchies for kinetic theories // J. Statist. Phys. 1996. V. 83. P. 1021—1065.
3. *Chapman S., Cowling T.* Mathematical Theory on Non-uniform Gases. 3nd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1970.
4. *Peierls R.* Zur kinetischen Theorie der Warmeleitung in Kristallen // Ann. Physics. 1929. V. 3. P. 1055.
5. *Guver R. A., Krumhansl J. A.* Solution of the linearized phonon Boltzmann equation // Phys. Rev. 1966. V. 148, N 2. P. 766—778.
6. *Rannige J.* Heat-pulse propagation in ionic lattics // Phys. Rev. B. 1972. V. 5, N 8. P. 3315—3321.
7. *Dedeurwaerder T., Cases-Vazquez J., Jou D., Lebon G.* Foundations and applications of a mesoscopic thermodynamic theory of fast phenomena // Phys. Rev. E. 1996. V. 53, N 1. P. 498—506.
8. *Narayanamurti V., Dynes R., Anders K.* Propagation of sound and second sound using heat pulses // Phys. Rev. B. 1975. V. 11, N 7. P. 2500—2524.
9. *Dreyer W., Struchtrup H.* Heat pulse experiments revisted // Contin. Mech. Thermodyn. 1993. V. 5. P. 3—50.

10. *Dreyer W., Herrmann M., Kunik M., Qamar Sh.* Kinetic schemes for selected initial and boundary value problems. Berlin, 2003. (Prepr. / Weierstrass-Institute fur Angewandte Analysis und Stochastik; N ISSN 0946-8633).
11. *Radkevich E. V.* Well-posedness of mathematical models in continuum mechanics and thermodynamics // Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. 2003. V. 3. P. 5—32.
12. *Волевич Л. Р., Радкевич Е. В.* Равномерные оценки решений задачи Коши для гиперболических уравнений с малым параметром при старших производных // Дифференц. уравн. 2003. Т. 39, № 4. С. 1—14.
13. *Захарченко П. А., Радкевич Е. В.* О свойствах представления уравнения Фоккера—Планка в базисе функций Эрмита // Докл. РАН. 2004. Т. 395, № 1. С. 36—39.
14. *Brini F.* Hyperbolicity region in extended thermodynamics with 14 moments // Contin. Mech. Thermodyn. 2001. V. 13. P. 1—8.
15. *Edelman I.* Bifurcation of the Biot slow wave in a porous medium // J. Acoust. Soc. Amer. 2003. V. 114, N 1. P. 1—7.
16. *Karlin I. V., Gorban A. N.* Hydrodynamics from Grad's equations: What can we learn from exact solution? // Ann. Phys. 2002. V. 11. P. 783—833.
17. *Бобылев А. В.* // Стат. физика. 1982. Т. 80. С. 1063.
18. *Struchtrup H., Weiss W.* Temperature jump and velocity slip in the moment method // Contin. Mech. Thermodyn. 2000. V. 12. P. 1—18.
19. *Dreyer W., Junk M., Kunik M.* On the approximation of the Fokker—Planck equation by moments system // Nonlinearity. 2001. V. 14. P. 881—906.
20. *Волевич Л. Р., Радкевич Е. В.* Устойчивые пучки гиперболических полиномов. Задачи Коши для гиперболических уравнений с малым параметром. Приложения // Тр. ММО. 2004. Т. 65. С. 69—113.
21. *Захарченко П. А., Радкевич Е. В.* Центральное многообразие и проблемы проекции Чепмена—Энскога для уравнения Больцмана—Пайерлса // Докл. РАН. 2004. Т. 397, № 6. С. 762—766.
22. *Cerecignani C.* Boltzmann equation and its applications. N. Y.: Springer, 1988.
23. *Glimm J., Jaffe A.* Quantum Physics: A Functional Integral Point of View. N. Y.: Springer, 1981.
24. *Parisi G.* Statistical Field Theory. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1988.