

Н. О. Максимова*

**О ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ
КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО
ТИПА, РАВНЫХ НУЛЮ НА МНОЖЕСТВЕ
ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЫ**

В работе доказано, что любое целое неотрицательное решение некоторого класса эллиптических дифференциальных неравенств, равное нулю на подмножестве положительной меры, является тривиальным.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ дифференциальное неравенство

$$\operatorname{div} A(x, u, Du) + b(x, u, Du) + c(x)[g(u)]^{q-1} \leq 0, \quad (1)$$

где $q = \operatorname{const} > 1$, A — каратеодориева функция,

$$A: \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

b — также каратеодориева функция,

$$b: \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Предполагаем, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ и вещественного числа $M > 0$ найдутся постоянные C_1, C_2, C_3 , такие, что

$$A(x, u, \xi)\xi \geq C_1|\xi|^q, \quad |A(x, u, \xi)| \leq C_2|\xi|^{q-1}, \quad |b(x, u, \xi)| \leq C_3|\xi|^{q-1}$$

для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in K$, $u \in [0, M]$, $c(x) \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, будем предполагать, что при любых $M, \varepsilon > 0$ справедливо $\frac{1}{|g(u)|} \in L^1([\varepsilon, M])$ и

$$\int_0^1 \frac{dt}{|g(t)|} = \infty. \quad (2)$$

*© Максимова Н. О., 2006 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решением неравенства (1) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ назовем функцию $u \in W_{q,\text{loc}}^1(\Omega) \cap L_{\text{loc}}^\infty(\Omega)$, удовлетворяющую соотношению

$$-\int_{\Omega} A(x, u, Du) D\varphi dx + \int_{\Omega} b(x, u, Du) \varphi dx + \int_{\Omega} c(x)[g(u)]^{q-1} \varphi dx \leq 0 \quad (3)$$

для любой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Пусть B_r — шар с центром в нуле радиуса r , $r > 0$.

ТЕОРЕМА. Неотрицательное решение неравенства (1) в $\mathbb{R}^n$, равное нулю на некотором множестве $Q \subset \mathbb{R}^n$ положительной меры, равно нулю в $\mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u — неотрицательное решение неравенства (1) в $\mathbb{R}^n$, причем $u(x) = 0$ почти всюду на некотором измеримом множестве $Q \subset \mathbb{R}^n$, $\text{mes } Q > 0$. Докажем, что тогда $u(x) = 0$ повсюду в $\mathbb{R}^n$. Без потери общности можно считать, что $\text{mes}(Q \cap B_1) > 0$. Пусть $M = \text{ess sup}_{x \in B_2} u(x)$. Положим

$$G(s) = \int_s^M \frac{dt}{g(t)} \quad \text{на } (0, M), \quad G_1(s) = \int_s^{G(\varepsilon)} [|G_s(G^{-1}(t))|]^{q-1} dt,$$

$$w_\varepsilon(x) = G(u(x) + \varepsilon), \quad v_\varepsilon(x) = \frac{w_\varepsilon(x)}{G(\varepsilon)} \quad \text{на } B_2,$$

где $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 < 1$.

Определим срезающую $\eta(x) \in C^2(\bar{B}_2)$ равенством

$$\eta(x) = \begin{cases} \left(4 - \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\beta_1} & \text{в } B_2, \\ 0 & \text{вне } B_2, \end{cases}$$

где $\beta_1 = \text{const}$, причем $\beta_1 \geq \frac{2q}{2q-1}$. Заметим, что $(2\beta_1 - 2)q - \beta_1 \geq 0$.

Подставив в интегральное неравенство (3) $\varphi_\varepsilon(x) = \eta(x)G_1(w_\varepsilon(x))$, получим

$$-\int_{B_2} A(x, u, Du) D\varphi_\varepsilon dx + \int_{B_2} b(x, u, Du) \varphi_\varepsilon dx + \int_{B_2} c(x)[g(u)]^{q-1} \varphi_\varepsilon dx \leq 0 \quad (4)$$

для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Перепишем неравенство (4) следующим образом:

$$\begin{aligned} & - \int_{B_2} A(x, u, Du) Dw_\varepsilon G_{1s}(w_\varepsilon) \eta \, dx - \int_{B_2} A(x, u, Du) D\eta G_1(w_\varepsilon) \, dx + \\ & + \int_{B_2} b(x, u, Du) \varphi_\varepsilon \, dx + \int_{B_2} c(x) [g(u)]^{q-1} \varphi_\varepsilon \, dx \leq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Из оценки (5) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{B_2} C_1 \left(\sum_{i=1}^n w_{\varepsilon x_i}^2 \right)^{\frac{q}{2}} \eta \, dx - \\ & - \int_{B_2} C_2 \left(\sum_{i=1}^n w_{\varepsilon x_i}^2 \right)^{\frac{q-1}{2}} [g(u(x) + \varepsilon)]^{q-1} G_1(w_\varepsilon) \left[\sum_{i=1}^n |\eta_{x_i}| \right] \, dx - \\ & - \int_{B_2} C_3 \eta \left(\sum_{i=1}^n w_{\varepsilon x_i}^2 \right)^{\frac{q-1}{2}} - \int_{B_2} |c(x)| G_1(w_\varepsilon) [g(u)]^{q-1} \eta \, dx. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} |g(u(x))|^{q-1} G_1(w_\varepsilon) & \leq |g(u(x) + \varepsilon)|^{q-1} \int_{w_\varepsilon(x)}^{K_\varepsilon} \left[\frac{1}{g(u(x) + \varepsilon)} \right]^{q-1} dx \leq K_\varepsilon, \\ G_1(w_\varepsilon(x)) [g(u(x) + \varepsilon)]^{q-1} & \leq [g(u(x) + \varepsilon)]^{q-1} K_\varepsilon \frac{1}{[g(u(x) + \varepsilon)]^{q-1}} \leq K_\varepsilon \end{aligned}$$

для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Здесь $K_\varepsilon = G(\varepsilon)$.

Мы считаем, что g — неубывающая функция на некотором $[0, M_1]$, $M_1 > 0$.

Из предыдущих неравенств и неравенства Гельдера вытекает следующая оценка:

$$\begin{aligned} & \int_{B_2} C_1 \left[\sum_{i=1}^n w_{\varepsilon x_i}^2 \right]^{\frac{q}{2}} \eta \, dx \leq \int_{B_2} \frac{C_1}{4} \eta \left(\sum_{i=1}^n w_{\varepsilon x_i} \right)^{\frac{q}{2}} dx + \\ & + C_4 \int_{B_2} \sum_{i=1}^n \frac{|\eta_{x_i}|^q}{\eta} K_\varepsilon^q \, dx + \frac{C_1}{4} \int_{B_2} \eta \left(\sum_{i=1}^n w_{\varepsilon x_i} \right)^{\frac{q}{2}} dx + C_5 K_\varepsilon^q + C_6 K_\varepsilon \end{aligned} \quad (6)$$

для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, где C_4, C_5, C_6 — постоянные, не зависящие от ε .

Из оценки (6) окончательно получаем

$$\int_{B_2} \eta \left(\sum_{i=1}^n v_{\varepsilon x_i}^2 \right)^{\frac{q}{2}} dx \leq C_7 \quad (7)$$

для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, где C_7 не зависит от ε .

Заметим, что $K_\varepsilon \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ ввиду условия (2). Пусть

$$v_\varepsilon = \frac{w_\varepsilon(x)}{K_\varepsilon}.$$

Тогда из неравенства (7) вытекает оценка

$$\int_{B_{2-\delta}} \left(\sum_{i=1}^n v_{\varepsilon x_i}^2 \right)^{\frac{q}{2}} + \int_{B_{2-\delta}} v_\varepsilon^q dx \leq C(\delta), \quad (8)$$

верная при любом $\delta \in (0, 1)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, где $C(\delta)$ зависит только от δ и не зависит от ε .

Справедливы также следующие замечания:

- (i) $|v_\varepsilon(x)| \leq 1$ почти всюду в B_2 ;
- (ii) $v_\varepsilon(x_0) \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, если $u(x_0) = 0$, так как в этом случае $v_\varepsilon(x_0) = \frac{K_\varepsilon}{K_\varepsilon} = 1$ при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$;
- (iii) если $u(x_0) > 0$, то $v_\varepsilon(x_0) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Действительно, в этом случае

$$v_\varepsilon(x_0) = K_\varepsilon^{-1} \int_{u(x_0)+\varepsilon}^M \frac{1}{g(t)} dt \leq K_\varepsilon^{-1} \int_{u(x_0)}^M \frac{1}{g(t)} dt \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$;

- (iv) $v_{\varepsilon x_i}(x) = K_\varepsilon^{-1} w_{\varepsilon x_i}(x) = -K_\varepsilon^{-1} \frac{u_{x_i}(x)}{g(u(x)+\varepsilon)}$ при любом $x \in B_2$, $i = 1, \dots, n$.

Из соотношений (8) и (iv) следует, что $u_{x_i}(x) = 0$ почти всюду на $S_0 = \{x: x \in B_2, u(x) = 0\}$, $i = 1, \dots, n$. Действительно, если $u(x) = 0$, то $v_{\varepsilon x_i}(x) = -K_\varepsilon^{-1}(g(\varepsilon))^{-1}u_{x_i}(x)$ почти всюду на S_0 , $i = 1, \dots, n$, и поэтому

$$\int_{S_0 \cap B_{2-\delta}} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right)^{\frac{q}{2}} dx \leq C(\delta)(K_\varepsilon g(\varepsilon))^q \quad (9)$$

для любых $\delta \in (0, 1)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Следовательно, $u_{x_i}(x) = 0$ почти всюду на $S_0 \cap B_{2-\delta}$, $i = 1, \dots, n$, для любого $\delta \in (0, 1)$. Мы учли, что существует последовательность $\{\varepsilon_l\}$, $l = 1, \dots$, такая, что $\varepsilon_l + K(\varepsilon_l)g(\varepsilon_l) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow +\infty$. Если бы такой последовательности не нашлось, то производная $[\ln G(y)]_y$ была бы ограничена на $(0, \varepsilon_0]$. А это противоречит равенству $\lim_{y \rightarrow 0} G(y) = +\infty$ (если производная функции ограничена на полуинтервале, то и функция ограничена на полуинтервале). Заметим, что $[\ln G(y)]_y = (G(y)g(y))^{-1}$ на $(0, \varepsilon_0]$. Подставляя в неравенство (9) последовательно члены $\{\varepsilon_l\}$ и устремив l к бесконечности, получаем

$$\int_{S_0 \cap B_{2-\delta}} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right)^{\frac{q}{2}} dx = 0$$

при любом $\delta \in (0, 1)$. Поэтому $u_{x_i}(x) = 0$ почти всюду на $S_0 \cap B_{2-\delta}$, $i = 1, \dots, n$, при любом $\delta \in (0, 1)$.

По теореме Фату семейство $\{v_\varepsilon\}$ сходится поточечно при $\varepsilon \rightarrow 0$ к некоторой функции u_0 , принадлежащей $L^q(B_{2-\delta})$ для любого $\delta \in (0, 1)$. Как было показано, u_0 принимает только значения нуль или единица. Покажем, что семейство $\{v_\varepsilon\}$ сходится в $L^q(B_{2-\delta})$ к u_0 при любом $\delta \in (0, 1)$. Действительно, иначе существовала бы убывающая последовательность $\{\varepsilon_p\}$, такая, что $\varepsilon_p \rightarrow 0$ при $p \rightarrow +\infty$, $\{v_{\varepsilon_p}\}$ сходится в $L^q(B_{2-\delta})$ и

$$\int_{B_{2-\delta}} |v_{\varepsilon_p} - u_0|^q dx \geq \alpha_0 \quad (10)$$

для некоторого положительного α_0 и $p = 1, \dots$. Но тогда, в силу сходимости $\{v_{\varepsilon_p}\}$ в $L^q(B_{2-\delta})$, для любого $\tau \in (0, 1)$ существует натуральное $p(\tau)$, зависящее только от τ и такое, что для любых натуральных p_1, p_2 , $p_1 \geq p_2 \geq p(\tau)$, справедлива оценка

$$\int_{B_{2-\delta}} |v_{\varepsilon_{p_1}} - v_{\varepsilon_{p_2}}|^q dx \leq \tau^2. \quad (11)$$

Из неравенства Чебышёва и неравенства (11) следует, что

$$\begin{aligned} \mu(x: x \in B_{2-\delta}, |v_{\varepsilon_{p_1}}(x) - v_{\varepsilon_{p_2}}(x)|^q > \tau) &\leq \\ &\leq \frac{1}{\tau} \int_{B_{2-\delta}} |v_{\varepsilon_{p_1}} - v_{\varepsilon_{p_2}}|^q dx \leq \tau \end{aligned}$$

для любых $p_1, p_2 \geq p(\tau)$.

Из предыдущей оценки, переходя к пределу, получаем, что

$$\mu(x: x \in B_{2-\delta}, |v_{\varepsilon_{p_1}}(x) - u_0(x)|^q \geq \tau) \leq \tau \quad (12)$$

для любого $p_1 \geq p(\tau)$.

Пусть $A_{\delta, \tau} = \{x: x \in B_{2-\delta}, |v_{\varepsilon_{p_1}}(x) - u_0(x)|^q < \tau\}$. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \int_{B_{2-\delta}} |v_{\varepsilon_{p_1}}(x) - u_0(x)|^q dx &\leq \int_{A_{\delta, \tau}} |v_{\varepsilon_{p_1}}(x) - u_0(x)|^q dx + \\ &+ \int_{B_{2-\delta}} |v_{\varepsilon_{p_1}}(x) - u_0(x)|^q dx \leq \tau \text{mes } A_{\delta, \tau} + \tau \leq 2^{(n+4)q} \tau \pi. \end{aligned} \quad (13)$$

При малых τ неравенство (13) противоречит неравенству (10). Полученное противоречие доказывает сходимость $\{v_\varepsilon\}$ к u_0 в $L^q(B_{2-\delta})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и любом $\delta \in (0, 1)$.

Пусть $S_m := \{x: x \in B_2, u(x) \geq m\}$, $m \in (0, M)$. Тогда для фиксированных m и δ справедливо

$$\int_{S_m \cap B_{2-\delta}} \left\{ v_\varepsilon^q + \left(\sum_{i=1}^n v_{\varepsilon x_i}^2 \right)^{\frac{q}{2}} \right\} dx \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

так как

$$v_\varepsilon(x) \leq K_\varepsilon^{-1} \int_{m+\varepsilon}^M \frac{dt}{g(t)}$$

и при этом

$$\int_{S_m \cap B_{2-\delta}} \left(\sum_{i=1}^n v_{\varepsilon x_i} \right)^{\frac{q}{2}} dx \leq (K_\varepsilon g(m+\varepsilon))^{-q} \int_{S_m \cap B_{2-\delta}} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right)^{\frac{q}{2}} dx.$$

Следовательно, для любых $m \in (0, M)$ и $\delta \in (0, 1)$ семейства функций $\{v_\varepsilon\}$ и $\{v_{\varepsilon x_i}\}$, $i = 1, \dots, n$, сходятся в $L^q(S_m \cap B_{2-\delta})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ соответственно к функциям $v_0, v_1, \dots, v_n$, причем $\sum_{i=0}^n |v_i(x)| = 0$ почти повсюду на $S_m \cap B_{2-\delta}$. Существует убывающая, стремящаяся к нулю последовательность $\{\varepsilon_k\}$, такая, что $\{v_{\varepsilon_k}\}$ сходится сильно в $L^q(B_{2-\delta})$ при любом $\delta \in (0, 1)$, а последовательности $\{v_{\varepsilon_k x_i}\}$, $i = 1, \dots, n$, слабо сходятся в $L^q(B_{2-\delta})$. Очевидно, эти последовательности будут сходиться соответственно к функции g_0 , такой, что $g_0(x) = 0$ почти всюду в B_2 .

Как было показано ранее, семейство $\{v_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится поточечно к функции u_0 , принимающей только два значения: нуль или единица. Так как, по условию, функция $u(\cdot)$ равна нулю на множестве положительной меры в B_1 , то функция u_0 равна единице почти повсюду в B_2 . Следовательно, $u(x) = 0$ почти всюду в B_2 . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение теоремы справедливо также для решений неравенства (1) в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Действительно, пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$ и некоторое решение $u \geq 0$ неравенства (1) в Ω равно нулю почти всюду на множестве $Q \subset \Omega$, причем $\text{mes } Q > 0$. Тогда, по доказанному, $u(x) = 0$ почти всюду в некотором $B_{r_0,p}$, где $B_{r_0,p}$ — шар радиуса r_0 с центром в точке $p \in \Omega$. Пусть $x \in \Omega$ — произвольная точка, не совпадающая с p , $\gamma_{x,p}$ — гладкий путь в Ω , соединяющий p и x . Расстояние от каждой точки $\gamma_{x,p}$ до $\partial\Omega$ больше некоторого положительного числа α_1 . Тогда, как было показано, $u = 0$ в шаре $B_{\alpha_1,p}$ радиуса α_1 с центром в точке p , откуда следует, что $u = 0$ в любом шаре $B_{\alpha_1,y}$ с центром в $y \in \bar{B}_{\alpha_1,p} \cap \gamma_{x,p}$ и т. д. Таким образом, $u(x) = 0$ почти всюду в некоторой окрестности $\gamma_{x,p}$.

Выражаю глубокую благодарность А. А. Конькову за внимание к работе и ценные замечания.