А. Б. Муравник*

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ СТАРШИМИ ЧЛЕНАМИ**

ВВЕДЕНИЕ

Теория дифференциально-разностных уравнений (т. е. уравнений, в которых на неизвестную функцию действуют, кроме дифференциальных операторов, еще и операторы сдвига) является актуальной и интенсивно развивающейся областью исследований (см., например, [1—3] и имеющуюся там библиографию) и имеет различные приложения. Большей частью, однако, эти исследования посвящены *обыкновенным* дифференциально-разностным уравнениям, а также абстрактным дифференциально-разностным уравнениям в банаховых и гильбертовых пространствах (см., например, [4—6] и имеющуюся там библиографию). Исследованиям дифференциально-разностных уравнений в частных производных посвящено меньшее количество работ. Так, эллиптические дифференциально-разностные уравнения изучались в [3] (см. также имеющуюся там библиографию), параболические уравнения, в которых оператор сдвига действует по временно́й переменной, — в [7—11], параболические уравнения, содержащие операторы сдвига по пространственным переменным, — в [12—18] (см. также имеющуюся там библиографию).

В последней из этих работ исследовалось поведение при $t \to \infty$ решения задачи Коши для указанных уравнений; получены теоремы об их (весовой асимптотической) близости к решениям задач Коши для некоторых классических параболических уравнений. Однако исследованные уравнения содержат лишь *младшие* нелокальные (а именно дифференциально-разностные) члены, более точно — нелокальные чле-

**Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 02-01-00312.

ны нулевого порядка. В настоящей статье рассматривается задача Коши для параболических уравнений со *старшими* дифференциально-разностными членами; будет показано, что при определенных условиях имеет место теорема о близости (и как следствие — о стабилизации) решений указанных задач.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Пусть $a, h \in \mathbb{R}^m$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$ следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^{m} a_k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x + h_k, t). \tag{1}$$

Уравнения такого вида встречаются, например, в задачах неклассической оптики (см. [19, 20]).

Рассмотрим вещественную часть символа оператора L (или, что то же самое, символ оператора $L + L^*$):

$$\operatorname{Re} L(\xi) = -\xi^2 - \xi^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \cos h_k \xi$$

(см. [3, § 8]). Назовем $-L(\xi)$ *положительно определенным*, если существует такое положительное C, что $-\operatorname{Re} L(\xi) \geqslant C\xi^2$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^1$. По аналогии с дифференциальными операторами (см., например, [25, с. 66 и 78]) оператор $-L$, обладающий указанным свойством, можно назвать *сильно эллиптическим* во всем пространстве оператором второго порядка. В дальнейшем мы будем полагать оператор $-L$ сильно эллиптическим.

Отметим, что условие сильной эллиптичности позволяет коэффициентам уравнения быть сколь угодно большими (см., например, [3, Ex. 8.1]).

Наряду с уравнением (1) рассмотрим начальное условие

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

где $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^1$.

Определим на $\mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$ следующую функцию:

$$\mathcal{E}(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}_{a,h}(x,t) \stackrel{\text{def}}{=}$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-t\xi^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos h_k \xi\right)} \cos\left(x\xi - t\xi^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin h_k \xi\right) d\xi. \tag{3}$$

Условие сильной эллиптичности оператора $-L$, очевидно, влечет за собой выполнение неравенства

$$1+\sum_{k=1}^{m} a_k \cos h_k\xi \geqslant C$$

при $\xi \neq 0$. Покажем, что оно выполняется (хотя, возможно, с другой положительной константой) и при $\xi = 0$, т. е. что

$$1+\sum_{k=1}^{m} a_k > 0.$$

Для этого предположим, напротив, что

$$1+\sum_{k=1}^{m} a_k \leqslant 0.$$

Тогда для любого $\xi \neq 0$

$$C \leqslant 1+\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos h_k\xi =$$
$$= 1+\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=1}^{m} a_k(\cos h_k\xi - 1) = 1+\sum_{k=1}^{m} a_k - 2\sum_{k=1}^{m} a_k \sin^2\frac{h_k\xi}{2} =$$
$$= 1+\sum_{k=1}^{m} a_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} a_k h_k^2\xi^2\left(\frac{\sin\frac{h_k\xi}{2}}{\frac{h_k\xi}{2}}\right)^2 \leqslant -\frac{\xi^2}{2}\sum_{k=1}^{m} a_k h_k^2\left(\frac{\sin\frac{h_k\xi}{2}}{\frac{h_k\xi}{2}}\right)^2.$$

Выбирая теперь положительное ξ достаточно малым, приходим к противоречию с положительностью константы C. Поэтому

$$|\mathcal{E}(x,t)| \leqslant \int_0^\infty e^{-Ct\xi^2}\,d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{4Ct}},$$

т. е. для любых t_0, T из $(0,+\infty)$ интеграл (1) сходится абсолютно и равномерно по $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times [t_0,T]$, следовательно, $\mathcal{E}(x,t)$ определена корректно на $\mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$.

Продифференцируем (формально) $\mathcal{E}$ под знаком интеграла по переменной t:

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} = -\int_0^\infty \xi^2\left(1+\sum_{k=1}^{m} a_k \cos h_k\xi\right)e^{-t\xi^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi\right)} \times$$

$$\times \cos\biggl(x\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^{m} a_k \sin h_k\xi\biggr)d\xi +$$

$$+\int_0^\infty e^{-t\xi^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi\right)}\sin\biggl(x\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin h_k\xi\biggr)\sum_{k=1}^{m} a_k\xi^2\sin h_k\xi d\,\xi =$$

$$=\sum_{k=1}^{m} a_k\int_0^\infty \xi^2 e^{-t\xi^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi\right)}\biggl[\sin\biggl(x\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin h_k\xi\biggr)\sin h_k\xi -$$

$$-\cos\biggl(x\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin h_k\xi\biggr)\cos h_k\xi\biggr]d\xi -$$

$$-\int_0^\infty \xi^2 e^{-t\xi^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi\right)}\cos\biggl(x\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin h_k\xi\biggr)d\xi =$$

$$=\int_0^\infty \xi^2 e^{-t\xi^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi\right)}\biggl(\sum_{k=1}^{m} a_k\cos\biggl[(x+h_k)\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin h_k\xi\biggr] +$$

$$+\cos\biggl(x\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin h_k\xi\biggr)\biggr)d\xi.$$

Далее, формальное дифференцирование $\mathcal{E}$ под знаком интеграла по переменной x дает

$$\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial x^2} = -\int_0^\infty \xi^2 e^{-t\xi^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi\right)}\cos\biggl(x\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin h_k\xi\biggr)d\xi.$$

Оба эти интеграла ограничены сверху по абсолютной величине линейной комбинацией интегралов вида

$$\int_0^\infty \xi^2 e^{-Ct\xi^2}\,d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{4Ct^{\frac{3}{2}}},$$

т. е. сходятся абсолютно и равномерно по $(x,t)\in\mathbb{R}^1\times[t_0,T]$ для любых $t_0,T\in(0,+\infty)$. Значит, дифференцирование под знаком интеграла законно, и в $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} - \frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial x^2} =$$

$$= -\int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-t\xi^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi\right)} \sum_{k=1}^m a_k \cos\left[(x+h_k)\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi\right] d\xi =$$

$$= -\sum_{k=1}^m a_k \int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-t\xi^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi\right)} \cos\left[(x+h_k)\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi\right] d\xi =$$

$$= \sum_{k=1}^m a_k \frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial x^2}(x+h_k,t),$$

следовательно, $\mathcal{E}(x,t)$ в $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$ удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (1).

§ 2. СВЕРТКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Оценим поведение $\mathcal{E}(x,t)$ и ее производных при $x\to\infty$ (при фиксированном положительном t). Для этого предварительно разобьем ее на четное и нечетное (по x) слагаемые $\mathcal{E}_1(x,t)$ и $\mathcal{E}_2(x,t)$:

$$\mathcal{E}_1(x,t) = \int\limits_0^\infty e^{-t\xi^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi\right)} \cos x\xi \cos\left(t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi\right)d\xi,$$

$$\mathcal{E}_2(x,t) = \int\limits_0^\infty e^{-t\xi^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi\right)} \sin x\xi \sin\left(t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi\right)d\xi.$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $t>0$. Тогда $x^2\mathcal{E}(x,t)$ ограничена в $(-\infty,+\infty)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное положительное t и дважды проинтегрируем

$$\int\limits_0^\infty e^{-t\xi^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi\right)} \cos\left(t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi\right)\cos x\xi\, d\xi$$

по частям. Получим

$$\frac{1}{x^2}\int\limits_0^\infty \left[e^{-t\xi^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi\right)} \cos\left(t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi\right)\right]''\cos x\xi\, d\xi$$

(легко убедиться, что все внеинтегральные члены обращаются в нуль).

Последний интеграл есть ограниченная функция переменной x, поэтому $x^2\mathcal{E}_1(x,t)$ ограничена. Аналогично доказывается ограниченность функции $x^2\mathcal{E}_2(x,t)$. $\square$

Таким образом, в $\mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$ определена функция

$$u(x,t) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x-\xi,t)u_0(\xi)\,d\xi. \tag{4}$$

Лемма 2. *Пусть* $t>0$. *Тогда* $x^2\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial x^2}(x,t)$ *ограничена в* $(-\infty,+\infty)$.

Для доказательства $\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial x^2}$, так же как и $\mathcal{E}$, разбивается на четное и нечетное по x слагаемые, а затем к первому (для определенности) из этих слагаемых

$$-\int\limits_0^{\infty} \xi^2 e^{-t\xi^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi\right)} \cos\left(t\xi^2\sum_{k=1}^{m} a_k \sin h_k\xi\right)\cos x\xi\,d\xi$$

дважды применяется формула интегрирования по частям. Дальнейшее доказательство полностью аналогично доказательству леммы 1.

Очевидно, лемма 2 останется справедливой и в том случае, если $\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial x^2}$ взять не в точке (x,t), а в любой из точек $(x+h_k,t)$, где $k=\overline{1,m}$. Поскольку, как доказано в предыдущем параграфе, $\mathcal{E}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) в $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$, из лемм 1 и 2 вытекает следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $t>0$. *Тогда* $x^2\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}(x,t)$ *ограничена в* $(-\infty,+\infty)$.

Из лемм 1—3 и того обстоятельства, что $\mathcal{E}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) в $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$, очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть оператор* $-L$ *сильно эллиптичен в* $\mathbb{R}^1$. *Тогда функция* (4) *удовлетворяет* (*в классическом смысле*) *уравнению* (1) *в* $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$.

Замечание 1. То, что функция (4) удовлетворяет задаче (1), (2) *в смысле обобщенных функций*, является известным фактом (см., например, [21]). Новым в теореме 1 является только то, что это решение является *классическим* в $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$.

Чтобы установить единственность этого решения, исследуем, согласно [21], вещественную часть символа эллиптического оператора L, содержащегося в уравнении (1). Указанный символ $\mathcal{P}(z) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{P}(\sigma+i\tau)$

равен

$$-z^2\biggl(1+\sum_{k=1}^{m}a_ke^{-ih_kz}\biggr)=(\tau^2-\sigma^2-2i\sigma\tau)\biggl(1+\sum_{k=1}^{m}a_ke^{-ih_kz}\biggr)=$$
$$=(\tau^2-\sigma^2-2i\sigma\tau)\biggl(1+\sum_{k=1}^{m}a_ke^{h_k\tau-ih_k\sigma}\biggr)=$$
$$=(\tau^2-\sigma^2-2i\sigma\tau)\biggl(1+\sum_{k=1}^{m}a_ke^{h_k\tau}\cos h_k\sigma-i\sum_{k=1}^{m}a_ke^{h_k\tau}\sin h_k\sigma\biggr).$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re}\mathcal{P}(z)=(\tau^2-\sigma^2)\biggl(1+\sum_{k=1}^{m}a_ke^{h_k\tau}\cos h_k\sigma\biggr)-2\sigma\tau\sum_{k=1}^{m}a_ke^{h_k\tau}\sin h_k\sigma.$$

Теперь оценим функцию $\mathcal{Q}(z,t_0,t)\stackrel{\text{def}}{=}e^{(t-t_0)\mathcal{P}(z)}$:

$$|\mathcal{Q}(z,t_0,t)|\leqslant e^{(t-t_0)[C_1(1+\sigma^4)+C_2e^{C_3\tau}]}.$$

Из последней оценки вытекает (см. [21, гл. 2, добавление 1]), что задача (1), (2) имеет не более одного решения в смысле обобщенных функций.

Замечание 2. Вообще говоря, единственность решения задачи (1), (2) (в соответствующих пространствах обобщенных функций) имеет место для гораздо более широких классов начальных функций, нежели класс непрерывных ограниченных функций, например для классов А. Н. Тихонова и их обобщений (см. [22], а также [23]). Здесь мы, однако, рассмотрим лишь случай непрерывных ограниченных начальных функций, поскольку исследуем близость решений указанной задачи и *классических* параболических задач.

Пользуясь доказанной единственностью решения, мы можем, в частности, вычислить интеграл от фундаментального решения по всей вещественной оси.

Лемма 4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}(x,t)\,dx=\pi.$

Доказательство. Рассмотрим функцию $u_0(x)\equiv 1$. Она непрерывна и ограничена, следовательно,

$$y(x,t)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}(x-\xi,t)\,d\xi$$

в $\mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$ удовлетворяет уравнению (1) с начальным условием $y(x,0) \equiv 1$. Однако $y(x,t)$ не зависит от x:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x-\xi,t)\,d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(\xi,t)d\xi = \pi y(t),$$

т. е. в действительности $y(t)$ удовлетворяет *обыкновенному* дифференциальному уравнению $y' = 0$ и начальному условию $y(0) = 1$. Значит, $y(t) \equiv 1$. □

§ 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ

В этом разделе мы изучим поведение $u(x,t)$ при $t \to \infty$. Для этого наряду с задачей (1), (2) рассмотрим уравнение теплопроводности с тем же самым начальным условием (2). Обозначим его классическое ограниченное решение через $v(x,t)$, а положительную постоянную $1 + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k$ — через p.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. $\lim\limits_{t\to\infty}[u(x,t) - v(x,pt)] = 0$ *для любого вещественного* x.

Доказательство. Возьмем произвольное вещественное x_0 и рассмотрим $u(x_0,t)$. Заменой переменной $\eta = \frac{x_0-\xi}{2\sqrt{t}}$ получаем, что

$$u(x_0,t) = \frac{2\sqrt{t}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(2\sqrt{t}\eta,t)u_0(x_0 - 2\sqrt{t}\eta)\,d\eta.$$

Далее,

$$\sqrt{t}\,\mathcal{E}(2\sqrt{t}\eta,t) =$$

$$= \sqrt{t}\int\limits_0^\infty e^{-t\xi^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi\right)} \cos\!\left(2\sqrt{t}\eta\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^{m} a_k \sin h_k\xi\right)d\xi =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)} \cos\!\left(2z\eta - z^2\sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)dz.$$

Отсюда

$$u(x_0,t)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_0(x_0-2\sqrt{t}\eta)\int\limits_0^{\infty}e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\cos\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}\times$$
$$\times\cos\left(2z\eta-z^2\sum_{k=1}^{m}a_k\sin\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)dz\,d\eta.$$

Тогда

$$u(x_0,t)-v(x_0,pt)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_0(x_0-2\sqrt{t}\eta)\int\limits_0^{\infty}\Bigg[e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\cos\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}\times$$
$$\times\cos\left(2z\eta-z^2\sum_{k=1}^{m}a_k\sin\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)-e^{-pz^2}\cos 2z\eta\Bigg]dz\,d\eta. \tag{5}$$

Для дальнейшего доказательства нам потребуются две следующие леммы.

Лемма 5.

$$\int\limits_0^{\infty}\Bigg[e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\cos\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}\times$$
$$\times\cos\left(2z\eta-z^2\sum_{k=1}^{m}a_k\sin\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)-e^{-pz^2}\cos 2z\eta\Bigg]dz\xrightarrow{t\to\infty}0$$

равномерно относительно $\eta\in(-\infty,+\infty)$.

Доказательство. Зададимся произвольным положительным ε и разобьем оцениваемый интеграл на сумму двух слагаемых:

$$\int\limits_0^{\delta}+\int\limits_{\delta}^{\infty}\stackrel{\text{def}}{=}I_{1,\delta}+I_{2,\delta}.$$

Модуль всего интеграла оценивается сверху величиной

$$2\int\limits_0^{\infty}e^{-Cz^2}\,dz,$$

поэтому существует такое $\delta>0$, что $|I_{2,\delta}|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ для любых $\eta\in(-\infty,+\infty)$, $t>0$. Зафиксируем δ и рассмотрим $I_{1,\delta}$. Его подынтегральная функция равна

$$e^{-pz^2}\left[e^{z^2\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\left(1-\cos\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}\cos\left(2z\eta-z^2\sum_{k=1}^{m}a_k\sin\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)-\cos 2z\eta\right]=$$

$$=e^{-pz^2}\left(e^{2z^2\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\sin^2\frac{h_kz}{2\sqrt{t}}}\left[\cos 2z\eta\cos\left(z^2\sum_{k=1}^{m}a_k\sin\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sin 2z\eta\sin\left(z^2\sum_{k=1}^{m}a_k\sin\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)\right]-\cos 2z\eta\right)=$$

$$=e^{-pz^2}\left(\cos 2z\eta\left[e^{2z^2\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\sin^2\frac{h_kz}{2\sqrt{t}}}\cos\left(z^2\sum_{k=1}^{m}a_k\sin\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)-1\right]+\right.$$

$$\left.+e^{2z^2\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\sin^2\frac{h_kz}{2\sqrt{t}}}\sin 2z\eta\sin\left(z^2\sum_{k=1}^{m}a_k\sin\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)\right)\overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=}A_1(\eta,t;z)+A_2(\eta,t;z).$$

Имеем

$$\left|\int_0^\delta A_2(\eta,t;z)\,dz\right|\leqslant e^{2\delta^2\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|}\int_0^\delta\left|\sin\left(z^2\sum_{k=1}^{m}a_k\sin\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)\right|dz$$

для любых η, t. Обозначим величину

$$\frac{16\delta^8\left(\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|\,|h_k|\right)^2e^{4\delta^2\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|}}{\varepsilon^2}$$

через T_0. Тогда для любых $t>T_0$, $k=\overline{1,m}$ из того, что

$$\left|\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{4\delta^3e^{2\delta^2\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|}}\,\frac{|h_k|}{\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|\,|h_k|},$$

следует

$$\left|\sin\left(z^2\sum_{k=1}^{m}a_k\sin\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)\right|\leqslant\left|z^2\sum_{k=1}^{m}a_k\sin\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{4\delta e^{2\delta^2\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|}}$$

(поскольку $0 \leqslant z \leqslant \delta$). Тем самым

$$\left|\int_0^\delta A_2(\eta, t; z)\, dz\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

при $t > T_0$ для любого $\eta \in (-\infty, +\infty)$. Осталось оценить

$$\int_0^\delta A_1(\eta, t; z)\, dz.$$

Его модуль не превосходит

$$\int_0^\delta e^{-pz^2}\left|e^{2z^2\sum\limits_{k=1}^m a_k \sin^2 \frac{h_k z}{2\sqrt{t}}} \cos\left(z^2 \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) - 1\right| dz.$$

Представим разность, стоящую под модулем в подынтегральной функции, в виде

$$e^{2z^2\sum\limits_{k=1}^m a_k \sin^2 \frac{h_k z}{2\sqrt{t}}} \cos\left(z^2 \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) -$$
$$- \cos\left(z^2 \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) + \cos\left(z^2 \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) - 1 =$$
$$= \cos\left(z^2 \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\left(e^{2z^2\sum\limits_{k=1}^m a_k \sin^2 \frac{h_k z}{2\sqrt{t}}} - 1\right) +$$
$$+ \cos\left(z^2 \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) - 1.$$

Выберем T_1 настолько большим, что

$$\left|e^{2z^2\sum\limits_{k=1}^m a_k \sin^2 \frac{h_k z}{2\sqrt{t}}} - 1\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{8\delta}$$

для любых $t > T_1$, $z \in [0, \delta]$. Это возможно, поскольку существует такое положительное δ_1, что $e^x \in \left(1 - \frac{\varepsilon}{8\delta}, 1 + \frac{\varepsilon}{8\delta}\right)$ для любого $x \in (-\delta_1, \delta_1)$. Поэтому в качестве T_1 можно, например, взять

$$\frac{\delta^4 \sum\limits_{k=1}^m |a_k| h_k^2}{2\delta_1}.$$

Далее, существует такое $\delta_2 \in (0,+\infty)$, что $\cos x \in \left(1-\frac{\varepsilon}{8\delta}, 1+\frac{\varepsilon}{8\delta}\right)$ для любого $x \in (-\delta_2, \delta_2)$. Положим

$$T_2 \overset{\text{def}}{=} \frac{\delta^6 \Big(\sum\limits_{k=1}^{m} |a_k|\,|h_k| \Big)^2}{\delta_2^2}.$$

Тогда для любых $t > T_2$, $z \in [0,\delta]$

$$\left| z^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}} \right| \leqslant z^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{|a_k|\,|h_k z|}{\sqrt{T_2}} \leqslant \frac{\delta^3}{\sqrt{T_2}} \sum_{k=1}^{m} |a_k|\,|h_k| = \delta_2,$$

следовательно,

$$\left| \cos\left(z^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}} \right) - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{8\delta}$$

для любых $t > T_2$, $z \in [0,\delta]$. Значит, для любых $t > \max\{T_0, T_1, T_2\}$, $\eta \in (-\infty,+\infty)$ из того, что

$$\left| \int\limits_0^\delta A_1(\eta,t;z)\,dz \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

следует $|I_{1,\delta}| < \frac{\varepsilon}{2}$. □

Лемма 6. *Существует такое $M > 0$, зависящее только от a, h, что для любого $t > 1$ и для любого $\eta \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$*

$$\left| \int\limits_0^\infty e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left(2z\eta - z^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}} \right) dz \right| \leqslant \frac{M}{\eta^2}.$$

Доказательство. Представим оцениваемый интеграл в виде суммы

$$\int\limits_0^\infty e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)} \cos 2z\eta \cos\left(z^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}} \right) dz +$$
$$+ \int\limits_0^\infty e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)} \sin 2z\eta \sin\left(z^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}} \right) dz \qquad (6)$$

и рассмотрим первое (для определенности) из этих слагаемых.

Обозначим

$$e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)}\cos\left(z^2\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)$$

через $g(z)$ (считая t параметром) и проинтегрируем

$$\int\limits_0^\infty g(z)\cos 2\eta z\,dz$$

по частям. Получим

$$g(z)\frac{\sin 2\eta z}{2\eta}\bigg|_{z=0}^{z=+\infty}-\frac{1}{2\eta}\int\limits_0^\infty g'(z)\sin 2\eta z\,dz=-\frac{1}{2\eta}\int\limits_0^\infty g'(z)\sin 2\eta z\,dz,$$

поскольку $g(+\infty)=0$, так как

$$1+\sum_{k=1}^m a_k\cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\geqslant C>0.$$

Проинтегрировав по частям еще раз, получим

$$g'(z)\frac{\cos 2\eta z}{4\eta^2}\bigg|_{z=0}^{z=+\infty}-\frac{1}{4\eta^2}\int\limits_0^\infty g''(z)\cos 2\eta z\,dz.$$

Имеем

$$g'(z)=e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)}\left[-2z\left(1+\sum_{k=1}^m a_k\cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{z^2}{\sqrt{t}}\sum_{k=1}^m a_k h_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right]\cos\left(z^2\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)-$$

$$-e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)}\sin\left(z^2\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\times$$

$$\times\left(2z\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}+\frac{z^2}{\sqrt{t}}\sum_{k=1}^m a_k h_k\cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)=$$

$$=-e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)}\left[\frac{z^2}{\sqrt{t}}\sin\left(z^2\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\sum_{k=1}^m a_k h_k\cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}-\right.$$

$$-\frac{z^2}{\sqrt{t}}\cos\biggl(z^2\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\biggr)\sum_{k=1}^m a_kh_k\sin\frac{h_kz}{\sqrt{t}}+$$

$$+2z\cos\biggl(z^2\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\biggr)\sum_{k=1}^m a_k\cos\frac{h_kz}{\sqrt{t}}+$$

$$+2z\sin\biggl(z^2\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\biggr)\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{h_kz}{\sqrt{t}}+2z\cos\biggl(z^2\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\biggr)\biggr]=$$

$$=e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}\biggl[\frac{z^2}{\sqrt{t}}\sum_{k=1}^m a_kh_k\sin\biggl(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}-z^2\sum_{l=1}^m a_l\sin\frac{h_lz}{\sqrt{t}}\biggr)+$$

$$+2z\sum_{k=1}^m a_k\cos\biggl(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}-z^2\sum_{l=1}^m a_l\sin\frac{h_lz}{\sqrt{t}}\biggr)-2z\cos\biggl(z^2\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\biggr)\biggr].$$

Таким образом, $g'(0)=g'(+\infty)=0$, следовательно,

$$\int\limits_0^\infty g(z)\cos 2\eta z\,dz=-\frac{1}{4\eta^2}\int\limits_0^\infty g''(z)\cos 2\eta z\,dz.$$

Очевидно, существует такой полином (конечной степени) $P(z)$, положительные коэффициенты которого зависят только от a, h, что для любого $t\geqslant 1$ на $[0,+\infty)$ выполняется неравенство

$$|g''(z)|\leqslant e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}P(z).$$

Значит,

$$\biggl|\int\limits_0^\infty g(z)\cos 2\eta z\,dz\biggr|\leqslant\frac{1}{4\eta^2}\int\limits_0^\infty e^{-Cz^2}P(z)\,dz$$

для любого $t>1$ и для любого $\eta\in\mathbb{R}^1\setminus\{0\}$. Тем самым для первого слагаемого суммы (6) требуемая оценка выполнена. Таким же образом оценивается и второе слагаемое. □

Перейдем теперь непосредственно к завершению доказательства теоремы. Разобьем (5) на сумму

$$\frac{2}{\pi}\biggl(\int\limits_{-\infty}^{-R}+\int\limits_{-R}^{R}+\int\limits_{R}^{+\infty}\biggr)\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{2}{\pi}[I_{3,R}(t)+I_{4,R}(t)+I_{5,R}(t)],$$

где R — положительный параметр. В силу леммы 6 (без ограничения общности считаем, что $t > 1$) и ограниченности функции u_0

$$|I_{5,R}(t)| \leqslant \sup_{\mathbb{R}^1} |u_0(x)| \int\limits_R^{+\infty} \left(\frac{M}{\eta^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4p}} e^{-\frac{\eta^2}{p}} \right) d\eta.$$

Последний интеграл сходится, поэтому для любого наперед заданного положительного ε найдется такое $R_0 \in (1, +\infty)$, что

$$|I_{5,R_0}(t)| \leqslant \frac{\pi\varepsilon}{6}$$

для любого $t \in (1, +\infty)$. При этом, очевидно, I_{3,R_0} удовлетворяет той же оценке.

Зафиксируем это R_0 и рассмотрим $I_{4,R_0}(t)$. Его абсолютная величина не превосходит

$$\sup_{\mathbb{R}^1} |u_0(x)| \int\limits_{-R_0}^{+R_0} \left| \int\limits_0^{\infty} \left[e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \cos\left(2z\eta - z^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) - e^{-pz^2} \cos 2z\eta \right] dz \right| d\eta.$$

В силу леммы 5 найдется такое $T^* > 1$, что для любого $t > T^*$ для любого вещественного η модуль внутреннего интеграла в последнем выражении не превосходит

$$\frac{\pi\varepsilon}{12R_0 \sup\limits_{\mathbb{R}^1} |u_0(x)|}.$$

Отсюда вытекает, что для любого $t > T^*$ модуль выражения (5) не превосходит ε. Поскольку положительное ε выбиралось произвольно, это означает, что $\lim\limits_{t\to\infty} [u(x_0, t) - v(x_0, pt)] = 0$. В силу произвольности выбора вещественного x_0 теорема 2 доказана. □

Следствие 1. *Пусть* $x, l \in (-\infty, +\infty)$. *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = l$$

в том и только в том случае, если

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int\limits_{-R}^{R} u_0(x)\, dx = l.$$

Для доказательства отметим лишь, что утверждение следствия есть классическая теорема о поточечной стабилизации (см. [24]), т. е. для функции $v(x,t)$ оно выполнено; далее остается непосредственно применить теорему 2.

Замечание 3. Отметим, что, хотя теорема 2 и следствие 1 справедливы при одних и тех же условиях, утверждение теоремы (как утверждение о *близости* решений) является более сильным в следующем смысле: в отличие от утверждения следствия (т. е. теоремы о *стабилизации*) оно дает информацию о поведении решения также и в том случае, когда (необходимое и достаточное) условие стабилизации не выполнено.

§ 4. СЛУЧАЙ НЕСКОЛЬКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, где $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{im_i})$, $b_i = (b_{i1}, \dots, b_{im_i})$, $i = \overline{1,n}$. В области $\{x \in \mathbb{R}^n \mid t > 0\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_{(n)}u \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \Delta u + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + b_{ij}, x_{i+1}, \dots, x_n, t) \qquad (7)$$

и начальное условие (2) с некоторой u_0, непрерывной и ограниченной в $\mathbb{R}^n$.

Как и в разделе 1 (см. также [3, § 8]), наложим условие положительной определенности на символ оператора $-L_{(n)}$:

$$-\operatorname{Re} L_{(n)}(\xi) = |\xi|^2 + \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i \geqslant C|\xi|^2$$

для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ с некоторым положительным C.

Оператор $-L_{(n)}$, обладающий указанным свойством, будем, как и в одномерном случае, называть *сильно эллиптическим* во всем пространстве.

Отметим, что, как и в одномерном случае (ср. также [3, Ex. 8.1]), условие сильной эллиптичности не накладывает ограничений на величины коэффициентов уравнения.

Отметим также, что, как и в случае ограниченной области (см. [3, § 9]), сильная эллиптичность дифференциального и дифференциально-разностного операторов различаются существенным образом, поэтому влияние разностных членов имеет принципиальное значение.

Определим в $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ функцию

$$\mathcal{E}_{(n)}(x,t) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-t\left(|\xi|^2+\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum\limits_{j=1}^{m_i}a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)} \times$$

$$\times \cos\left(x\xi - t\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum_{j=1}^{m_i}a_{ij}\sin b_{ij}\xi_i\right)d\xi. \qquad (8)$$

Показатель последней экспоненты можно представить в виде

$$-t\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\left(1+\sum_{j=1}^{m_i}a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right),$$

что при $(\xi,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ не превосходит

$$-t\sum_{i=1}^{n}C_i\xi_i^2$$

с некоторыми положительными $C_1,\dots,C_n$. Действительно, возьмем произвольное $i\in\overline{1,n}$ и применим условие сильной эллиптичности, взятое при $\xi_1=\ldots=\xi_{i-1}=\xi_{i+1}=\ldots=\xi_n=0$. Получим, что

$$\xi_i^2+\xi_i^2\sum_{j=1}^{m_i}a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i \geqslant C\xi_i^2$$

для любого вещественного ξ_i. Значит,

$$1+\sum_{j=1}^{m_i}a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i \geqslant C$$

для любого $\xi_i\neq 0$. Покажем, что последнее неравенство выполняется (хотя, возможно, с другой положительной константой) и при $\xi=0$, т. е. что

$$1+\sum_{j=1}^{m_i}a_{ij} > 0.$$

Для этого предположим, напротив, что

$$1+\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\leqslant 0.$$

Тогда для любого $\xi_i\neq 0$

$$C\leqslant 1+\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}-\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}+\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i=$$

$$=1+\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}+\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}(\cos b_{ij}\xi_i-1)=1+\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}-2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin^2\frac{b_{ij}\xi_i}{2}=$$

$$=1+\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}b_{ij}^2\xi_i^2\left(\frac{\sin\frac{b_{ij}\xi_i}{2}}{\frac{b_{ij}\xi_i}{2}}\right)^2\leqslant -\frac{\xi_i^2}{2}\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}b_{ij}^2\left(\frac{\sin\frac{b_{ij}\xi_i}{2}}{\frac{b_{ij}\xi_i}{2}}\right)^2.$$

Выбирая теперь положительное ξ_i достаточно малым, приходим к противоречию с положительностью константы C.

Поэтому для любого $[t_0,T]\subset(0,+\infty)$ интеграл (8) сходится абсолютно и равномерно относительно $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[t_0,T]$, т. е. $\mathcal{E}_{(n)}(x,t)$ определена корректно.

Продифференцируем (формально) $\mathcal{E}_{(n)}$ под знаком интеграла по переменной t:

$$2^n\frac{\partial\mathcal{E}_{(n)}}{\partial t}=\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-t\left(|\xi|^2+\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)}\times$$

$$\times\sin\left(x\xi-t\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin b_{ij}\xi_i\right)\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin b_{ij}\xi_i\,d\xi-$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(|\xi|^2+\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)e^{-t\left(|\xi|^2+\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)}\times$$

$$\times\cos\left(x\xi-t\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin b_{ij}\xi_i\right)d\xi=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-t\left(|\xi|^2+\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)}\times$$

$$\times\xi_i^2\left[\sin b_{ij}\xi_i\sin\left(x\xi-t\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\sum_{l=1}^{m_k} a_{kl}\sin b_{kl}\xi_k\right)-\right.$$

$$- \cos b_{ij}\xi_i \cos\left(x\xi - t\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\sum_{l=1}^{m_k} a_{kl}\sin b_{kl}\xi_k\right)\Bigg]\, d\xi -$$

$$- \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 e^{-t\left(|\xi|^2 + \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)} \times$$

$$\times \cos\left(x\xi - t\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\sum_{l=1}^{m_k} a_{kl}\sin b_{kl}\xi_k\right) d\xi =$$

$$= - \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 e^{-t\left(|\xi|^2 + \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)} \times$$

$$\times \cos\left(x\xi - t\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\sum_{l=1}^{m_k} a_{kl}\sin b_{kl}\xi_k\right) d\xi -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_i^2 e^{-t\left(|\xi|^2 + \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)} \times$$

$$\times \cos\left(x\xi + b_{ij}\xi_i - t\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\sum_{l=1}^{m_k} a_{kl}\sin b_{kl}\xi_k\right) d\xi.$$

Далее, формальное дифференцирование $\mathcal{E}_{(n)}$ под знаком интеграла по переменной x_i дает

$$2^n\frac{\partial^2\mathcal{E}_{(n)}}{\partial x_i^2} = - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_i^2 e^{-t\left(|\xi|^2 + \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)} \times$$

$$\times \cos\left(x\xi - t\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\sum_{l=1}^{m_k} a_{kl}\sin b_{kl}\xi_k\right) d\xi,$$

$$2^n\frac{\partial^2\mathcal{E}_{(n)}}{\partial x_i^2}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + b_{ij}, x_{i+1}, \ldots, x_n, t) =$$

$$= - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_i^2 e^{-t\left(|\xi|^2 + \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)} \times$$

$$\times \cos\left(x\xi + b_{ij}\xi_i - t\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\sum_{l=1}^{m_k} a_{kl}\sin b_{kl}\xi_k\right) d\xi.$$

Каждый из этих интегралов сходится абсолютно и равномерно по $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, T]$ при любом $[t_0, T] \subset (0, +\infty)$, поэтому $\mathcal{E}_{(n)}(x,t)$

удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (7) в $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

Теперь докажем следующее утверждение.

Лемма 7. *Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x-\xi)\mathcal{E}_{(n)}(\xi, t)\, d\xi \tag{9}$$

абсолютно сходится.

Доказательство. В силу абсолютной сходимости интеграла (8) к нему применима теорема Фубини, т. е. $\mathcal{E}_{(n)}(x,t)$ можно представить в виде

$$\frac{1}{2^n} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{n \text{ раз}} \prod_{i=1}^{n} e^{-t\xi_i^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)} \times$$

$$\times \cos \sum_{i=1}^{n}\left(x_i\xi_i - t\xi_i^2 \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin b_{ij}\xi_i\right) d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Подынтегральную функцию последнего интеграла можно разбить на конечное число слагаемых вида

$$\prod_{i=1}^{n} e^{-t\xi_i^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)} g_i\left(x_i\xi_i - t\xi_i^2 \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin b_{ij}\xi_i\right),$$

где $g_i(\tau) = \cos\tau$ либо $g_i(\tau) = \sin\tau$. Значит, последний интеграл представляет собой конечную сумму слагаемых вида

$$\prod_{i=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\tau^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\tau\right)} g_i\left(x_i\tau - t\tau^2 \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin b_{ij}\tau\right) d\tau.$$

При этом только одно из этих слагаемых, а именно

$$\prod_{i=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\tau^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\tau\right)} \cos\left(x_i\tau - t\tau^2 \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin b_{ij}\tau\right) d\tau =$$

$$= 2^n \prod_{i=1}^{n} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t\tau^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\tau\right)} \cos\left(x_i\tau - t\tau^2 \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin b_{ij}\tau\right) d\tau,$$

не содержит под интегралом ни одного синуса, а значит, отлично от нуля; все остальные слагаемые обращаются в нуль, так как каждое из них содержит хотя бы один нулевой сомножитель — интеграл (от нечетной функции) вида

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\tau^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\tau\right)} \sin\left(x_i\tau - t\tau^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin b_{ij}\tau\right) d\tau.$$

Таким образом,

$$\mathcal{E}_{(n)}(x,t) = \prod_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t\tau^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\tau\right)} \cos\left(x_i\tau - t\tau^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin b_{ij}\tau\right) d\tau.$$

Каждый сомножитель последнего произведения есть функция $\mathcal{E}_{a_i,b_i}(x_i,t) = \mathcal{E}(x_i,t)$ вида (1). Зафиксируем произвольное положительное t. Тогда для любого $i = \overline{1,n}$ функция $\mathcal{E}(x_i,t)$ ограничена на $\mathbb{R}^1$. Кроме того, в силу леммы 1 функция $x_i^2\mathcal{E}(x_i,t)$ ограничена на $\mathbb{R}^1$. Поэтому функция $(1+x_i^2)\mathcal{E}(x_i,t)$ также ограничена на $\mathbb{R}^1$, т. е. существует такое положительное M, что из неравенства $|\mathcal{E}(x_i,t)| \leqslant \frac{M}{1+x_i^2}$ на $\mathbb{R}^1$ $(i = \overline{1,n})$ следует неравенство

$$|\mathcal{E}_{(n)}(x,t)| \leqslant \frac{(2M)^n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i^2)}$$

на $\mathbb{R}^n$.

Пусть теперь Ω — произвольная (сколь угодно большая) область в $\mathbb{R}^n$. Существует такое положительное A_0, что

$$\Omega \subset Q(A_0) \overset{\text{def}}{=} \{|x_i| < A_0 \mid i = \overline{1,n}\}.$$

Тогда

$$\int\limits_{Q(A_0)} |u_0(x-\xi)\mathcal{E}_{(n)}(\xi,t)|\,d\xi \leqslant (2M)^n \sup|u_0| \int\limits_{Q(A_0)} \frac{d\xi}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\xi_i^2)} =$$

$$= (2M)^n \sup|u_0| \left(\int\limits_{-A_0}^{A_0} \frac{d\eta}{1+\eta^2}\right)^n =$$

$$= (4M \operatorname{arctg} A_0)^n \sup|u_0| \leqslant (2\pi M)^n \sup|u_0|.$$

Значит, интеграл (9) абсолютно сходится и удовлетворяет той же оценке. □

Таким образом, в $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ определена функция

$$u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}_{(n)}(x-\xi,t) u_0(\xi)\, d\xi. \tag{10}$$

Представляя $\frac{\partial^2 \mathcal{E}_{(n)}}{\partial x_i^2}$, аналогично $\mathcal{E}_{(n)}$ в лемме 7, в виде произведения

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_{a_i,b_i}}{\partial x_i^2} \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} \mathcal{E}_{a_k,b_k}(x_k,t),$$

из леммы 2 и того факта, что $\mathcal{E}_{(n)}$ удовлетворяет уравнению (7), получаем, что функцию (10) можно дифференцировать под знаком интеграла. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть оператор $-L_{(n)}$ сильно эллиптичен в $\mathbb{R}^n$. Тогда функция* (10) *удовлетворяет* (*в классическом смысле*) *уравнению* (7) *в полупространстве* $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

Отметим, что, согласно, например, [21], функция (10) является решением задачи (7), (2) *в смысле обобщенных функций*.

Чтобы установить единственность найденного решения, исследуем, согласно [21], вещественную часть символа эллиптического оператора $L_{(n)}$, содержащегося в уравнении (7). Указанный символ

$$\mathcal{P}(z_1,\ldots,z_n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}(\sigma+i\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}(\sigma_1+i\tau_1,\ldots,\sigma_n+i\tau_n)$$

равен

$$-\sum_{k=1}^{n} z_k^2\left(1+\sum_{j=1}^{m_k} a_{kj}e^{-ib_{kj}z_k}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(\tau_k^2-\sigma_k^2-2i\sigma_k\tau_k)\left(1+\sum_{j=1}^{m_k} a_{kj}e^{-ib_{kj}z_k}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(\tau_k^2-\sigma_k^2-2i\sigma_k\tau_k)\left(1+\sum_{j=1}^{m_k} a_{kj}e^{b_{kj}\tau_k-ib_{kj}\sigma_k}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(\tau_k^2-\sigma_k^2-2i\sigma_k\tau_k) \times$$
$$\times\left(1+\sum_{j=1}^{m_k} a_{kj}e^{b_{kj}\tau_k}\cos b_{kj}\sigma_k - i\sum_{j=1}^{m_k} a_{kj}e^{b_{kj}\tau_k}\sin b_{kj}\sigma_k\right).$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\mathcal{P}(z) = \sum_{k=1}^{n}\Bigg[(\tau_k^2-\sigma_k^2)\Bigg(1+\sum_{j=1}^{m_k} a_{kj}e^{b_{kj}\tau_k}\cos b_{kj}\sigma_k\Bigg) - \\
- 2\sigma_k\tau_k\sum_{j=1}^{m_k} a_{kj}e^{b_{kj}\tau_k}\sin b_{kj}\sigma_k\Bigg] = \\
= |\tau|^2-|\sigma|^2+\sum_{k=1}^{n}\Bigg[(\tau_k^2-\sigma_k^2)\sum_{j=1}^{m_k} a_{kj}e^{b_{kj}\tau_k}\cos b_{kj}\sigma_k - \\
- 2\sigma_k\tau_k\sum_{j=1}^{m_k} a_{kj}e^{b_{kj}\tau_k}\sin b_{kj}\sigma_k\Bigg].
\end{aligned}
$$

Теперь оценим функцию $\mathcal{Q}(z,t_0,t) \overset{\text{def}}{=} e^{(t-t_0)\mathcal{P}(z)}$:

$$
|\mathcal{Q}(z,t_0,t)| \leqslant e^{(t-t_0)[C_1(1+|\sigma|^4)+C_2e^{C_3|\tau|}]}.
$$

Из последней оценки вытекает (см. [21, гл. 2, добавление 1]), что задача (7), (2) имеет не более одного решения в смысле обобщенных функций.

Отметим, что, как и в одномерном случае, единственность имеет место и для более широких классов начальных функций (см. замечание 2); однако по тем же, что и в одномерном случае, причинам мы ограничиваемся рассмотрением непрерывных и ограниченных начальных функций. Аналогично тому, как это сделано в лемме 4, мы можем вычислить интеграл от $\mathcal{E}_{(n)}$ по всему $\mathbb{R}^n$; он равен π^n.

§ 5. СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

В этом разделе мы изучим поведение $u(x,t)$ при $t\to\infty$ в случае нескольких пространственных переменных. Для этого наряду с уравнением (7) рассмотрим уравнение

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \tag{11}
$$

где $p_i = 1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}$, $i=\overline{1,n}$ (отметим, что, как показано выше, все определенные таким образом константы p_i положительны).

Обозначим классическое ограниченное решение задачи (11), (2) через $v(x,t)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. $\lim\limits_{t\to\infty}[u(x,t)-v(x,t)]=0$ *для любого* $x\in\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Возьмем произвольное $x_0 \overset{\mathrm{def}}{=} (x_1^0,\dots,x_n^0)\in\mathbb{R}^n$.

Сделаем в (10) замену переменных: $\eta_i \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{x_i^0-\xi_i}{2\sqrt{t}}$ $(i=\overline{1,n})$. Получим

$$u(x_0,t)=\left(\frac{2\sqrt{t}}{\pi}\right)^n\int\limits_{\mathbb{R}^n}u_0(x_0-2\sqrt{t}\eta)\mathcal{E}_{(n)}(2\sqrt{t}\eta,t)\,d\eta. \tag{12}$$

Имеем

$$t^{\frac{n}{2}}\mathcal{E}_{(n)}(2\sqrt{t}\eta,t)=t^{\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\int\limits_0^\infty e^{-t\tau^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i}a_{ij}\cos b_{ij}\tau\right)}\times$$

$$\times\cos\left(2\eta_i\tau\sqrt{t}-t\tau^2\sum_{j=1}^{m_i}a_{ij}\sin b_{ij}\tau\right)d\tau=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\int\limits_0^\infty e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i}a_{ij}\cos\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)}\cos\left(2z\eta_i-z^2\sum_{j=1}^{m_i}a_{ij}\sin\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)dz,$$

следовательно,

$$u(x_0,t)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\int\limits_{\mathbb{R}^n}u_0(x_0-2\sqrt{t}\eta)\prod_{i=1}^{n}\int\limits_0^\infty e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i}a_{ij}\cos\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)}\times$$

$$\times\cos\left(2z\eta_i-z^2\sum_{j=1}^{m_i}a_{ij}\sin\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)dz\,d\eta,$$

$$v(x_0,t)=\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}u_0(x_1^0-2\sqrt{p_1t}\xi_1,\dots,x_n^0-2\sqrt{p_nt}\xi_n)e^{-|\xi|^2}\,d\xi.$$

Замена переменных $\sqrt{p_i}\xi_i=\eta_i$ $(i=\overline{1,n})$ приводит последнее выражение к виду

$$\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{p_i}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}u_0(x_1^0-2\sqrt{t}\eta_1,\dots,x_n^0-2\sqrt{t}\eta_n)e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\eta_i^2}{p_i}}\,d\eta_i.$$

Таким образом,

$$u(x_0,t)-v(x_0,t)=$$
$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x_0-2\sqrt{t}\eta)\biggl[\prod_{i=1}^n\int\limits_0^\infty e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i}a_{ij}\cos\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)}\times$$
$$\times\cos\biggl(2z\eta_i-z^2\sum_{j=1}^{m_i}a_{ij}\sin\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\biggr)\,dz-\prod_{i=1}^n\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p_i}}\,e^{-\frac{\eta_i^2}{p_i}}\biggr]\,d\eta=$$
$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\Biggl(\int\limits_{Q(A)}+\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus Q(A)}\Biggr)\stackrel{\text{def}}{=}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n(J_1+J_2),\tag{13}$$

где A — положительный параметр, $Q(A)$, как и выше, — куб $\{|x_i|<A\mid i=\overline{1,n}\}$.

Пусть $\varepsilon>0$. В силу леммы 6 для любого $i=\overline{1,n}$ существует такое положительное M_i, что для любого $\eta_i\geqslant 1$ и для любого $t>1$

$$\left|\int\limits_0^\infty e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i}a_{ij}\cos\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)}\cos\biggl(2z\eta_i-z^2\sum_{j=1}^{m_i}a_{ij}\sin\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\biggr)\,dz\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{M_i}{\eta_i^2}\leqslant\frac{2M_i}{1+\eta_i^2}.$$

Кроме того, при $\eta_i\in[0,1]$ левая часть последнего неравенства не превосходит

$$\int\limits_0^\infty e^{-Cz^2}\,dz\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{C}}\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{C}(1+\eta_i^2)},$$

следовательно, для любого вещественного η_i

$$\left|\int\limits_0^\infty e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i}a_{ij}\cos\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)}\cos\biggl(2z\eta_i-z^2\sum_{j=1}^{m_i}a_{ij}\sin\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\biggr)\,dz\right|\leqslant\frac{M_i^*}{1+\eta_i^2},$$

где $M_i^*=\max\bigl(2M_i,\sqrt{\frac{\pi}{C}}\bigr)$.

Таким образом, модуль подынтегрального выражения в (13) не превосходит

$$\sup|u_0|\biggl[\prod_{i=1}^n\frac{M_i^*}{1+\eta_i^2}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{p_i}}\,e^{-\frac{\eta_i^2}{p_i}}\biggr].$$

Значит, интеграл (13) сходится абсолютно и равномерно относительно $t \in (1, +\infty)$, следовательно, существует такое положительное A, что $|J_2| < \frac{\varepsilon\pi^n}{2^{n+1}}$ для любого $t > 1$. Зафиксируем это A и рассмотрим J_1 при $t > 1$.

В силу леммы 5 для любого $i = \overline{1, n}$

$$\int\limits_0^\infty e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)} \times$$
$$\times \cos\left(2z\eta_i - z^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)dz \xrightarrow{t\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4p_i}}\,e^{-\frac{\eta_i^2}{p_i}}$$

равномерно относительно $\eta_i \in (-\infty, +\infty)$.

Поскольку, как только что доказано, каждый из внутренних (одномерных) интегралов выражения (13) ограничен (например, константой M_i^*), то отсюда вытекает, что

$$\prod_{i=1}^n \int\limits_0^\infty e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)} \times$$
$$\times \cos\left(2z\eta_i - z^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)dz \xrightarrow{t\to\infty} \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{4p_i}}\,e^{-\frac{\eta_i^2}{p_i}}$$

равномерно относительно $\eta \in \mathbb{R}^n$. Значит, существует такое положительное T, что для любого $t \in (T, +\infty)$

$$\left|\prod_{i=1}^n \int\limits_0^\infty e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left(2z\eta_i - z^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)dz -\right.$$
$$\left.- \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{4p_i}}\,e^{-\frac{\eta_i^2}{p_i}}\right| \leqslant \frac{\varepsilon\pi^n}{2^{2n+1}A^n \sup|u_0|},$$

т. е. $|J_1| \leqslant \frac{\varepsilon\pi^n}{2^{n+1}}$, следовательно, $|u(x_0, t) - v(x_0, t)| < \varepsilon$.

В силу произвольности выбора положительного ε

$$\lim_{t\to\infty}[u(x_0, t) - v(x_0, t)] = 0.$$

Поскольку x_0 из $\mathbb{R}^n$ выбиралось произвольно, теорема 4 доказана. □

Отсюда, как и в § 3, вытекает следствие.

Следствие 2. *Пусть* $x \in \mathbb{R}^n$, $l \in (-\infty, +\infty)$. *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = l$$

в том и только в том случае, если

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^n} \int\limits_{B_R(p_1,\ldots,p_n)} u_0(x)\,dx = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} \prod\limits_{i=1}^{n} \sqrt{p_i}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}\, l,$$

где

$$B_R(p_1,\ldots,p_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \frac{x_1^2}{p_1} + \ldots + \frac{x_n^2}{p_n} < R \right\}.$$

Замечание 4. Теорема 4 верна и для случая $n = 1$, т. е. кроме теоремы 1 имеет место и асимптотическая близость решений уравнения (1) и уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, однако это не дает новой информации о стабилизации решения: необходимое и достаточное условие стабилизации решения задачи (1), (2), вытекающее из такой теоремы о близости, в точности совпадает с утверждением следствия 1.

§ 6. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ НЕОДНОРОДНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

В данном разделе мы распространим исследование на случай, когда правая часть уравнения (7) содержит и младшие (нелокальные) члены. Мы будем подробно останавливаться лишь на тех моментах, которые существенно отличаются от модельного случая однородного эллиптического оператора, подробно рассмотренного в § 4, 5. Итак, вместо (7) рассматривается следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_{2,i}} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\big(x + h_{ij}^{(2)} e_i, t\big) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_{1,i}} b_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\big(x + h_{ij}^{(1)} e_i, t\big) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij} u\big(x + h_{ij}^{(0)} e_i, t\big). \tag{14}$$

Здесь e_i обозначает i-й координатный вектор в пространстве $\mathbb{R}^n$, $m_{k,i} \in \mathbb{N}$ при $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{0,2}$, коэффициенты a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, $h_{ij}^{(k)}$ предполагаются вещественными при $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{0,2}$, $j = \overline{1,m_k}$.

Вместо (8) определим фундаментальное решение следующим образом:

$$\mathcal{E}_{(n)}(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-t[|\xi|^2+G_1(\xi)]} \cos[x\xi - tG_2(\xi)]\, d\xi, \tag{8$'$}$$

где

$$G_1(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \sum_{j=1}^{m_{2,i}} a_{ij} \cos h_{ij}^{(2)} \xi_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{j=1}^{m_{1,i}} b_{ij} \sin h_{ij}^{(1)} \xi_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij} \cos h_{ij}^{(0)} \xi_i,$$

$$G_2(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \sum_{j=1}^{m_{2,i}} a_{ij} \sin h_{ij}^{(2)} \xi_i -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{j=1}^{m_{1,i}} b_{ij} \cos h_{ij}^{(1)} \xi_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij} \sin h_{ij}^{(0)} \xi_i.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть оператор* $-L_{(n)}$ *сильно эллиптичен в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда функция* (10) *с* $\mathcal{E}_{(n)}$, *заданной формулой* ($8'$), *удовлетворяет* (*в классическом смысле*) *уравнению* (14) *в* $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$ *и является единственным решением* (*в смысле обобщенных функций*) *задачи* (14), (2).

Для доказательства мы прежде всего подставляем функцию ($8'$) в уравнение (14):

$$2^n \frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial t} = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} [\,|\xi|^2 + G_1(\xi)] e^{-t[|\xi|^2+G_1(\xi)]} \cos[x\xi - tG_2(\xi)]\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_2(\xi) e^{-t[|\xi|^2+G_1(\xi)]} \sin[x\xi - tG_2(\xi)]\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-t[|\xi|^2+G_1(\xi)]} \big(G_2(\xi) \sin[x\xi - tG_2(\xi)] -$$

$$- G_1(\xi)\cos[x\xi - tG_2(\xi)] - |\xi|^2 \cos[x\xi - tG_2(\xi)]\big)\, d\xi.$$

Далее,

$$\sin h_{ij}^{(2)} \xi_i \sin[x\xi - tG_2(\xi)] - \cos h_{ij}^{(2)} \xi_i \cos[x\xi - tG_2(\xi)] =$$

$$= -\cos[x\xi + h_{ij}^{(2)} \xi - tG_2(\xi)],$$

$$
\begin{gathered}
-\cos h_{ij}^{(1)}\xi_i \sin[x\xi - tG_2(\xi)] - \sin h_{ij}^{(1)}\xi_i \cos[x\xi - tG_2(\xi)] = \\
= -\sin[x\xi + h_{ij}^{(1)}\xi - tG_2(\xi)], \\
-\sin h_{ij}^{(0)}\xi_i \sin[x\xi - tG_2(\xi)] + \cos h_{ij}^{(0)}\xi_i \cos[x\xi - tG_2(\xi)] = \\
= \cos[x\xi + h_{ij}^{(0)}\xi - tG_2(\xi)],
\end{gathered}
$$

поэтому

$$
\begin{gathered}
2^n \frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial t} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-t[|\xi|^2 + G_1(\xi)]}\Bigg(-|\xi|^2 \cos[x\xi - tG_2(\xi)] - \\
- \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \sum_{j=1}^{m_{2,i}} a_{ij} \cos[x\xi + h_{ij}^{(2)}\xi - tG_2(\xi)] - \\
- \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{j=1}^{m_{1,i}} b_{ij} \sin[x\xi + h_{ij}^{(1)}\xi - tG_2(\xi)] + \\
+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij} \cos[x\xi + h_{ij}^{(0)}\xi - tG_2(\xi)]\Bigg)\, d\xi = \\
= -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_{2,i}} a_{ij} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_i^2 e^{-t[|\xi|^2 + G_1(\xi)]} \cos[(x + h_{ij}^{(2)} e_i)\xi - tG_2(\xi)]\, d\xi - \\
- \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_{1,i}} b_{ij} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_i e^{-t[|\xi|^2 + G_1(\xi)]} \sin[(x + h_{ij}^{(1)} e_i)\xi - tG_2(\xi)]\, d\xi + \\
+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-t[|\xi|^2 + G_1(\xi)]} \cos[(x + h_{ij}^{(0)} e_i)\xi - tG_2(\xi)]\, d\xi - \\
- \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 e^{-t[|\xi|^2 + G_1(\xi)]} \cos[x\xi - tG_2(\xi)]\, d\xi, \\
2^n \frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial x_i} = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_i e^{-t[|\xi|^2 + G_1(\xi)]} \sin[x\xi - tG_2(\xi)]\, d\xi, \\
2^n \frac{\partial^2 \mathcal{E}_n}{\partial x_i^2} = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_i^2 e^{-t[|\xi|^2 + G_1(\xi)]} \cos[x\xi - tG_2(\xi)]\, d\xi.
\end{gathered}
$$

Таким образом, функция $\mathcal{E}_{(n)}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (14) в $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

Теперь представим $G_1(\xi)$ в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\biggl(\xi_i^2\sum_{j=1}^{m_{2,i}}a_{ij}\cos h_{ij}^{(2)}\xi_i+\xi_i\sum_{j=1}^{m_{1,i}}b_{ij}\sin h_{ij}^{(1)}\xi_i-\sum_{j=1}^{m_{0,i}}c_{ij}\cos h_{ij}^{(0)}\xi_i\biggr)\stackrel{\mathrm{def}}{=}$$
$$\stackrel{\mathrm{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}G_{1,i}(\xi_i),$$

а $G_2(\xi)$ — в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\biggl(\xi_i^2\sum_{j=1}^{m_{2,i}}a_{ij}\sin h_{ij}^{(2)}\xi_i-\xi_i\sum_{j=1}^{m_{1,i}}b_{ij}\cos h_{ij}^{(1)}\xi_i-\sum_{j=1}^{m_{0,i}}c_{ij}\sin h_{ij}^{(0)}\xi_i\biggr)\stackrel{\mathrm{def}}{=}$$
$$\stackrel{\mathrm{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}G_{2,i}(\xi_i).$$

Тогда функция $(8')$ принимает вид

$$\frac{1}{2^n}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{n\text{ раз}}\prod_{i=1}^{n}e^{-t[\xi_i^2+G_{1,i}(\xi_i)]}\cos\sum_{i=1}^{n}[x_i\xi_i-tG_{2,i}(\xi_i)]\,d\xi_1\dots d\xi_n.$$

Учитывая, что функция $G_{1,i}$ четная, а функция $G_{2,i}$ нечетная при любом $i=\overline{1,n}$, последнее выражение сводим (аналогично доказательству леммы 7) к следующему виду:

$$\prod_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-t[\tau^2+G_{1,i}(\tau)]}\cos[x_i\tau-tG_{2,i}(\tau)]\,d\tau. \tag{15}$$

Значит, для доказательства разрешимости остается (см. доказательство леммы 7) доказать аналоги лемм 1, 2 для случая, когда функция (одной пространственной переменной) $\mathcal{E}(x,t)$ имеет вид

$$\int\limits_{0}^{\infty}e^{-t[\tau^2+G_1(\tau)]}\cos[x\tau-tG_2(\tau)]\,d\tau,$$

где в качестве G_1, G_2 взяты соответственно $G_{1,i}$, $G_{2,i}$ с произвольным $i=\overline{1,n}$. Для этого, так же, как и в лемме 1, при фиксированном положительном t рассмотрим

$$\int_0^\infty e^{-t[\tau^2+G_1(\tau)]}\cos[tG_2(\tau)]\cos x\tau\,d\tau = \\ = \frac{\sin x\tau}{x}e^{-t[\tau^2+G_1(\tau)]}\cos[tG_2(\tau)]\Big|_{\tau=0}^{\tau=\infty} - \\ -\frac{1}{x}\int_0^\infty \sin x\tau\big(e^{-t[\tau^2+G_1(\tau)]}\cos[tG_2(\tau)]\big)'\,d\tau = \\ = -\frac{1}{x}\int_0^\infty \sin x\tau\big(e^{-t[\tau^2+G_1(\tau)]}\cos[tG_2(\tau)]\big)'\,d\tau$$

(в нуле обращается в нуль первый сомножитель внеинтегрального члена, в бесконечности — второй). Имеем

$$\big(e^{-t[\tau^2+G_1(\tau)]}\cos[tG_2(\tau)]\big)' = \\ = -e^{-t[\tau^2+G_1(\tau)]}\big([2\tau+G_1'(\tau)]\cos[tG_2(\tau)]+tG_2'(\tau)\sin[tG_2(\tau)]\big).$$

Очевидно, $G_1'(0) = G_2(0) = 0$, значит, при повторном интегрировании по частям внеинтегральный член снова обращается в нуль, т. е. имеем

$$-\frac{1}{x^2}\int_0^\infty \cos x\tau\big(e^{-t[\tau^2+G_1(\tau)]}\cos[tG_2(\tau)]\big)''\,d\tau.$$

Последний интеграл есть ограниченная функция переменной x, поэтому лемма 1 для данного случая верна. Точно так же доказывается ограниченность функций $x^2\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x}$, $x^2\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial x^2}$ при любом положительном t.

Далее, в точности повторяя рассуждения, доказывающие теорему 3, доказываем разрешимость.

Для доказательства единственности рассмотрим, как и выше, символ соответствующего эллиптического оператора:

$$\mathcal{P}(z) = -|z|^2 - \sum_{k=1}^n z_k^2\sum_{j=1}^{m_{2,k}} a_{kj}e^{-ih_{kj}^{(2)}z_k} - \\ -i\sum_{k=1}^n z_k\sum_{j=1}^{m_{1,k}} b_{kj}e^{-ih_{kj}^{(1)}z_k} + \sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^{m_{0,k}} c_{kj}e^{-ih_{kj}^{(0)}z_k} =$$

$$
\begin{gathered}
= \sum_{k=1}^{n} (\tau_k^2 - \sigma_k^2 - 2i\sigma_k\tau_k)\Bigl(1 + \sum_{j=1}^{m_{2,k}} a_{kj} e^{h_{kj}^{(2)}\tau_k} \cos h_{kj}^{(2)}\sigma_k - \\
- i \sum_{j=1}^{m_{2,k}} a_{kj} e^{h_{kj}^{(2)}\tau_k} \sin h_{kj}^{(2)}\sigma_k\Bigr) + \\
+ \sum_{k=1}^{n} (\tau_k - i\sigma_k)\Bigl(\sum_{j=1}^{m_{1,k}} b_{kj} e^{h_{kj}^{(1)}\tau_k} \cos h_{kj}^{(1)}\sigma_k - i \sum_{j=1}^{m_{1,k}} b_{kj} e^{h_{kj}^{(1)}\tau_k} \sin h_{kj}^{(1)}\sigma_k\Bigr) + \\
+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_{0,k}} c_{kj} e^{h_{kj}^{(0)}\tau_k} \cos h_{kj}^{(0)}\sigma_k - i \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_{0,k}} c_{kj} e^{h_{kj}^{(0)}\tau_k} \sin h_{kj}^{(0)}\sigma_k.
\end{gathered}
$$

Значит,

$$
\begin{gathered}
\operatorname{Re}\mathcal{P}(z) = \sum_{k=1}^{n}\biggl[(\tau_k^2 - \sigma_k^2)\Bigl(1 + \sum_{j=1}^{m_{2,k}} a_{kj} e^{h_{kj}^{(2)}\tau_k} \cos h_{kj}^{(2)}\sigma_k\Bigr) - \\
- 2\sigma_k\tau_k \sum_{j=1}^{m_{2,k}} a_{kj} e^{h_{kj}^{(2)}\tau_k} \sin h_{kj}^{(2)}\sigma_k + \tau_k \sum_{j=1}^{m_{1,k}} b_{kj} e^{h_{kj}^{(1)}\tau_k} \cos h_{kj}^{(1)}\sigma_k - \\
- \sigma_k \sum_{j=1}^{m_{1,k}} b_{kj} e^{h_{kj}^{(1)}\tau_k} \sin h_{kj}^{(1)}\sigma_k + \sum_{j=1}^{m_{0,k}} c_{kj} e^{h_{kj}^{(0)}\tau_k} \cos h_{kj}^{(0)}\sigma_k\biggr] = \\
= |\tau|^2 - |\sigma|^2 + \sum_{k=1}^{n}\biggl[(\tau_k^2 - \sigma_k^2) \sum_{j=1}^{m_{2,k}} a_{kj} e^{h_{kj}^{(2)}\tau_k} \cos h_{kj}^{(2)}\sigma_k - \\
- 2\sigma_k\tau_k \sum_{j=1}^{m_{2,k}} a_{kj} e^{h_{kj}^{(2)}\tau_k} \sin h_{kj}^{(2)}\sigma_k + \tau_k \sum_{j=1}^{m_{1,k}} b_{kj} e^{h_{kj}^{(1)}\tau_k} \cos h_{kj}^{(1)}\sigma_k - \\
- \sigma_k \sum_{j=1}^{m_{1,k}} b_{kj} e^{h_{kj}^{(1)}\tau_k} \sin h_{kj}^{(1)}\sigma_k + \sum_{j=1}^{m_{0,k}} c_{kj} e^{h_{kj}^{(0)}\tau_k} \cos h_{kj}^{(0)}\sigma_k\biggr].
\end{gathered}
$$

Таким образом, для функции $\mathcal{Q}(z, t_0, t)$ справедлива та же оценка, что и в § 4 (вообще говоря, с другими константами). Это и доказывает единственность построенного решения.

Для исследования асимптотических свойств решения задачи (14), (2) рассмотрим, наряду с указанной задачей, задачу

$$
\frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0; \tag{16}
$$

$$
w|_{t=0} = w_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{17}
$$

где $w_0(x) = u_0(\sqrt{p_1}\,x_1, \ldots, \sqrt{p_n}\,x_n)$, т. е. $w_0(x)$ зависит от положительных параметров $p_1, \ldots, p_n$.

Классическое ограниченное решение последней задачи (которое существует и единственно в силу непрерывности и ограниченности функции $w_0(x)$) будем обозначать через $w(x,t)$.

Далее будем, не ограничивая общности, считать, что для любого $k = \overline{1,n}$ (конечные) числовые последовательности $\{b_{kj}h_{kj}^{(1)}\}_{j=1}^{m_{1,k}}$ и $\{c_{kj}\}_{j=1}^{m_{0,k}}$ упорядочены по неубыванию. Для каждого $k = \overline{1,n}$ обозначим $\min\limits_{b_{kj}h_{kj}^{(1)}>0} j$ через $\tilde m_{1,k}$, $\min\limits_{c_{kj}>0} j$ — через $\tilde m_{0,k}$; для тех k, при которых $b_{kj}h_{kj}^{(1)} \leqslant 0$ ($c_{kj} \leqslant 0$) для всех $j = \overline{1, m_{1,k}}$ ($j = \overline{1, m_{0,k}}$), в качестве $\tilde m_{i,k}$ возьмем $m_{i,k}+1$, $i = 0,1$. Теперь обозначим положительную постоянную

$$1 + \sum_{j=1}^{m_{2,k}} a_{kj} + \sum_{j \geqslant \tilde m_{1,k}} b_{kj}h_{kj}^{(1)}$$

через σ_k, $k = \overline{1,n}$, и, наряду с оператором $L_{(n)}$, стоящим в правой части уравнения (14), рассмотрим оператор $\mathcal{L}$, действующий следующим образом:

$$\mathcal{L}u \overset{\text{def}}{=} \Delta u + \sum_{k=1}^{n}\Bigg[\sum_{j<\tilde m_{0,k}} \frac{c_{kj}}{\sigma_k} u\big(x + h_{kj}^{(0)}e_k, t\big) - \\ - \sum_{j<\tilde m_{1,k}} \frac{2|b_{kj}|}{\sigma_k} u\Big(x + \sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,e_k, t\Big)\Bigg].$$

Отметим, что, хотя *дифференциально-разностный* оператор $\mathcal{L}$ содержит лишь *младшие нелокальные* члены, он зависит и от коэффициентов при *старших нелокальных* членах исходного оператора $L_{(n)}$.

Обозначим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_k}\Bigg(\sum_{j<\tilde m_{0,k}} c_{kj} - 2\sum_{j<\tilde m_{1,k}} |b_{kj}|\Bigg) I - \mathcal{L}$$

через R.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть $R(\xi)$ положительно определен. Тогда*

$$\lim_{t\to\infty}\left[e^{-t\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m_{0,k}} c_{kj}} u(x_0,t) - w\left(\frac{x_1^0 + q_1 t}{\sqrt{p_1}}, \ldots, \frac{x_n^0 + q_n t}{\sqrt{p_n}}, t\right)\right] = 0$$

для любого $x_0 \overset{\text{def}}{=} (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, *где*

$$p_i = 1 + \sum_{j=1}^{m_{2,i}} a_{ij} + \sum_{j=1}^{m_{1,i}} b_{ij} h_{ij}^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij} \big[h_{ij}^{(0)}\big]^2,$$

$$q_i = \sum_{j=1}^{m_{1,i}} b_{ij} + \sum_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij} h_{ij}^{(0)}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что в условиях теоремы $p_1, \dots, p_n$ положительны. Для этого возьмем произвольное $k \in \overline{1,n}$ и в условии положительной определенности $R(\xi)$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_k} \bigg(\sum_{j<\tilde{m}_{0,k}} c_{kj} - 2 \sum_{j<\tilde{m}_{1,k}} |b_{kj}| \bigg) + |\xi|^2 -$$
$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_k} \bigg(\sum_{j<\tilde{m}_{0,k}} c_{kj} \cos h_{kj}^{(0)} \xi_k - 2 \sum_{j<\tilde{m}_{1,k}} |b_{kj}| \cos \sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\, \xi_k \bigg) \geqslant C|\xi|^2$$

положим $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n$ равными нулю. Получим, что

$$\sum_{j<\tilde{m}_{0,k}} c_{kj} - 2 \sum_{j<\tilde{m}_{1,k}} |b_{kj}| + \sigma_k \xi_k^2 +$$
$$+ 2 \sum_{j<\tilde{m}_{1,k}} |b_{kj}| \cos \sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\, \xi_k - \sum_{j<\tilde{m}_{0,k}} c_{kj} \cos h_{kj}^{(0)} \xi_k \geqslant C\xi_k^2$$

для любого положительного ξ_k. Отсюда

$$C\xi_k^2 \leqslant \sigma_k \xi_k^2 - 2 \sum_{j<\tilde{m}_{1,k}} |b_{kj}| \Big(1 - \cos \sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\, \xi_k\Big) +$$
$$+ \sum_{j<\tilde{m}_{0,k}} c_{kj} \big(1 - \cos h_{kj}^{(0)} \xi_k\big) =$$
$$= \sigma_k \xi_k^2 - 4 \sum_{j<\tilde{m}_{1,k}} |b_{kj}| \sin^2 \frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\, \xi_k}{2} + 2 \sum_{j<\tilde{m}_{0,k}} c_{kj} \sin^2 \frac{h_{kj}^{(0)} \xi_k}{2} =$$
$$= \sigma_k \xi_k^2 - \xi_k^2 \sum_{j<\tilde{m}_{1,k}} |b_{kj}|\, \big|h_{kj}^{(1)}\big| \left(\frac{\sin \frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\, \xi_k}{2}}{\frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\, \xi_k}{2}} \right)^2 +$$
$$+ \frac{\xi_k^2}{2} \sum_{j<\tilde{m}_{0,k}} c_{kj} \big[h_{kj}^{(0)}\big]^2 \left(\frac{\sin \frac{h_{kj}^{(0)} \xi_k}{2}}{\frac{h_{kj}^{(0)} \xi_k}{2}} \right)^2,$$

значит,

$$\sigma_k - \sum_{j<\tilde m_{1,k}} |b_{kj}|\,\bigl|h_{kj}^{(1)}\bigr| \left(\frac{\sin \frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k}{2}}{\frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k}{2}} \right)^2 + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j<\tilde m_{0,k}} c_{kj} \bigl[h_{kj}^{(0)}\bigr]^2 \left(\frac{\sin \frac{h_{kj}^{(0)}\,\xi_k}{2}}{\frac{h_{kj}^{(0)}\,\xi_k}{2}} \right)^2 \geqslant C$$

для любого положительного ξ_k. Отсюда

$$\sigma_k - \sum_{j<\tilde m_{1,k}} |b_{kj}|\,\bigl|h_{kj}^{(1)}\bigr| + \frac{1}{2} \sum_{j<\tilde m_{0,k}} c_{kj} \bigl[h_{kj}^{(0)}\bigr]^2 > 0.$$

Действительно, предположим, что, напротив,

$$\sigma_k - \sum_{j<\tilde m_{1,k}} |b_{kj}|\,\bigl|h_{kj}^{(1)}\bigr| + \frac{1}{2} \sum_{j<\tilde m_{0,k}} c_{kj} \bigl[h_{kj}^{(0)}\bigr]^2 \leqslant 0;$$

тогда для любого положительного ξ_k

$$C \leqslant \sigma_k + \sum_{j<\tilde m_{1,k}} |b_{kj}|\,\bigl|h_{kj}^{(1)}\bigr| - \sum_{j<\tilde m_{1,k}} |b_{kj}|\,\bigl|h_{kj}^{(1)}\bigr| + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j<\tilde m_{0,k}} c_{kj} \bigl[h_{kj}^{(0)}\bigr]^2 - \frac{1}{2} \sum_{j<\tilde m_{0,k}} c_{kj} \bigl[h_{kj}^{(0)}\bigr]^2 - \\ - \sum_{j<\tilde m_{1,k}} |b_{kj}|\,\bigl|h_{kj}^{(1)}\bigr| \left(\frac{\sin \frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\xi_k}{2}}{\frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k}{2}} \right)^2 + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j<\tilde m_{0,k}} c_{kj} \bigl[h_{kj}^{(0)}\bigr]^2 \left(\frac{\sin \frac{h_{kj}^{(0)}\,\xi_k}{2}}{\frac{h_{kj}^{(0)}\,\xi_k}{2}} \right)^2 = \\ = \sigma_k - \sum_{j<\tilde m_{1,k}} |b_{kj}|\,\bigl|h_{kj}^{(1)}\bigr| + \frac{1}{2} \sum_{j<\tilde m_{0,k}} c_{kj} \bigl[h_{kj}^{(0)}\bigr]^2 - \\ - \sum_{j<\tilde m_{1,k}} |b_{kj}|\,\bigl|h_{kj}^{(1)}\bigr| \left[\left(\frac{\sin \frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k}{2}}{\frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k}{2}} \right)^2 - 1 \right] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j<\tilde m_{0,k}} c_{kj} \bigl[h_{kj}^{(0)}\bigr]^2 \left[\left(\frac{\sin \frac{h_{kj}^{(0)}\,\xi_k}{2}}{\frac{h_{kj}^{(0)}\,\xi_k}{2}} \right)^2 - 1 \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{j<\tilde{m}_{0,k}} c_{kj}\big[h_{kj}^{(0)}\big]^2\left[\left(\frac{\sin\frac{h_{kj}^{(0)}\,\xi_k}{2}}{\frac{h_{kj}^{(0)}\,\xi_k}{2}}\right)^2-1\right]-$$

$$-\sum_{j<\tilde{m}_{1,k}} |b_{kj}|\,\big|h_{kj}^{(1)}\big|\left[\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k}{2}}{\frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k}{2}}\right)^2-1\right].$$

Однако в силу конечности сумм можно выбрать столь малое $\xi_k>0$, что последнее выражение не превзойдет $\frac{C}{2}$. Полученное противоречие и доказывает положительность величины

$$\sigma_k-\sum_{j<\tilde{m}_{1,k}}|b_{kj}|\,\big|h_{kj}^{(1)}\big|+\frac{1}{2}\sum_{j<\tilde{m}_{0,k}}c_{kj}\big[h_{kj}^{(0)}\big]^2=$$

$$=1+\sum_{j=1}^{m_{2,k}}a_{kj}+\sum_{j\geqslant\tilde{m}_{1,k}}b_{kj}h_{kj}^{(1)}-\sum_{j<\tilde{m}_{1,k}}|b_{kj}|\,\big|h_{kj}^{(1)}\big|+\frac{1}{2}\sum_{j<\tilde{m}_{0,k}}c_{kj}\big[h_{kj}^{(0)}\big]^2=$$

$$=1+\sum_{j=1}^{m_{2,k}}a_{kj}+\sum_{j=1}^{m_{1,k}}b_{kj}h_{kj}^{(1)}+\frac{1}{2}\sum_{j<\tilde{m}_{0,k}}c_{kj}\big[h_{kj}^{(0)}\big]^2,$$

значит, p_k тем более положительно.

Теперь зафиксируем произвольное x_0 из $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$w\left(\frac{x_1^0+q_1t}{\sqrt{p_1}},\dots,\frac{x_n^0+q_nt}{\sqrt{p_n}},t\right)=$$

$$=\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}u_0(\sqrt{p_1}\,\xi_1,\dots,\sqrt{p_n}\,\xi_n)e^{-\frac{1}{4t}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^0+q_it}{\sqrt{p_i}}-\xi_i\right)^2}d\xi=$$

$$=\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n\prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{p_i}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}u_0(\eta)e^{-\frac{1}{t}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i^0+q_it-\eta_i)^2}{4p_i}}d\eta=$$

$$=\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{p_i}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}u_0(x_0-2\sqrt{t}\xi)e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(2\xi_i+q_i\sqrt{t})^2}{4p_i}}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2^n\pi^{\frac{n}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{p_i}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}u_0(x_0+tq-\sqrt{t}y)e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{y_i^2}{4p_i}}dy,$$

где q обозначает вектор $(q_1,\dots,q_n)$.

Далее, в силу (12) и (15)

$$u(x_0,t)=\left(\frac{2\sqrt{t}}{\pi}\right)^n\int\limits_{\mathbb{R}^n}u_0(x_0-2\sqrt{t}\eta)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^n\int\limits_0^\infty e^{-t[\tau^2+G_{1,i}(\tau)]}\cos[2\sqrt{t}\eta_i\tau-tG_{2,i}(\tau)]\,d\tau\,d\eta=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{t}}{\pi}\right)^n\int\limits_{\mathbb{R}^n}u_0(x_0+tq-\sqrt{t}y)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^n\int\limits_0^\infty e^{-t[\tau^2+G_{1,i}(\tau)]}\cos[y_i\tau\sqrt{t}-q_i\tau t-tG_{2,i}(\tau)]\,d\tau\,dy,$$

следовательно,

$$e^{-t\sum\limits_{k=1}^n\sum\limits_{j=1}^{m_{0,k}}c_{kj}}u(x_0,t)=\left(\frac{\sqrt{t}}{\pi}\right)^n\int\limits_{\mathbb{R}^n}u_0(x_0+tq-\sqrt{t}y)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^n\int\limits_0^\infty e^{-t[\tau^2+G_{1,i}(\tau)+\sum\limits_{j=1}^{m_{0,i}}c_{ij}]}\cos[y_i\tau\sqrt{t}-q_i\tau t-tG_{2,i}(\tau)]\,d\tau\,dy=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}\right)^n\int\limits_{\mathbb{R}^n}u_0(x_0+tq-\sqrt{t}y)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^n\int\limits_0^\infty e^{-z^2-tG_{1,i}\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right)-t\sum\limits_{j=1}^{m_{0,i}}c_{ij}}\cos\left[y_iz-q_iz\sqrt{t}-tG_{2,i}\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right)\right]dz\,dy.$$

Таким образом,

$$e^{-t\sum\limits_{k=1}^n\sum\limits_{j=1}^{m_{0,k}}c_{kj}}u(x_0,t)-w\left(\frac{x_1^0+q_1t}{\sqrt{p_1}},\ldots,\frac{x_n^0+q_nt}{\sqrt{p_n}},t\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}\right)^n\int\limits_{\mathbb{R}^n}u_0(x_0+tq-\sqrt{t}y)\left(\prod_{i=1}^n\int\limits_0^\infty e^{-z^2-tG_{1,i}(\frac{z}{\sqrt{t}})-t\sum\limits_{j=1}^{m_{0,i}}c_{ij}}\times\right.$$

$$\left.\times\cos\left[y_iz-q_iz\sqrt{t}-tG_{2,i}\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right)\right]dz-\prod_{i=1}^n\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p_i}}e^{-\frac{y_i^2}{4p_i}}\right)dy. \qquad (18)$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 8. *В условиях теоремы* 6 *для любого* $i = \overline{1, n}$

$$\int\limits_0^\infty e^{-z^2 - tG_{1,i}\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) - t\sum\limits_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij}} \times$$

$$\times \cos\left[yz - q_i z\sqrt{t} - tG_{2,i}\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right)\right] dz - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p_i}} e^{-\frac{y^2}{4p_i}} \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

равномерно относительно $y \in (-\infty, +\infty)$.

Лемма 9. *В условиях теоремы* 6 *для любого* $i = \overline{1, n}$ *существует такое* M_i, *зависящее только от коэффициентов уравнения* (14), *что*

$$\left|\int\limits_0^\infty e^{-z^2 - tG_{1,i}\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) - t\sum\limits_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij}} \cos\left[yz - q_i z\sqrt{t} - tG_{2,i}\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right)\right] dz\right| < \frac{M}{y^2}$$

для любого $y \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ *и любого* $t \in [1, \infty)$.

Доказательство леммы 9 проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 6 (см. также [18, лемма 5]).

Для доказательства леммы 8 показатель ее подынтегральной экспоненты представляется в виде

$$-z^2 - z^2\sum_{j=1}^{m_{2,i}} a_{ij}\cos\frac{h_{ij}^{(2)}z}{\sqrt{t}} - z\sqrt{t}\sum_{j=1}^{m_{1,i}} b_{ij}\sin\frac{h_{ij}^{(1)}z}{\sqrt{t}} +$$

$$+ t\sum_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij}\left(\cos\frac{h_{ij}^{(0)}z}{\sqrt{t}} - 1\right) =$$

$$= -z^2\left(1 + \sum_{j=1}^{m_{2,i}} a_{ij}\cos\frac{h_{ij}^{(2)}z}{\sqrt{t}}\right) - z\sqrt{t}\sum_{j=1}^{m_{1,i}} b_{ij}\frac{\sin\frac{h_{ij}^{(1)}z}{\sqrt{t}}}{\frac{h_{ij}^{(1)}z}{\sqrt{t}}}\,\frac{h_{ij}^{(1)}z}{\sqrt{t}} -$$

$$- 2t\sum_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij}\sin^2\frac{h_{ij}^{(0)}z}{2\sqrt{t}} =$$

$$= -z^2\left[1 + \sum_{j=1}^{m_{2,i}} a_{ij}\cos\frac{h_{ij}^{(2)}z}{\sqrt{t}} + \sum_{j=1}^{m_{1,i}} b_{ij}h_{ij}^{(1)}\frac{\sin\frac{h_{ij}^{(1)}z}{\sqrt{t}}}{\frac{h_{ij}^{(1)}z}{\sqrt{t}}} +\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij}\left[h_{ij}^{(0)}\right]^2\left(\frac{\sin\frac{h_{ij}^{(0)}z}{2\sqrt{t}}}{\frac{h_{ij}^{(0)}z}{2\sqrt{t}}}\right)^2\right],$$

а аргумент ее подынтегрального косинуса — в виде

$$z\left(y - q_i\sqrt{t} + \sqrt{t}\sum_{j=1}^{m_{1,i}} b_{ij}\cos\frac{h_{ij}^{(1)}z}{\sqrt{t}}\right) -$$

$$- z^2\sum_{j=1}^{m_{2,i}} a_{ij}\sin\frac{h_{ij}^{(2)}z}{\sqrt{t}} + t\sum_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij}\frac{\frac{\sin h_{ij}^{(0)}z}{\sqrt{t}}}{\frac{h_{ij}^{(0)}z}{\sqrt{t}}}\,\frac{h_{ij}^{(0)}z}{\sqrt{t}} =$$

$$= z\left(y - q_i\sqrt{t} + \sqrt{t}\sum_{j=1}^{m_{1,i}} b_{ij}\cos\frac{h_{ij}^{(1)}z}{\sqrt{t}} + \sqrt{t}\sum_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij}h_{ij}^{(0)}\frac{\frac{\sin h_{ij}^{(0)}z}{\sqrt{t}}}{\frac{h_{ij}^{(0)}z}{\sqrt{t}}}\right) -$$

$$- z^2\sum_{j=1}^{m_{2,i}} a_{ij}\sin\frac{h_{ij}^{(2)}z}{\sqrt{t}}.$$

Дальнейшее доказательство леммы 8 аналогично доказательству леммы 5 (см. также [18, лемма 4]). Теперь мы можем представить (18) в виде суммы (13) и оценить ее так же, как и при доказательстве теоремы 4 (используя леммы 8, 9 вместо лемм 5, 6 соответственно). Это и завершает доказательство теоремы 6. □

Замечание 5. Экспоненциальный вес, возникающий в доказанных теоремах о близости решений, обусловлен не нелокальностью, а диссипативностью задачи. Указанный вес сохраняется и в классическом случае: при нулевых сдвигах $h_{ij}^{(k)}$ разность, оцениваемая в теореме 6, обращается в нуль не только в пределе, но и тождественно.

Замечание 6. Легко видеть, что функция

$$\omega(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} w\left(\frac{x_1 + q_1 t}{\sqrt{p_1}}, \ldots, \frac{x_n + q_n t}{\sqrt{p_n}}, t\right)$$

является классическим ограниченным решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} q_i\frac{\partial u}{\partial x_i}, \tag{19}$$

удовлетворяющим начальному условию (2), поэтому в теореме о (весовой) близости решений можно использовать задачу (19), (2) вместо задачи (16), (17). Отметим в этой связи, что качественно иной по сравнению с модельным случаем однородного эллиптического оператора в правой части уравнения (ср. с теоремой 4) характер поведения решения, установленный теоремой 6, сохраняется и в случае отсутствия нелокальных *старших* членов (ср. с [18, теорема 2]). Таким образом, добавление в параболическое дифференциально-разностное уравнение младших членов может, как и в классической параболической теории (см. [26]), приводить к качественно новым эффектам.

Автор выражает глубокую признательность А. Л. Скубачевскому за постоянное внимание к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
2. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
3. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. Basel: Birkhäuser, 1997.
4. *Kunisch K., Schappacher W.* Necessary conditions for partial differential equations with delay to generate C_0-semigroups // J. Different. Equations. 1983. V. 50, N 1. P. 49—79.
5. *Desch W., Schappacher W.* Spectral properties of finite-dimensional perturbed linear semigroups // Ibid. V. 59, N 1. P. 80—102.
6. *Власов В. В.* Об одном классе дифференциально-разностных уравнений в гильбертовых пространствах и некоторых спектральных вопросах // Докл. РАН. 1992. Т. 327, № 4—6. С. 428—432.
7. *Борок В. М., Виглин Е. С.* О единственности решения основной начальной задачи для уравнений в частных производных с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, №7. С. 1225—1232.
8. *Дашевский А. И.* Критерий ограниченности решений линейных дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием аргумента в банаховом пространстве // Там же. № 8. С. 1512—1515.
9. *Inone A., Miyakawa T., Yoshida K.* Some properties of solutions for semilinear heat equations with time lag // J. Different. Equations. 1977. V. 24, N 3. P. 383—396.
10. *Blasio G. Di., Kunisch K., Sinestrari E.* L_2-regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delay in highest-order derivatives // J. Math. Anal. Appl. 1984. V. 102, N 1. P. 38—57.
11. *Власов В. В., Сакбаев В. Ж.* Корректная разрешимость некоторых дифференциально-разностных уравнений в шкале пространств Соболева // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 9. С. 1194—1202.

12. *Гуревич Б. Л.* Новые типы пространств основных и обобщенных функций и задачи Коши для систем дифференциально-разностных уравнений // ДАН СССР. 1956. Т. 108, № 6. С. 1001—1003.

13. *Рабинович В. С.* О задаче Коши для параболических дифференциально-разностных операторов с переменными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 6. С. 1032—1038.

14. *Скубачевский А. Л.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений // УМН. 1996. Т. 51, № 1. С. 169—170.

15. *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics // Nonlinear Anal. 1998. V. 32, N 2. P. 261—278.

16. *Скубачевский А. Л., Шамин Р.В.* Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения // Мат. заметки. 1999. Т. 66, № 1. С. 145—153.

17. *Muravnik A. B.* On Cauchy problem for parabolic differential-difference equations // Nonlinear Anal. 2002. V. 51, N 2. P. 215—238.

18. *Муравник А. Б.* О задаче Коши для некоторых дифференциально-разностных уравнений параболического типа // Докл. РАН. 2002. Т. 385, № 5. С. 604—607.

19. *Razgulin A. V.* Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback // Chaos in Optics. Proc. SPIE. 1993. V. 2039. P. 342—352.

20. *Vorontsov M. A., Iroshnikov N. G., Abernathy R. L.* Diffractive patterns in a nonlinear optical two-dimensional feedback system with field rotation // Chaos Solitons Fractals. 1994. V. 4. P. 1701—1716.

21. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.

22. *Борок В. М., Житомирский Я. И.* О задаче Коши для линейных уравнений в частных производных с линейно преобразованным аргументом // ДАН СССР. 1971. Т. 200, № 3. С. 515—518.

23. *Ладыженская О. А.* О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения // Мат. сб. 1950. Т. 27 (59), № 2. С. 175—184.

24. *Репников В. Д., Эйдельман С. Д.* Необходимые и достаточные условия установления решения задачи Коши // ДАН СССР. 1996. Т. 167, № 2. С. 298—301.

25. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1985.

26. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* УМН. 1962. Т. 17, № 3. С. 3—145.