1. Серьезная задача. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2 \ni u = (p, q)$

$$\frac{du}{dt} = Au + F(u,t), \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

По-другому:

$$\begin{cases} \dot{p} = \quad p + F_1(p,q,t) \\ \dot{q} = -q + F_2(p,q,t) \end{cases}$$

Если никакой нелинейной функции $F(u,t)$ нет, то получаем стандартное седло — убегание на бесконечность по p при $t \to +\infty$ и стремление к нулю по q.

Известно, что картинка остается, по сути, такой же при условиях

$$F(0,t) \equiv 0, \qquad |F(u_1,t) - F(u_2,t)| \leqslant L|u_1 - u_2|, \qquad \text{где} \quad L < 1.$$

А именно, в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_t \ni (u,t)$

1) существует поверхность $M_+ = \{q = \Phi_+(p,t)\}$, состоящая из интегральных кривых, стремящихся к нулю при $t \to -\infty$, то есть $M_+ = \{(u(t),t) \mid u(t) \to 0 \text{ при } t \to -\infty\}$;

2) существует поверхность $M_- = \{p = \Phi_-(q,t)\}$, состоящая из интегральных кривых, стремящихся к нулю при $t \to +\infty$, то есть $M_- = \{(u(t),t)) \mid u(t) \to 0 \text{ при } t \to +\infty\}$;

3) произвольная интегральная кривая $(u(t),t)$ исходной системы стремится, причем с экспоненциальной скоростью, к M_+ при $t \to +\infty$ и к M_- при $t \to -\infty$.

Функции Φ_+ и Φ_- удовлетворяют условию Липшица по пространственной переменной с константой Липшица, меньшей 1. Как следствие, эти поверхности пересекаются по нулевому решению: $M_+ \cap M_- = (0,t)$.

Доказательство могу прислать — напишите на `goritsky@mech.math.msu.su`

Вопрос. Можно ли заменить условие Липшица на следующее:

$$|F(u_1,t) - F(u_2,t)| \leqslant L(t) \cdot |u_1 - u_2|$$

и получить аналогичный результат при условии малости $L(t)$ не в виде $\sup_{t\in\mathbb{R}} L(t) < 1$, а в некотором "интегральном смысле" (разрешив большие, но короткие всплески для $L(t)$), например, так:

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \int_{\tau}^{\tau+1} L(t)\,dt \quad \text{— мало ?}$$

2. "Школьная" задача.

Рассмотрим сумму N гармонических колебаний с целыми частотами

$$f(t) = A_1 \sin(k_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(k_2 t + \varphi_2) + \dots + A_N \sin(k_N t + \varphi_N) \not\equiv 0 \tag{1}$$

Предполагается, что $k_j \in \mathbb{N}$, $k_1 < k_2 < \dots < k_N$ и наибольший общий делитель чисел $k_1, k_2, \dots, k_N$ равен 1, т.е. частоты взаимно просты в совокупности.

Функция $f(t)$ — 2π-периодична. Обозначим через $\nu(f)$ половину количества нулей (посчитанных с учетом кратности) функции $f(t)$ на полуинтервале $[0; 2\pi)$ (на периоде), так что

$$\nu(\sin(kt+\varphi)) = k \quad \text{при любых } k \text{ и } \varphi.$$

Теорема. Для функций $f(t)$ вида (1) выполнено

1. $k_1 \leqslant \nu(f) \leqslant k_N$;
2. если среди чисел $k_1, k_2, \dots, k_N$ есть хоть одно четное, то $\nu(f)$ может принимать любое **целое** значение от k_1 до k_N;
3. если все числа $k_1, k_2, \dots, k_N$ нечетные, то $\nu(f)$ может принимать любое **нечетное** значение от k_1 до k_N.

Пункты 2 и 3 умею доказывать только для $N = 2$ (доказательство могу прислать).

Для начал можно попробовать, например, доказать, что у функции

$$f(t) = A_1 \sin(10t + \varphi_1) + A_2 \sin(12t + \varphi_2) + A_3 \sin(15t + \varphi_3)$$

в зависимости от наборов A и φ на полуинтервале $[0; 2\pi)$ может быть 22, 26 или 28 нулей (20, 24 и 30 — тривиально). Подходящие значения A и φ легко получить, строя графики на компьютере, но интересно нащупать общий подход к доказательству.